

1. Jsou dány polynomy

$$P_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1,$$

$$P_2(x) = x^3 - 8x^2 + 2x - 1,$$

$$P_3(x) = x^2 + 3x + 4.$$

Vypočítejte:

$$(i) -2P_1(x) - P_2(x)$$

$$(ii) P_1(x) \cdot P_3(x)$$

$$(iii) (P_1(x) + P_2(x)) \cdot P_3(x)$$

$$(iv) P_1(x) + P_2(x) \cdot P_3(x)$$

2. Provedte dělení polynomů:

$$(i) (x^7 - 2x^6 + 3x^4 + x^3 - x^2 + 4) : (x + 1)$$

$$(ii) (-5x^4 + 4x^2 - 3x + 4) : (x^3 + 2x^2 - 4)$$

$$(iii) (-2x^6 - x^5 + 5x^4 + 2x^2 + 3x - 2) : (2x^2 - 3)$$

3. Najděte všechny celočíselné kořeny daného polynomu:

$$(i) x^6 - x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2$$

$$(ii) x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 17x^2 - 28x + 12$$

$$(iii) x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 3x$$

4. Zjistěte, kolikanásobným kořenem daného polynomu je číslo 3:

$$(i) x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 18x^2 - 27x + 27$$

$$(ii) x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 2x^2 - 15x + 9$$

$$(iii) x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

5. Vyřešte kvadratické rovnice v $\mathbb{R}$, popř. v $\mathbb{C}$:

$$(i) x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$(ii) x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(iii) x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$(iv) 16x^2 - 25 = 0$$

$$(v) 15x^2 - 30x = 0$$

$$(vi) x^2 + 4 = 0$$

6. Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$(i) x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

$$(ii) x^2 + 5x + 7 > 0$$

$$(iii) x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

$$(iv) x^2 + 2x + 6 < 0$$

7. Doplňte kvadratickou funkci na čtverec:

$$(i) y = x^2 + 4x + 3$$

$$(ii) y = x^2 - 6x + 3$$

$$(iii) \ y = x^2 + 3x - 1$$

$$(iv) \ y = -x^2 + 4x + 2$$

$$(v) \ y = -2x^2 + 4x + 7$$

8. Rozhodněte, zda se jedná o ryze lomenou či neryze lomenou funkci. Neryze lomenou funkci vyjádřete jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

$$(i) \ R(x) = \frac{-10x^2+10x-1}{x^2-3x+6}$$

$$(ii) \ R(x) = \frac{2x^3-x^2+5}{x^5-3x^4+2x^2-x+3}$$

$$(iii) \ R(x) = \frac{2x^5-x^4+3^2-x+1}{x^2-2x+4}$$

$$(iv) \ R(x) = \frac{2x^2+5}{x-7}$$

9. Řešte nerovnice

$$(i) \ \frac{x+4}{x(6-x)} \leq 0$$

$$(ii) \ \frac{x+2}{3x-2} \leq 0$$

$$(iii) \ \frac{4x-3}{7+x} > 0$$

$$(iv) \ \frac{1-2x}{x^2-1} < 0$$

10. Určete definiční obor daných funkcí:

$$(i) \ f_1(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$(ii) \ f_2(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$(iii) \ f_3(x) = \sqrt{x+2}$$

$$(iv) \ f_4(x) = \log(x-3)$$

$$(v) \ f_5(x) = \sqrt{\frac{x+2}{4x-6}}$$

11. Určete paritu funkcí

$$(i) \ f_1(x) = \frac{4x}{x^2+4}$$

$$(ii) \ f_2(x) = \frac{x^2}{|x|+3}$$

$$(iii) \ f_3(x) = \frac{\sin(x)-x \cos(x)}{x^2}$$

$$(iv) \ f_4(x) = x^2 - 4x + 5 \sin(3x)$$

$$(v) \ f_5(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$$

12. Pro dané funkce určete průsečíky s osami

$$(i) \ y = x^3 - \frac{9}{2}x^2$$

$$(ii) \ y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

$$(iii) \ y = \ln(4-x^2)$$

$$(iv) \ y = \frac{2x^2-10}{x+3}$$

ŘEŠENÍ

1. (i) $-5x^3 + 14x^2 - 4x - 1$
(ii) $2x^6 - 19x^5 + 19x^4 - 15x^3 - 3x^2 + x - 1$
(iii) $3x^6 - 2x^5 - 18x^4 - 35x^3 + 12x$
(iv) $x^5 - 5x^4 - 18x^3 - 27x^2 + 5x - 4$
2. (i) $x^6 - 3x^5 + 3x^4 + x^2 - 2x + 2 + \frac{2}{x+1}$
(ii) $-5x + 10 + \frac{-16x^2 - 23x + 44}{x^3 + 2x^2 - 4}$
(iii) $-x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}}{2x^2 - 3}$
3. (i) $-1, -1, -1, 1, 1, 2$
(ii) $1, 1, -2, 2, 3$
(iii) $0, -1, 1, 1, -3$
4. (i) trojnásobný
(ii) dvojnásobný
(iii) trojnásobný
5. (i) $x_1 = -5, x_2 = -2$
(ii) $x_1 = x_2 = 5$
(iii) $x_1 = -2 - i, x_2 = -2 + i$
(iv) $x_1 = -\frac{5}{4}, x_2 = \frac{5}{4}$
(v) $x_1 = 0, x_2 = 2$
(vi) $x_1 = -2i, x_2 = 2i$
6. (i) $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 5, \infty \rangle$
(ii) $x \in \mathbb{R}$
(iii) $x \in \langle 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \rangle$
(iv) $x \in \emptyset$
7. (i) $(x+2)^2 - 1$
(ii) $(x-3)^2 - 6$
(iii) $(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}$
(iv) $-(x-2)^2 + 6$
(v) $-2(x-1)^2 + 9$
8. (i) neryze lomená, $R(x) = -4 + \frac{23-2x}{x^2-3x+6}$
(ii) ryze lomená
(iii) neryze lomená, $R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \frac{-19x+53}{x^2-2x+4}$
(iv) neryze lomená, $R(x) = 2x + 14 + \frac{103}{x-7}$

9. (i) **I. způsob** (stejně jako na cvičení)

Budeme uvažovat všechny možnosti, kdy může daný podíl být nekladný. Nesmíme zapomenout, že jmenovatel nesmí být roven nule!!! U výrazů ve jmenovateli tedy nesmíme připustit rovnosti. Mohou nastat následující 4 možnosti:

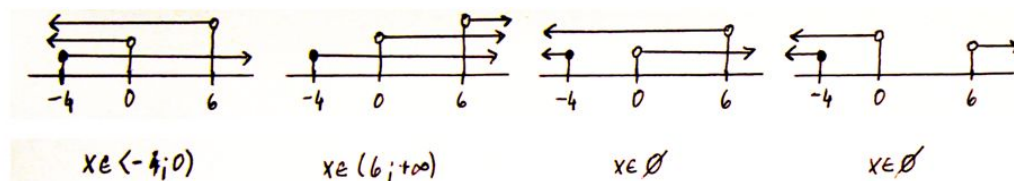
$$(i) \frac{+}{- \cdot +}, \quad (ii) \frac{+}{+ \cdot -}, \quad (iii) \frac{-}{+ \cdot +}, \quad (iv) \frac{-}{- \cdot -}$$

Všechny tyto možnosti rozepíšeme:

$$[(x+4 \geq 0 \wedge x < 0 \wedge 6-x > 0) \vee (x+4 \geq 0 \wedge x > 0 \wedge 6-x < 0) \vee (x+4 \leq 0 \wedge x > 0 \wedge 6-x > 0) \vee (x+4 \leq 0 \wedge x < 0 \wedge 6-x < 0)]$$

$$[(x \geq -4 \wedge x < 0 \wedge x < 6) \vee (x \geq -4 \wedge x > 0 \wedge x > 6) \vee (x \leq -4 \wedge x > 0 \wedge x < 6) \vee (x \leq -4 \wedge x < 0 \wedge x > 6)]$$

Graficky znázorníme:



$$x \in \langle -4, 0 \rangle \cup (6, \infty)$$

II. způsob spočívá v nalezení nulových bodů a rozdělení osy na příslušné subintervaly. Každý výraz pak v těchto subintervalech vyhodnotíme, zajímá nás pouze znaménko (popř. nula), nikoliv konkrétní hodnota. V posledním řádku tabulky dostáváme znaménka, popř. nulu odpovídající součinům v příslušném sloupci tabulky.

Nulové body:

$$x+4=0 \Rightarrow x = -4$$

$$x = 0$$

$$6-x=0 \Rightarrow x = 6$$

Tímto způsobem jsme dostali nulové body, pomocí nichž rozdělíme osu na několik subintervalů. Do hlavičky tabulky neuvádíme nulové body výrazů ve jmenovateli, protože dělit nulou nelze.

Uspořádání do tabulky:

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 0)$	$(0, 6)$	$(6, \infty)$
$x+4$	-	0	+	+	+
x	-	-	-	+	+
$6-x$	+	+	+	+	-
$\frac{x+4}{x(6-x)}$	+	0	-	+	-

Zajímá nás, pro které hodnoty x je výraz $\frac{x+4}{x(6-x)} \leq 0$. Odpověď nalezneme v posledním řádku tabulky – hledáme takové intervaly, ve kterých je daný výraz nekladný. Tomu odpovídá 2., 3. a 5. sloupec tabulky, tedy $x \in \langle -4, 0 \rangle \cup (6, \infty)$.

$$(ii) x \in \langle -2, \frac{2}{3} \rangle$$

$$(iii) x \in (-\infty, -7) \cup (\frac{3}{4}, \infty)$$

$$(iv) x \in (-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$$

$$10. (i) D(f_1) = \mathbb{R}$$

$$(ii) D(f_2) = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$(iii) D(f_3) = \langle -2, \infty \rangle$$

- (iv) $D(f_4) = \langle 3, \infty \rangle$
 - (v) $D(f_5) = (-\infty, -2] \cup (\frac{3}{2}, \infty)$
11. (i) lichá
- (ii) sudá
 - (iii) lichá
 - (iv) ani sudá ani lichá
 - (v) lichá
12. (i) Průsečíky s osou x : $[0, 0]$, $[\frac{9}{2}, 0]$
Průsečík s osou y : $[0, 0]$
- (ii) Průsečík s osou x : $[0, 0]$
Průsečík s osou y : $[0, 0]$
 - (iii) Průsečíky s osou x : $[-\sqrt{3}, 0]$, $[\sqrt{3}, 0]$
Průsečík s osou y : $[0, \ln 4]$
 - (iv) Průsečíky s osou x : $[-\sqrt{5}, 0]$, $[\sqrt{5}, 0]$
Průsečík s osou y : $[0, -\frac{10}{3}]$

REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.
PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3