

1. Vypočítejte derivace složených funkcí:

$$(i) f_1(x) = (x^2 + 1)^6$$

$$(ii) f_2(x) = \sqrt{4x^3 - x}$$

$$(iii) f_3(x) = (\sqrt{2x^3 - 1} + 2)^8$$

$$(iv) f_4(x) = \frac{1}{(3x^4 + x^2)^{10}}$$

$$(v) f_5(x) = \cos(2x + 4)$$

$$(vi) f_6(x) = \sin^2 x$$

$$(vii) f_7(x) = \sin(x^2)$$

$$(viii) f_8(x) = \ln(2x + 4)$$

$$(ix) f_9(x) = \ln(3 \sin x - 8)$$

$$(x) f_{10}(x) = e^{\sin x}$$

2. Vypočítejte druhé derivace následujících funkcí:

$$(i) f_1(x) = 3x^2 + 6x - 2$$

$$(ii) f_2(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$(iii) f_3(x) = 4 \sin x + 2 \cos x$$

$$(iv) f_4(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$$

3. Je dána funkce $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2$. Vypočítejte 1., 2. a 3. derivaci funkce $f(x)$ a vyčístele je v bodě -1.

4. Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + 2x}{\sin x + x}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$(ix) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp^x - 1}{x}$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

5. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí nebo klesající.

$$(i) f_1(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$$

$$(ii) f_2(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$(iii) f_3(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(iv) f_4(x) = \frac{1-2x}{x+3}$$

$$(v) f_5(x) = \frac{x^2-4x+4}{x+1}$$

$$(vi) f_6(x) = (x^2 - 1)^4$$

6. Určete inflexní body a intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní nebo konkávní.

$$(i) f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$(ii) f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$(iii) f(x) = \frac{x+1}{x-4}$$

$$(iv) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

7. Najděte lokální extrémy zadaných funkcí.

$$(i) f(x) = x^3 + 6x^2$$

$$(ii) f(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

$$(iii) f(x) = (x^2 - 1)^3$$

$$(iv) f(x) = \sqrt{4x - x^2}$$

8. Pro danou funkci určete, zda je v daném bodě x_0 kladná/záporná, rostoucí/klesající, konvexní/konkávní.

$$(i) f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4, x_0 = 1$$

$$(ii) f(x) = \sin^2 x - 2 \cos^2 x, x_0 = -2$$

$$(iii) f(x) = \frac{x^2-5}{x+3}, x_0 = -1$$

$$(iv) f(x) = \frac{e^x-1}{x}, x_0 = 0$$

$$(v) f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 1$$

ŘEŠENÍ

$$1. (i) f'_1(x) = 12x(x^2 + 1)^5$$

$$(ii) f'_2(x) = \frac{12x^2-1}{2\sqrt{4x^3-x}}$$

$$(iii) f'_3(x) = \frac{24(\sqrt{2x^3-1}+2)^7}{\sqrt{2x^3-1}}$$

$$(iv) f'_4(x) = \frac{-10(12x^3+2x)}{(3x^4+x^2)^{11}}$$

$$(v) f'_5(x) = -2 \sin(2x + 4)$$

$$(vi) f'_6(x) = \sin(2x)$$

$$(vii) f'_7(x) = 2x \cos(x^2)$$

$$(viii) f'_8(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$(ix) f'_9(x) = \frac{3 \cos x}{3 \sin x - 8}$$

$$(x) f'_{10}(x) = e^{\sin x} \cos x$$

$$2. (i) f''_1(x) = 6$$

- (ii) $f_2''(x) = 2 + \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{2}{x^3}$
 (iii) $f_3''(x) = -4 \sin x - 2 \cos x$
 (iv) $f_4''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$
3. • $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 + 4x$, $f'(-1) = -17$
 • $f''(x) = 20x^3 - 36x + 4$, $f''(-1) = 20$
 • $f'''(x) = 60x^2 - 36$, $f'''(-1) = 24$
4. (i) $\frac{5}{3}$
 (ii) 4
 (iii) $\frac{1}{3}$
 (iv) 2
 (v) $\frac{5}{2}$
 (vi) 0
 (vii) 8
 (viii) 1
 (ix) 1
 (x) 0
5. (i) rostoucí na $(-\infty, -1)$, $(\frac{4}{3}, \infty)$, klesající na $(-1, \frac{4}{3})$
 (ii) rostoucí na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, klesající na $(-1, 0)$, $(0, 1)$
 (iii) rostoucí na $(0, \infty)$
 (iv) klesající na $(-\infty, -3)$, $(-3, \infty)$
 (v) rostoucí na $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$, klesající na $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$
 (vi) rostoucí na $(-1, 0)$, $(1, \infty)$, klesající na $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$
6. (i) inflexní bod: $x = 0$, konvexní na $(0, \infty)$, konkávní na $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$
 (ii) inflexní bod: nemá, konkávní na $(-\infty, 0)$
 (iii) inflexní bod: nemá, konvexní na $(4, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 4)$
 (iv) inflexní bod: nemá, konvexní na $(-1, 1)$, konkávní na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
7. (i) minimum: $x = 0$, maximum: $x = -4$
 (ii) minimum: $x = 0$, maximum: $x = -6$
 (iii) minimum: $x = 0$
 (iv) maximum: $x = 2$
8. (i) záporná, klesající, konvexní
 (ii) kladná, rostoucí, konkávní
 (iii) záporná, rostoucí, konvexní
 (iv) kladná, rostoucí, konvexní
 (v) nulová, rostoucí, konkávní

REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3