

1. Gaussovou eliminační metodou řešte systémy lineárních rovnic:

(i)

$$8x - 3y = -12$$

$$3x + 2y = 33$$

(ii)

$$3x + 2y - z = 8$$

$$-x + 3y + 2z = 3$$

$$2x - y + 4z = -4$$

(iii)

$$x + 3y + z = 2$$

$$2x + 7y - z = 4$$

$$3x + 10y = 6$$

(iv)

$$x + 3y + z = 2$$

$$2x + 2y - 6z = 20$$

$$2x + 5y + 3z = 8$$

(v)

$$x + 2y - z = 2$$

$$3x - y + 2z = 7$$

$$x - z = -2$$

$$2x + y + z = 7$$

(vi)

$$2x - y + z = 4$$

$$x - y - z = -1$$

$$3x - 7y - 2z = -1$$

$$-2x + 5y + z = 1$$

2. Vypočítejte determinanty:

$$(i) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(iv) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(v) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(vi) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$$

3. Použijte Laplaceův rozvoj k výpočtu determinantů:

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(iv) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Je-li to možné, pomocí Cramerova pravidla řešte systémy lineárních rovnic:

(i)

$$3x - 2y + z = 11$$

$$x + y - 3z = 7$$

$$11x - 4y - 3z = 10$$

(ii)

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 3$$

$$2x + y + z = 12$$

(iii)

$$x - 2y = -3$$

$$2x - y = 0$$

$$4x - 5y = -6$$

(iv)

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 8 \\ -x + 3y + 2z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= -4 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} x + 2y - z - 2u &= -2 \\ 2x + y + z + u &= 8 \\ x - y - z + u &= 1 \\ x + 2y + 2z - u &= 4 \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} 6x + 3y - 2z &= 2 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 2x + y + z &= 9 \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ

1. (i) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$
- (ii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (iii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}$
- (iv) nemá řešení
- (v) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (vi) nemá řešení
2. (i) -13
- (ii) -6
- (iii) 0
- (iv) nelze (nejedná se o čtvercovou matici)
- (v) 1
- (vi) 6
3. (i) -48
- (ii) 100

(iii) -1

(iv) 24

4. (i) nelze řešit ($D = 0$)

$$(ii) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, (D = 12, D_1 = 24, D_2 = 36, D_3 = 60)$$

(iii) nelze řešit (počet rovnic se nerovná počtu neznámých $\Rightarrow$ nejedná se o čtvercovou matici)

$$(iv) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (D = 63, D_1 = 63, D_2 = 126, D_3 = -63)$$

$$(v) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, (D = -9, D_1 = -9, D_2 = -18, D_3 = -9, D_4 = -27)$$

$$(vi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, (D = -35, D_1 = -35, D_2 = -70, D_3 = -175)$$

REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 1. díl, 4. opr. vyd. Bratislava: Alfa 1966.