

1. Spočítejte derivace:

$$(i) f_1(x) = x^2 + x^3$$

$$(ii) f_2(x) = 4x^2 - x + 1$$

$$(iii) f_3(x) = \sqrt{x} + x^{-2}$$

$$(iv) f_4(x) = 6\sqrt[3]{x} - 5$$

$$(v) f_5(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

$$(vi) f_6(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{x^2}$$

$$(vii) f_7(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$$

$$(viii) f_8(x) = x^7 - 7 \cos x$$

$$(ix) f_9(x) = 6 \ln x - 9 \log_{10} x$$

$$(x) f_{10}(x) = 3^x + 2e^x$$

2. Derivujte podle pravidel pro derivaci součinu a podílu:

$$(i) f_1(x) = x \cdot \sin x$$

$$(ii) f_2(x) = (x^2 - 1) \cdot \sin x$$

$$(iii) f_3(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$(iv) f_4(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$(v) f_5(x) = \frac{x^2+2x}{1-x^2}$$

$$(vi) f_6(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$(vii) f_7(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x^4+2}$$

$$(viii) f_8(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$(ix) f_9(x) = \frac{1-x^4}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$(x) f_{10}(x) = \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^3+1)} + x(x^2-1)^2$$

3. Vypočítejte derivace složených funkcí:

$$(i) f_1(x) = (x^2 + 1)^6$$

$$(ii) f_2(x) = \sqrt{4x^3 - x}$$

$$(iii) f_3(x) = (\sqrt{2x^3 - 1} + 2)^8$$

$$(iv) f_4(x) = \frac{1}{(3x^4 + x^2)^{10}}$$

$$(v) f_5(x) = \cos(2x + 4)$$

$$(vi) f_6(x) = \sin^2 x$$

$$(vii) f_7(x) = \sin(x^2)$$

$$(viii) f_8(x) = \ln(2x + 4)$$

$$(ix) f_9(x) = \ln(3 \sin x - 8)$$

$$(x) f_{10}(x) = e^{\sin x}$$

4. Vypočítejte druhé derivace následujících funkcí:

$$(i) f_1(x) = 3x^2 + 6x - 2$$

$$(ii) f_2(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$(iii) f_3(x) = 4 \sin x + 2 \cos x$$

$$(iv) f_4(x) = \frac{2^2-2}{x+1}$$

5. Je dána funkce $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2$. Vypočítejte 1., 2. a 3. derivaci funkce $f(x)$ a vyčíslíte je v bodě -1.

6. Určete rovnice tečny a normály funkcí v daném bodě x_0 :

$$(i) f_1(x) = x^2 - 2x, x_0 = 4$$

$$(ii) f_2(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = \frac{1}{2}$$

$$(iii) f_3(x) = \frac{2x-1}{x+1}, x_0 = -2$$

$$(iv) f_4(x) = x \operatorname{tg} x, x_0 = 0$$

$$(v) f_5(x) = \frac{\sin 2x+1}{\cos x+\sin x}, x_0 = \frac{\pi}{2}$$

ŘEŠENÍ

1. Spočítejte derivace:

$$(i) f'_1(x) = 2x + 3^2$$

$$(ii) f'_2(x) = 8x - 1$$

$$(iii) f'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\frac{1}{x^3}$$

$$(iv) f'_4(x) = 2\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(v) f'_5(x) = -2x^{-3} - 12x^{-4}$$

$$(vi) f'_6(x) = -2x^{-2} - \frac{2}{35}x^{-\frac{3}{5}}$$

$$(vii) f'_7(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$$

$$(viii) f'_8(x) = 7x^6 + 7 \sin x$$

$$(ix) f'_9(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{x \cdot \ln 10}$$

$$(x) f'_{10}(x) = 3^x \ln 3 + 2e^x$$

$$2. (i) f'_1(x) = \sin x + x \cos x$$

$$(ii) f'_2(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x - \cos x$$

$$(iii) f'_3(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$(iv) f'_4(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$(v) f'_5(x) = \frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2}$$

$$(vi) f'_6(x) = \frac{-2}{1-\sin 2x}$$

$$(vii) f'_7(x) = -\frac{x^6+4x^5-4x^3-6x^2-8x}{(x^4+2)^2}$$

$$(viii) f'_8(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$(ix) f'_9(x) = \frac{4x^3}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$(x) f'_{10}(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x^2}{(x^3+1)^2} + (x^2-1)(5x^2-1)$$

3. (i) $f'_1(x) = 12x(x^2 + 1)^5$
(ii) $f'_2(x) = \frac{12x^2 - 1}{2\sqrt{4x^3 - x}}$
(iii) $f'_3(x) = \frac{24(\sqrt{2x^3 - 1} + 2)^7}{\sqrt{2x^3 - 1}}$
(iv) $f'_4(x) = \frac{-10(12x^3 + 2x)}{(3x^4 + x^2)^{11}}$
(v) $f'_5(x) = -2 \sin(2x + 4)$
(vi) $f'_6(x) = \sin(2x)$
(vii) $f'_7(x) = 2x \cos(x^2)$
(viii) $f'_8(x) = \frac{1}{x+2}$
(ix) $f'_9(x) = \frac{3 \cos x}{3 \sin x - 8}$
(x) $f'_{10}(x) = e^{\sin x} \cos x$
4. (i) $f''_1(x) = 6$
(ii) $f''_2(x) = 2 + \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{2}{x^3}$
(iii) $f''_3(x) = -4 \sin x - 2 \cos x$
(iv) $f''_4(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$
5. • $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 + 4x, f'(-1) = -17$
• $f''(x) = 20x^3 - 36x + 4, f''(-1) = 20$
• $f'''(x) = 60x^2 - 36, f'''(-1) = 24$
6. (i) $t_1 : y = 6x - 16, n_1 : y = -\frac{1}{6}x + \frac{23}{6}$
(ii) $t_2 : y = -16x + 12, n_2 : y = \frac{1}{16}x + \frac{127}{32}$
(iii) $t_3 : y = 3x + 11, n_3 : y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$
(iv) $t_4 : y = 0, n_4 : x = 0$
(v) $t_5 : y = -x + \frac{\pi}{2} + 1, n_5 : y = x - \frac{\pi}{2} + 1$

REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3