

1. Vypočítejte limity v nevlastních bodech:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{3x-6}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{3x-6}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x^2+x-2}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2}{x^2-1}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+x^2}{x^2-1}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+3}$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{x^3-3}$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+3x^2+5}{3-x}$$

$$(ix) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4+2x-x^3+4x^4}{2+x^3-5x^4}$$

2. Určete body nespojitosti dané funkce a intervaly, ve kterých je spojitá:

$$(i) f_1(x) = x + 1$$

$$(ii) f_2(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$(iii) f_3(x) = \frac{x^2+4x-7}{x^3+5x^2+6x}$$

$$(iv) f_4(x) = \operatorname{arccotg} x$$

$$(v) f_5(x) = \frac{e^x}{x^2-x-2}$$

3. Spočítejte derivace:

$$(i) f_1(x) = x^2 + x^3$$

$$(ii) f_2(x) = 4x^2 - x + 1$$

$$(iii) f_3(x) = \sqrt{x} + x^{-2}$$

$$(iv) f_4(x) = 6\sqrt[3]{x} - 5$$

$$(v) f_5(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

$$(vi) f_6(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{x^2}$$

$$(vii) f_7(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$$

$$(viii) f_8(x) = x^7 - 7 \cos x$$

$$(ix) f_9(x) = 6 \ln x - 9 \log_{10} x$$

$$(x) f_{10}(x) = 3^x + 2e^x$$

4. Derivujte podle pravidel pro derivaci součinu a podílu:

$$(i) f_1(x) = x \cdot \sin x$$

$$(ii) f_2(x) = (x^2 - 1) \cdot \sin x$$

$$(iii) f_3(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$(iv) f_4(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\begin{aligned}
(v) \quad f_5(x) &= \frac{x^2+2x}{1-x^2} \\
(vi) \quad f_6(x) &= \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \\
(vii) \quad f_7(x) &= \frac{x^3+2x^2-1}{x^4+2} \\
(viii) \quad f_8(x) &= \frac{2x}{x^2-1} \\
(ix) \quad f_9(x) &= \frac{1-x^4}{\sqrt[3]{\pi}} \\
(x) \quad f_{10}(x) &= \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^3+1)} + x(x^2-1)^2
\end{aligned}$$

ŘEŠENÍ

1. (i) $\frac{1}{3}$
(ii) $\frac{1}{3}$
(iii) 3
(iv) ∞
(v) $-\infty$
(vi) 0
(vii) 0
(viii) ∞
(ix) $-\frac{4}{5}$
2. (i) není bod nespojitosti, spojitá na $\mathbb{R}$
(ii) bod nespojitosti: 1, spojitá na intervalech $(-\infty, 1), (1, \infty)$
(iii) body nespojitosti: $-3, -2, 0$, spojitá na intervalech $(-\infty, -3), (-3, -2), (-2, 0), (0, \infty)$
(iv) není bod nespojitosti, spojitá na $\mathbb{R}$
(v) body nespojitosti: $-1, 2$, spojitá na intervalech $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$
3. (i) $f'_1(x) = 2x + 3^2$
(ii) $f'_2(x) = 8x - 1$
(iii) $f'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\frac{1}{x^3}$
(iv) $f'_4(x) = 2\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
(v) $f'_5(x) = -2x^{-3} - 12x^{-4}$
(vi) $f'_6(x) = -2x^{-2} - \frac{2}{35}x^{-\frac{3}{5}}$
(vii) $f'_7(x) = 2\cos x + 3\sin x$
(viii) $f'_8(x) = 7x^6 + 7\sin x$
(ix) $f'_9(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{x \cdot \ln 10}$
(x) $f'_{10}(x) = 3^x \ln 3 + 2e^x$
4. (i) $f'_1(x) = \sin x + x \cos x$
(ii) $f'_2(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x - \cos x$
(iii) $f'_3(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$(iv) \quad f'_4(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$(v) \quad f'_5(x) = \frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2}$$

$$(vi) \quad f'_6(x) = \frac{-2}{1-\sin 2x}$$

$$(vii) \quad f'_7(x) = -\frac{x^6+4x^5-4x^3-6x^2-8x}{(x^4+2)^2}$$

$$(viii) \quad f'_8(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$(ix) \quad f'_9(x) = \frac{4x^3}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$(x) \quad f'_{10}(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x^2}{(x^3+1)^2} + (x^2-1)(5x^2-1)$$

REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3