

1. Je dána funkce  $f(x)$ . Určete, zda je v daném bodě  $x_0$  kladná/záporná, rostoucí/klesající, konvexní/konkávní.

(i)  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4, x_0 = 1$

(ii)  $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos^2 x, x_0 = -2$

(iii)  $f(x) = \frac{x^2-5}{x+3}, x_0 = -1$

(iv)  $f(x) = \frac{e^x-1}{x}, x_0 = 0$

(v)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 1$

2. Najděte lokální extrémy zadaných funkcí.

(i)  $f(x) = x^3 + 6x^2$

(ii)  $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

(iii)  $f(x) = (x^2 - 1)^3$

(iv)  $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

3. Určete průběh funkce

(i)  $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

(ii)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

(iii)  $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$

(iv)  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

### ŘEŠENÍ

1. (i) záporná, klesající, konvexní  
(ii) kladná, rostoucí, konkávní  
(iii) záporná, rostoucí, konvexní  
(iv) kladná, rostoucí, konvexní  
(v) nulová, rostoucí, konkávní
2. Najděte lokální extrémy zadaných funkcí.
- (i) minimum:  $x = 0$ , maximum:  $x = -4$   
(ii) minimum:  $x = 0$ , maximum:  $x = -6$   
(iii) minimum:  $x = 0$   
(iv) maximum:  $x = 2$

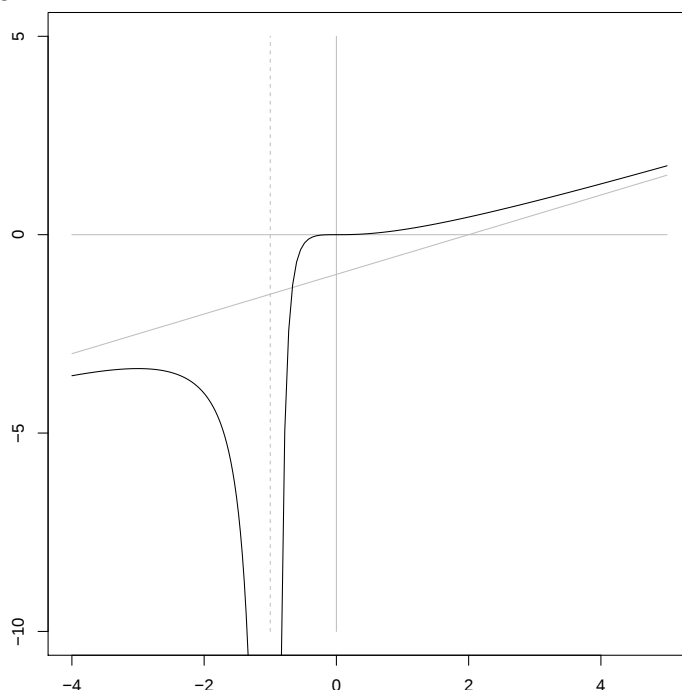
3. (i)
- $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ,  $H(f) = \mathbb{R}$
  - není sudá ani lichá, není periodická
  - asymptoty bez směrnice:
 
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty \Rightarrow a_1 : x = -1$$

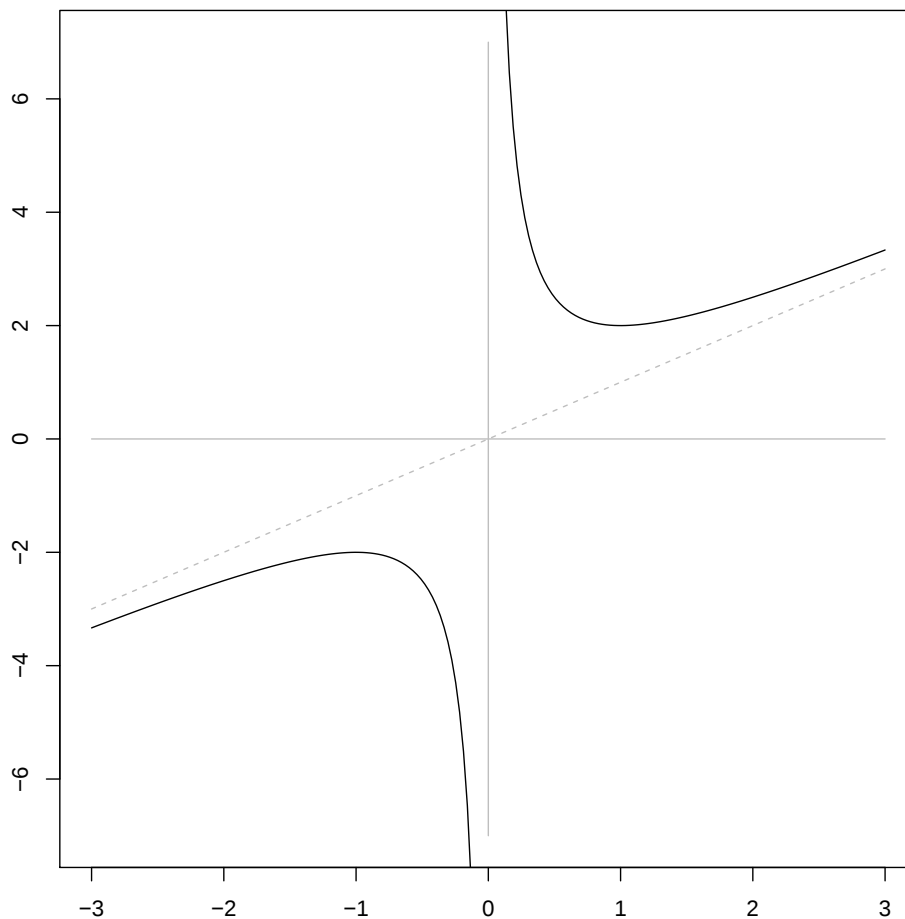
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$
  - asymptoty se směrnicí:
 
$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

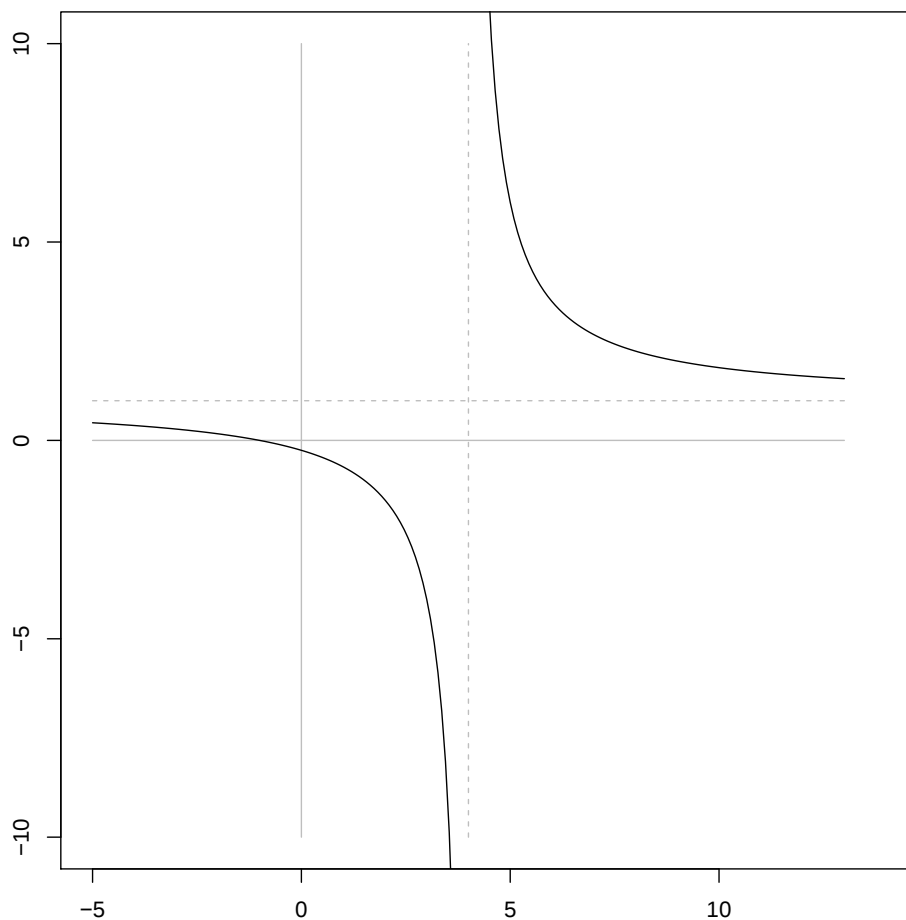
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) = -1 \Rightarrow a_2 : y = \frac{1}{2}x - 1$$
  - průsečík s osou  $x$ :  $[0, 0]$
  - průsečík s osou  $y$ :  $[0, 0]$
  - kladná na  $(0, \infty)$ , záporná na  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
  - $f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$
  - rostoucí na  $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ , klesající na  $(-3, -1)$
  - stacionární body:  $x = 0, x = -3$
  - $f''(x) = \frac{3x}{(x+1)^2}$
  - konkávní na  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ , konvexní na  $(0, \infty)$
  - inflexní bod:  $x = 0$
  - $f(-3) = -\frac{27}{8}, f(0) = 0$
  - graf:



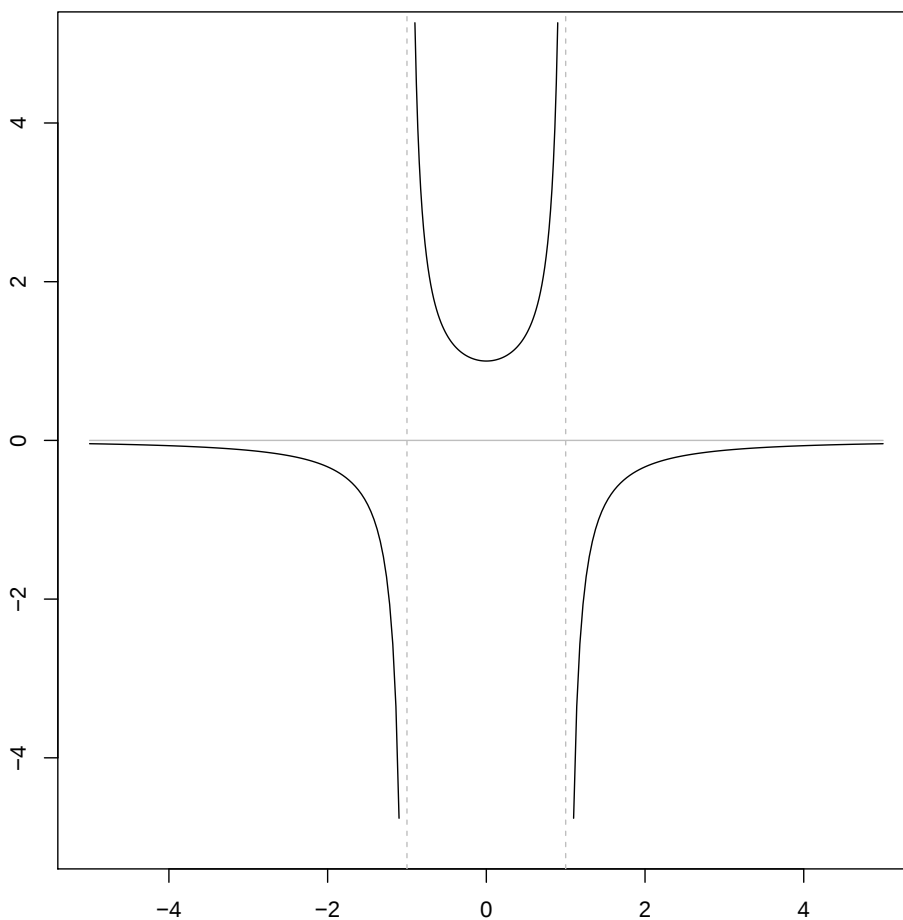
- (ii)
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $H(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
  - lichá, není periodická
  - asymptota bez směrnice:  $\Rightarrow a_1 : x = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$   
 asymptoty se směrnicí:  $\Rightarrow a_2 : y = x$
  - průsečíky s osami nejsou
  - kladná na  $(0, \infty)$ , záporná na  $(-\infty, 0)$
  - $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$
  - rostoucí na  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ , klesající na  $(-1, 1)$
  - stacionární body:  $x = -1, x = 1$
  - $f''(x) = \frac{2}{x^3}$
  - konkávní na  $(-\infty, 0)$ , konvexní na  $(0, \infty)$
  - inflexní bod: nemá
  - graf:



- (iii)
- $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$ ,  $H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
  - není ani sudá ani lichá, není periodická
  - asymptota bez směrnice:  $\Rightarrow a_1 : x = 4$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$   
 asymptoty se směrnicí:  $\Rightarrow a_2 : y = 1$
  - průsečík s osou  $x$ :  $[-1, 0]$   
 průsečík s osou  $y$ :  $[0, -\frac{1}{4}]$
  - kladná na  $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ , záporná na  $(-1, 4)$
  - $f'(x) = \frac{-5}{(x-4)^2}$
  - klesající na celém  $D(f)$
  - stacionární bod:  $x = 4$
  - $f''(x) = \frac{10}{(x-4)^4}$
  - konkávní na  $(-\infty, 4)$ , konvexní na  $(4, \infty)$
  - inflexní bod: nemá
  - graf:



- (iv)
- $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ,  $H(f) = \mathbb{R} - (0, 1)$
  - sudá, není periodická
  - asymptota bez směrnice:  $\Rightarrow a_1 : x = -1$ ,  $a_2 : x = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$   
 asymptoty se směrnicí:  $\Rightarrow a_3 : y = 0$
  - průsečík s osou  $x$  neexistuje  
 průsečík s osou  $y$ :  $[0, 1]$
  - kladná na  $(-1, 1)$ , záporná na  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
  - $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$
  - rostoucí na  $(0, 1) \cup (1, \infty)$ , klesající na  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
  - stacionární bod:  $x = 0$
  - $f''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$
  - konkávní na  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ , konvexní na  $(-1, 1)$
  - inflexní bod: nemá
  - graf:



## REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3