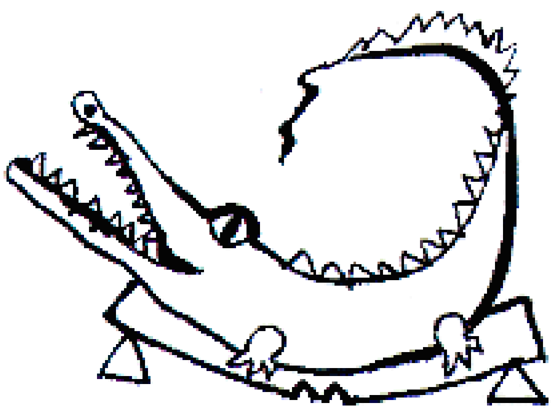
Ústav fyziky materiálů AV ČR
a
Ad hoc tým LOMOVÁ MECHANIKA KOMPOZITŮ NA SILIKÁTOVÉ I JINÉ BÁZI,
FAST VUT v Brně

PROBLÉMY LOMOVÉ MECHANIKY II.

Sborník přednášek semináře



Brno 19. června 2002

Ústav fyziky materiálů AV ČR
a
Ad hoc tým LOMOVÁ MECHANIKA KOMPOZITŮ NA SILIKÁTOVÉ I JINÉ BÁZI,
FAST VUT v Brně

PROBLÉMY LOMOVÉ MECHANIKY II.

Sborník přednášek semináře

Brno 19. června 2002

© Miroslav Stibor (editor) 2002
© Jana Kolmačková (logo) 2002

CEZ: J22/98: 261100009 a AV ČR K2076106

ISBN 80-214-2129-0

Úvodem

Tento sborník je tvořen příspěvky II. ročníku semináře „Problémy lomové mechaniky“ konaném na ÚFM AV ČR dne 19. června 2002. Po úspěšném semináři téhož jména, který se uskutečnil v minulém roce na FAST VUT v Brně, jsme se rozhodli letos takový seminář zopakovat. Hlavním důvodem, jenž nás k tomu vedl, byla především snaha poskytnout, zejména našim mladším kolegům, neformální prostředí pro přednesení nejen výsledků, kterých dosáhli během své práce, ale i pochybností, které nutně takovou činnost doprovázejí. Předpokládaná a avizovaná účast specialistů na lomovou mechaniku z různých oborů umožňuje posluchačům semináře a přednášejícím získat širší pohled na řešenou problematiku, oproštěný od jednostranného přístupu, kterému se nelze obvykle při řešení specielních problémů vyhnout. Předpokládáme dále, že volná a nevázaná diskuse na semináři (přerůstající místy i ve vázanou zábavu) povede k rozšíření a obohacení řešené problematiky a použitelnosti získaných výsledků v míře větší než je obvyklé a běžné.

Často se můžeme setkat s názory, že klasická fenomenologické lomová mechanika založená na mechanice kontinua je uzavřeným oborem, který již nemůže (a snad ani nechce) podstatně přispívat k rozvoji našeho, stále ještě dosti omezeného, poznání v oblasti porušování materiálů. S tímto názorem lze souhlasit i polemizovat. Je vysoce pravděpodobné, že v oblasti klasicky koncipované lomové mechaniky asi nedojde k nějakému převratnému objevu. Ostatně v mnoha případech by to ani nebylo žádoucí. Dosavadní výsledky a důsledky aplikací klasické lomové mechaniky na řešení praktických problémů ukazují dlouhodobě a jednoznačně na oprávněnost a spolehlivost této teorie. Na druhé straně dochází, zejména v souvislosti s rozvojem výpočetních metod a možností jejich bezprostřední realizace na vysoce výkonných počítačích, ke zpřesňování výsledků a k rozšiřování možností použitelnosti a zejména spolehlivosti lomové mechaniky do oblastí, které byly dosud z tohoto hlediska nedotčené či nevyřešené (např. otázky spojené s mikrostrukturou materiálu). Existují však ještě i jiné stránky takových (pro někoho nutných, pro jiné zcestných) úvah. Je to např. skutečnost, že postup řešení úloh založený na fenomenologické lomové mechanice je obecný a lze ho použít pro řešení celé řady úloh (např. pro poruchy netrhlinového charakteru nebo pro poruchy v nestandardních materiálech) a dále fakt, že ani tento všeobecně známý a mnohými opovrhovaný základní potenciál lomové mechaniky není zcela využit. Řadě nepříjemností a havárií by bylo možno zabránit důslednou aplikací dobře známých zákonitostí a pravidel lomové mechaniky, tedy něčím, co se dá nazvat rozšířením nebo popularizací lomové mechaniky v běžném životě. Cílem tohoto semináře je přispět i k řešení těchto otázek.

Organizátoři semináře děkují všem autorům příspěvků presentovaných ve sborníku za jejich ochotu účastnit se této akce a za jejich pečlivost, kterou projevili při přípravě svých přednášek. Dále děkujeme Ing. Miroslavu Stiborovi za neméně pečlivou a tvůrčí pomoc při technickém vyhotovení sborníku.

Uskutečnění semináře by nebylo možné bez finanční podpory výzkumného záměru CEZ: J22/98: 261100009 a v rámci řešení projektu AV ČR č. K2076106.

V Brně dne 14. června 2002

Zbyněk Keršner, Zdeněk Knésl

Obsah

NĚKTERÉ PROBLÉMY VYŠETŘOVÁNÍ STATICKÉHO PŮSOBENÍ BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ

Jiří Brožovský[1]

Abstrakt: V příspěvkou jsou diskutovány některé problémy ztěžující vyšetřování statického působení konstrukcí z betonu a železobetonu. Stručně jsou též zmíněny některé možné přístupy a jejich vhodnost či nevhodnost. Diskutované postupy odpovídají situaci a možnostem na pracovišti autora a rozhodně nepokrývají celou šíři problematiky (zcela opomenut je např. mikroploškový přístup).

1 Úvod

Při budování stavebních konstrukcí se již více než sto let využívá betonu a železobetonu. Tyto materiály mají řadu předností. Jsou snadno dostupné, relativně šetrné k životnímu prostředí, jednoduše připravitelné a použitelné bez velkých nároků na přesnost provedení, technické vybavení a kvalifikaci pracovníků.

Uvedené materiály však působí nemalé obtíže ve chvíli, kdy má být vyšetřováno jejich statické působení. To je logické a zcela přirozené, vždyť kdo by očekával, že hmota vytvořená smícháním řady různých složek (kamenivo různých frakcí, pojiva na nejrůznější bázi) bude ctít Hookeův zákon.

Praktickým těchto vlastností je skutečnost, že dodnes se běžně využívají převážně velmi zjednodušené výpočtové teorie a to přesto, že problematice byla v několika uplynulých desetiletích věnována nemalá pozornost. V oblasti vyšetřování železobetonových konstrukcí lze uvést například práce Bažanta [1], Červenky [3], Kupfera [5] a mnoha dalších.

Pro potřeby grantového projektu řešeného na Fakultě stavební VŠB-TUO byly vyhodnocovány některé možné přístupy, závěry jsou nastíněny v příspěvku.

2 Základní charakteristiky

Beton samotný se vyznačuje následujícími vlastnostmi:

- značnou proměnlivostí charakteristik (není izotropní),
- velmi nízkou pevností při tahovém namáhání (jednotky MPa i méně),
- výrazně vyšší pevností při tlakovém namáhání (desítky až stovky MPa)

[1]Jiří Brožovský, Ing., Vysoká škola báňská — Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, Katedra konstrukcí, Ludvíka Podéště 1875, 708 33 Ostrava — Poruba, Slezsko, Česká republika, tel.: (+42069) 732 1321, e-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

- nezanedbatelně nelineární odezvou na tlakové zatížení,
- změnou vlastností v závislosti na čase (dotvarování, smršťování) a dalších faktorech (parametry okolního prostředí atd.),
- kvazikřehkým chováním po překročení meze pevnosti,

Diskutujme nyní některé z uvedených vlastností podrobněji.

Beton jistě není homogenním ani izotropním materiálem. To vyplývá z jeho podstaty a při tvorbě matematických modelů to brání možnosti jít „hlouběji“ do struktury materiálu. Přesný model dokonale popisující chování vybraného kousku materiálu je k ničemu, když už o několik centimetrů dále jsou vlastnosti zcela jiné...

Velmí rozdílné pevnosti v tahu a tlaku vyžadují detailní studium chování betonu při různých stavech napjatosti. V této oblasti již bylo učiněno velmi mnoho a je k dispozici řada dat vyzískaných z experimentů (viz např. [5]). Totéž lze uvést k odezvě na zatížení.

Protože procesy probíhajících mezi složkami betonu jsou dlouhodobé, dochází ke změnám vlastností betonu po velmi dlouhou dobu po zabudování do konstrukce. Tyto změny jsou fenomenologicky popisovány jako dotvarování a smršťování a existuje řada teorií k jejich popisu. Nelze také pominout změny vlastností vyplývající z účinků okolního prostředí, například karbonatace betonu.

Některé z negativních vlastností betonu lze odstranit kombinací s dalšími materiály. Běžným postupem je vložení (zpravidla ocelové) výztuže, tj. vytvoření železobetonu. Tak se výrazně zvýší únosnost výsledného materiálu při tahovém namáhání, ale zavedou se další problémy, zejména otázka míry spolupůsobení mezi betonem a výztuží nebo změna vlastností výztuže v čase (např. vlivem koroze výztuže).

Jinou možností je přidání vláken (ocelových nebo jiných). Tak lze dosáhnout zlepšení některých pevnostních charakteristik, ale současně vzniká nutnost detailního experimentálního ověření vlastností materiálu, neboť jeho chování může být dosti odlišné od „obyčejného“ betonu.

Není také možné nezmínit další obtíže, zejména tzv. rozměrový efekt [1], protože nelze přehlédnout, že z betonu jsou budovány, mimo běžných konstrukcí, také konstrukce mimořádných rozměrů (mosty, hráze, aj.).

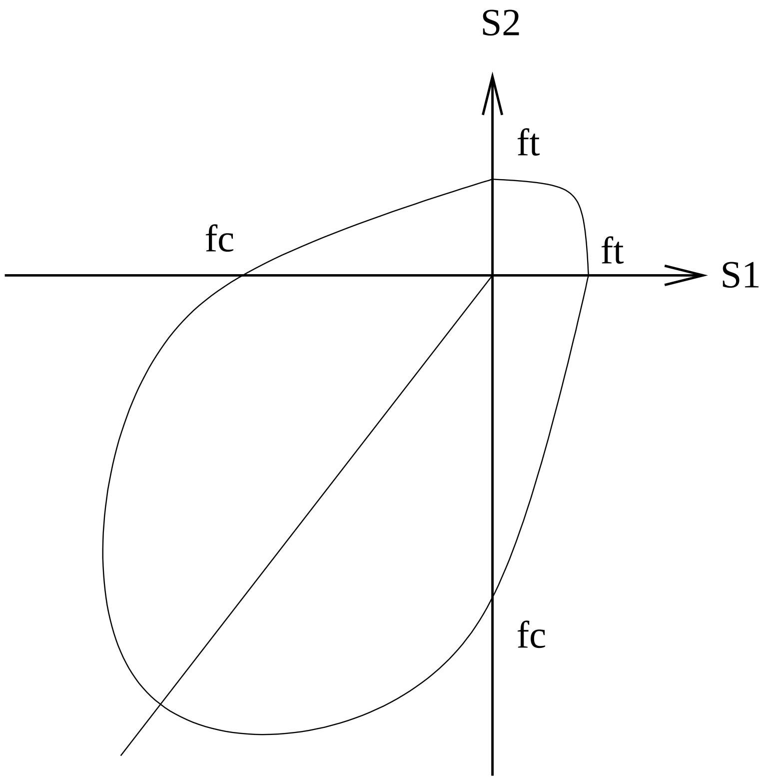
3 Možné přístupy výpočtu

3.1 Pružněplastický výpočet

Výhodou tohoto přístupu je jeho relativní jednoduchost a dobrá probádanost. Například při použití podmínky plasticity a porušení betonu vypracované Chenem [4] lze docílit velmi dobrého vystižení chování betonu ve stavu před porušení, a to zejména v případě tlakového namáháhí.

V tomto konkrétním případě dosti záleží na použitém způsobu zpevnění (Chen doporučuje víceparametrické zpevnění).

Po porušení je možné předpokládat ideálně plastické chování materiálu, což sice neodpovídá realitě, ale je z výpočetního hlediska snadné a navíc omezuje problémy s lokalizací.



Obrázek 1: Ilustrace podmínky plasticity podle Chena (tvar pro rovinnou úlohu)

Protože podmínka porušení podle Chena oproti experimantálním výsledkům do jisté míry podhodnocuje pevnost betonu v tahu (v tého části je popsána parabolou) a naopak nadhodnocuje pevnost v tlakové oblasti je vhodné k identifikaci porušení použít některou výstižnější podnínku, například Kupferovu [5], která je podložena rozsáhlými experimantálními měřeními.

Pro nezanedbatelnou podmnožinu úloh lze takový model považovat za adekvátní, mj. i pro jeho poměrně malou výpočetní náročnost (ve srovnání s jinými přístupy). Zejména pro případy betonových prvků, které jsou vystaveny především tlakovému namáhání, je tento model velmi výhodný.

Naopak ne příliš vhodný je v případech, kdy dochází k intenzívnímu rozvoji tahových trhlin.

3.2 Přístupy založené na modelu rozetřených trhlin

Model rozetřených trhlin je velmi často využíván [3]. Materiál je pak uvažován jako ortotropní (nebo anizotropní), přičemž materiálové vlastnosti v jednotlivých směrech se řídí různými kritérii. Někteří autoři doporučují určovat okamžik inicializace trhlin s využitím poznatků lomové mechaniky, jiní doporučují vycházet z obvyklých pevnostích kritérií (naplnění podmínky porušení).

Po vzniku trhlin se předpokládá odlehčení materiálu se všemi souvisejícími, běžně známými, problémy (zejm. lokalizace, stress locking), pro jejichž řešení se často, alespoň v omezené míře, využívá poznatků lomové mechaniky (např. využití lomové energie v Bažantově modelu pásu trhlin).

Příklad takového postupu je diskutován například v [2].

3.3 Kombinovaný přístup

Jako výhodná se jeví (často také doporučovaná) kombinace použití pružněplastického přístupu pro popis chování „neporušeného“ betonu[2] a modelu rozetřených trhlin pro popis chování po inicializaci trhlin.

Tento postup byl také vybrán na našem pracovišti k implementaci do programu pro vyšetřování železobetonových konstrukcí.

Předpokládá se použití podmínky plasticity podle Chena, s následným víceparametrickým zpevněním (hodláme ověřit více variant a po porovnání s experimantálními daty vybrat nejvhodnější).

Otázkou zůstává volba kritéria pro stanovení inicializace trhlin („podmínky porušení“), zatím se předpokládá použití podmínky porušení podle Chena. Chování materiálu po porušení pak bude modelováno stejně jako v [2], tj. bude použit Bažantův model pásu trhlin. Později se předpokládá zvážení modernějšího postupu.

4 Další aspekty výpočtu

Ve výše nastíněném postupu není uvážena řada v úvodu uvedených významných faktorů.

Zejména jde o rozměrový efekt, zejména o jeho statistickou složku, tento faktor bude zapracován v další fázi (u konstrukcí běžných rozměnů není významný, ale program má být využíván i pro rozsáhlé konstrukce).

Má-li být výpočtový model dostatečně výstižný, musí respektovat také časově závislé procesy v betonu. Pro stanovení dotvarování a smršťování betonu existuje řada teorií, výběr nejvhodnější a její zapracování do výpočtového programu bude provedeno až v pozdějších fázích prací.

Otázkou je, zda vlivy, které na železobetonou konstrukcí za dobu její existence působí (zatížení, parametry prostředí — vlhkost, agresívní látky v ovzduší nebo chemiské přípravky u mostů), lze považovat z deterministické veličiny nebo zda by s nimi nemělo být nakládáno jako z veličinami stochastickými.

Dalším problémem, důkladněji zřejmě dosud neřešeným, je vliv opakovaného zatížení na parametry materiálu. Autorovi však nejsou dostupné výsledky žádných komplexnějších experimentů, které by se touto oblastí zabývaly.

[2]Nevratné jevy v betonu vznikají již velmi záhy a projevují se právě nelineárních chováním, proto lze jen stěží hovořit o neporušeném betonu.

5 Závěr

Pro výpočty železobetonových konstrukcí byl rozpracován výpočtový program AFEM založený na metodě konečných prvků. Tento program vychází z programu `stěna`, který byl prezentován v předchozím ročníku Problémů lomové mechaniky.

Vzhledem k tomu, že bylo třeba pojmout problematiku poněkud obecněji [3] a vzhledem k nedostatečnému počtu pracovníků, nejsou není program dosud ve stavu, který by si autor přál (práce mají oproti předpokladům skluz asi šest měsíců).

V programu se předpokládá aplikace nastíněného modelu materiálu, který je kombinací pružněplastické teorie s modelem rozetřených trhlin.

Postupně se předpokládá doplnění programu o vliv časově závislých jevů.

Teorie implemantované v programu předpokládají aplikaci na „běžný“ beton, v případě použití pro vyšetřování speciálních nebo upravených materiálů (vysokopevnostní betony, betony s netradičními pojivy, betony s mikrovýztuží nebo speciálnímo druhy kameniva) by bylo nutno provést verifikaci výpočtového modelu podle dostupných výsledků experimantálního vyšetřování příslušných materiálů.

Poděkování

Grantovému projektu GA ČR 103/02/0990.

Literatura

[1] Bažant, Z. P., Planas J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials, CRC Press, Boca Raton, 1998

[2] Brožovský, J.: Static Analysis of Reinforced Concrete Walls with Respect of Non-Linear Material Behaviour, Conference of Young Scientifists, NIIZB, Moskva, 2002

[3] Červenka, V. Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete, ACI Journal, Titl.82-82, 1985

[4] Chen, W.F., Ting, E.C. Constitutive Models For Concrete Structures, Journal of the Eng. Mech. Div. Vol. 106, No. EM6, 1980

[5] Kupfer H., Hilsdorf H.,K., Rüsch H. Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress, Journal ACI, Proc. V.66, č. 8, 1969, str. 656–666

[6] Informace o programu AFEM: `http://home.vsb.cz/~bro12/afem-text.html`

[3] Program je navržen tak, aby perspektivně umožňoval provádění rozsáhlých časově závislých a eventuelně i spolehlivostních výpočtů.

URČENÍ T-NAPĚTÍ PRO OBECNĚ ORIENTOVANOU TRHLINU S VRCHOLEM NA ROZHRANÍ DVOU ELASTICKÝCH MATERIÁLŮ

Roman Gröger[1]

Abstrakt: Pro porušování vrstvených materiálů jsou rozhodující hodnoty lomově-mechanických parametrů, jako je zobecněný faktor intenzity napětí a T napětí. Předložená práce se zabývá integrálním způsobem výpočtu T napětí pro trhlinu libovolně orientovanou vzhledem k rozhraní tvořeneným tuhým spojením dvou elastických materiálů s obecně různými materiálovými vlastnostmi. Je sledován vliv materiálových parametrů a orientace trhliny na hodnotu T napětí určenou pomocí navrženého integrálního algoritmu na základě platnosti principu superpozice mezi dvěma nezávislými zátěžnými stavy. Ukázána je také přímá metoda výpočtu T napětí, přičemž je diskutována míra shody obou způsobů řešení. Značná pozornost je věnována vlivu rozdílnosti Poissonových čísel obou materiálů na hodnoty T napětí. Z praktického hlediska umožňují výsledky této práce přesnější odhad lomově-mechanického chování kompozitních materiálů tvořených křehkou matricí.

1 Úvod

Při porušování kompozitních materiálů často dochází k situaci, kdy únavová trhlina dosáhne rozhraní mezi vláknem a matricí. V tomto okamžiku závisí její další růst na napěťových poměrech v okolí jejího kořene, přičemž za jistých podmínek je možné také zastavení trhliny na rozhraní mezi oběma materiály. Z praktického hlediska jsou tato rozhraní velmi žádoucí a tvoří překážky k šíření trhlin.

Budeme-li popis pole napětí realizovat čistě matematicky, je pro úvahy o stabilitě trhliny nezbytný výpočet lomově-mechanických parametrů, které jsou závislé na geometrii, okrajových podmínkách a „síle" singularity v kořeni trhliny kvantifikované tzv. *exponentem singularity napětí* p, resp. vlastním číslem $\lambda = 1 - p$. Uvážíme-li pro praktický výpočet pouze singularity typu r^{-p} pro $0 \leq p < 1$, kde r je radiální vzdálenost od kořene trhliny, bude analytický popis pole napětí tvořen nejvýše dvěma singulárními členy a jedním členem nesingulárním [3]. Jedinými neznámými parametry v tomto rozvoji pak zůstávají zobecněné faktory intenzity napětí H, příslušející konkrétním exponentům singularity napětí, a T napětí vystupující v napěťovém členu nezávislém na radiální souřadnici. K určení těchto parametrů je nezbytný numerický výpočet celého tělesa s předepsanými okrajovými podmínkami. Ze známého pole napětí, popř. deformace, se pak některou přímou metodou anebo integrálním přístupem určí hodnoty obou parametrů.

[1]Roman Gröger, Ing., Ústav fyziky materiálů, Akademie Věd České republiky v Brně, Žižkova 22, 616 62 Brno, tel. 05 / 3229 0351, fax: 05 / 4121 8657, e-mail: groger@ipm.cz a Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýství, Vysoké učení technické v Brně.

Jelikož v případě trhliny s kořenem na rozhraní mezi dvěma obecně různými materiály není exponent singularity napětí roven 0,5, není také možné použít klasického Irwinova kritéria stability $K < K_C$, kde K je faktor intenzity napětí a K_C lomová houževnatost. Z tohoto pohledu je k hodnocení stability takového obecného koncentrátoru napětí nutné formulovat vhodné kritétium založené např. na Sihově koncepci hustoty deformační enegie [8], kritériu maximálního obvodového napětí MTS, popř. dalších kritériích vycházejících např. ze střední hodnoty napětí σ_{yy} určené do jisté vzdálenosti před čelem trhliny. V našich podmínkách se tato vzdálenost obvykle vztahuje ke střední velikosti zrna, což umožňuje zakomponovat do výpočtu také jistý efekt mikrostruktury materiálu.

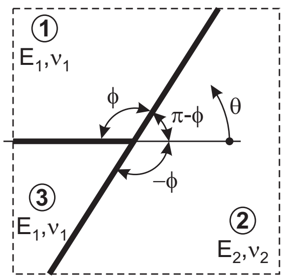
Tato práce shrnuje dosavadní poznatky a zkušenosti s numerickým výpočtem lomově-mechanických parametrů, zejména pak T napětí, na základě dříve navrženého integrálního algoritmu, z pohledu výpočtáře podobného jako je klasické určení J integrálu. V první části článku je nastíněno analytické řešení pole napětí v okolí kořene trhliny končící na bimateriálovém rozhraní, a to pro libovolný sklon lomových ploch vzhledem k rozhraní obou materiálů. Dále je ukázán přímý přístup pro určení T napětí za předpokladu, že je exponent singularity napětí roven 0,5 a také modifikovaná verze tohoto postupu pro obecné hodnoty exponentu singularity napětí ležící v rozmezí $0 < p < 1$. V druhé části příspěvku je provedeno podrobné analytické odvození určení T napětí pomocí křivkového integrálu, a to přepočtem z tzv. M integrálu, který je definován pomocí principu superpozice mezi dvěma nezávislými zátěžnými stavy.

2 Analytický popis pole napětí v okolí kořene trhliny

Při odvození analytického popisu pole napětí [2],[4] v okolí trhliny s kořenem na rozhraní dvou materiálů vyjdeme z biharmonické rovnice

$$\Delta\Delta\Phi_i = 0 \quad , \quad \text{tj.} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{r}^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial\Phi_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2\Phi_\mathrm{i}}{\partial\theta^2}\right) = 0 \ , \tag{1}$$

kde Δ je Laplaceův operátor, Φ_i je libovolná funkce splňující shora uvedenou rovnici a r,θ jsou obvyklé polární souřadnice. Uvažujme model složený ze tří oblastí označených jako $i = 1,2,3$ (Obr. 1), kde oblast 1 má stejné materiálové charakteristiky jako oblast 3 a obecně rozdílé vlastnosti jako oblast 2.



Obrázek 1: Obecně orientovaná trhlina s kořenem na rozhraní dvou elastických materiálů.

V našem případě hledejme řešení rovnice (1) ve tvaru:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\lambda_k+1} F_{ik}(\theta,\lambda_k) \ , \tag{2}$$

kde λ je vlastní číslo, přičemž exponent singularity napětí je v relaci s λ vztahem $p = 1-\lambda$.

Budeme hledat tzv. *limitní analytické řešení*, které bude zahrnovat pouze první první člen rozvoje (2). Dosadíme-li nyní tento první člen do biharmonické rovnice (1), obdržíme po jednoduchých úpravách obyčejnou diferenciální rovnici 4. řádu pro výpočet úhlových funkcí $F_i(\theta)$:

$$F_i^{(4)} + 2(1+\lambda^2)F_i''(\theta) + (1-\lambda^2)^2 F_i(\theta) = 0 \ , \tag{3}$$

jejíž charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\pm i(\lambda+1)\theta$ a $\pm i(\lambda-1)\theta$. Řešení rovnice (3) pak vyhovuje vlastní funkce F_i tvaru:

$$F_i(\theta,\lambda) = a_i \sin{(\lambda+1)\theta} + b_i \cos{(\lambda+1)\theta} + c_i \sin{(\lambda-1)\theta} + d_i \cos{(\lambda-1)\theta} \ , \tag{4}$$

kde a_i,b_i,c_i,d_i jsou neznámé konstanty. Celkově máme tedy 13 neznámých parametrů, tj. a_i,b_i,c_i,d_i pro $i = 1,2,3$ a vlastní číslo λ.

Dosadíme-li nyní řešení (4) do prvního členu rozvoje (2) a pak dále do obvyklých vztahů pro složky napětí v polárním souřadném systému:

$$\sigma_{irr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta^2} \quad , \quad \sigma_{i\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} \quad , \quad \sigma_{ir\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial \theta} \ , \tag{5}$$

získáme vztahy pro popis pole napětí v okolí kořene trhliny ve tvaru:

$$\begin{aligned} \sigma_{irr} &= Ar^{\lambda-1}\left[F_i'' + (\lambda+1)F_i\right] \\ \sigma_{i\theta\theta} &= Ar^{\lambda-1}\left[\lambda(\lambda+1)F_i\right] \\ \sigma_{ir\theta} &= Ar^{\lambda-1}\left[-\lambda F_i'\right] \ , \end{aligned} \tag{6}$$

kde A je další neznámý parametr, jehož význam a metodika určování bude podrobněji rozebrána v dalším textu. Využitím zobecněného Hookeova zákona a následnou aplikací rovnic kompatibility lze pak získat také vztahy pro posuvy v okolí kořene trhliny:

$$\begin{aligned} u_{ir} &= A\frac{r^\lambda}{2\mu_i}\left\{-(\lambda+1)F_i + (\lambda\omega_i)^{-1}\left[F_i'' + (\lambda+1)^2 F_i\right]\right\} \\ u_{i\theta} &= A\frac{r^\lambda}{2\mu_i}\left\{-F_i' + (\lambda(\lambda-1)\omega_i)^{-1}\left[F_i''' + (\lambda+1)^2 F_i'\right]\right\} \ , \end{aligned} \tag{7}$$

kde μ_i je modul pružnosti ve smyku materiálu příslušející oblasti i, $\omega_i = 1+\nu_i$ pro rovinnou napjatost, popř. $\omega_i = 1/(1-\nu_i)$ pro rovinnou deformaci, ν_i je Poissonovo číslo oblasti i.

Vyjděme nyní z předpokladu, že lomové plochy jsou nezatížené, tzn. okrajové podmínky na lících trhliny jsou tvaru:

$$\sigma_{1\theta\theta}(r,\pi) = \sigma_{1r\theta}(r,\pi) = \sigma_{3\theta\theta}(r,-\pi) = \sigma_{3r\theta}(r,-\pi) = 0 \quad . \tag{8}$$

Dále požadujme spojitost složek napětí a posunutí přes rozhraní, tzn. splnění dalších 8 podmínek ve tvaru:

$$\begin{aligned} u_{1r}(r,\pi-\phi) &= u_{2r}(r,\pi-\phi) & \sigma_{1\theta\theta}(r,\pi-\phi) &= \sigma_{2\theta\theta}(r,\pi-\phi) \\ u_{1\theta}(r,\pi-\phi) &= u_{2\theta}(r,\pi-\phi) & \sigma_{1r\theta}(r,\pi-\phi) &= \sigma_{2r\theta}(r,\pi-\phi) \\ u_{3r}(r,-\phi) &= u_{2r}(r,-\phi) & \sigma_{3\theta\theta}(r,-\phi) &= \sigma_{2\theta\theta}(r,-\phi) \\ u_{3\theta}(r,-\phi) &= u_{2\theta}(r,-\phi) & \sigma_{3r\theta}(r,-\phi) &= \sigma_{2r\theta}(r,-\phi)\ , \end{aligned} \tag{9}$$

Zapišme nyní těchto 12 podmínek (8), (9) v maticovém tvaru jako

$$[E(\lambda)]_{12\times 12}\{X\} = \{0\}\ , \tag{10}$$

kde $\{X\}$ je vektor neznámých konstant $a_1,b_1,\ldots,d_3$. Pro netriviální řešení tohoto systému je nutné, aby

$$\det\left[E(\lambda)\right] = 0\ . \tag{11}$$

Tato podmínka vede na rovnici pro určení vlastních čísel λ, které je v obecném případě třeba stanovit numericky. Navíc, vzhledem k tomu, že napěťové členy s $\lambda \leq 0$ způsobují nekonečně velkou energii napjatosti a členy s $\lambda > 1$ vymizí v nejbližším okolí kořene trhliny, tj. pro malá r, omezíme se pouze na řešení v rozsahu $0 < \lambda \leq 1$. Nyní ale nelze určit zbývajících 12 konstant $a_1,b_1,\ldots,d_3$ ze systému (10) přímo. Zvolíme-li některou z konstant jako jednotkovou, označme ji A, a ostatní konstanty určíme jako poměr k této hodnotě, redukuje se systém po eliminaci některého z řádků na systém 11 rovnic pro 11 neznámých poměrů $a_1/A,b_1/A,\ldots,d_3/A$. Nutno poznamenat, že parametr A je v obecném případě třeba stanovit numericky, a to na tělese konkrétní geometrie s předepsanými okrajovými podmínkami.

Dosadíme-li nyní závislosti $a_1(A),b_1(A),\ldots,d_3(A)$ do funkce (2) a pak dále do vztahů (6),(7) a použijeme-li relaci $A = H/\sqrt{2\pi}$, je možné zapsat analytické řešení v okolí libovolně orientované trhliny s kořenem na rozhraní dvou materiálů v závislosti na tomto parametru H, tzv. *zobecněném faktoru intenzity napětí*. Při řešení konkrétních problémů praxe se pak tento parametr používá jako jeden z lomově-mechanických parametrů příslušejících napěťovým členům singulárním vzhledem k radiální souřadnici r.

V případě, kdy řešením rovnice (11) je také vlastní číslo $\lambda = 1$, jsou příslušné složky napětí nesingulární vzhledem k r. V takovém případě používáme označení $T = 2A$ a vztahy pro složky napětí, resp. posunutí, jsou pak závislé právě na této hodnotě T nazývané jako *T napětí*.

Oba tyto parametry mají bezprostřední vliv na stabilitu trhliny, a proto je jejich určování věnována celosvětově značná pozornost. Konkrétní algoritmus určování jak zobecněného faktoru intenzity napětí H založený na platnosti Bettiho recipročního teorému uvádí mé pojednání [6]. Metodice určování T napětí jsou pak věnovány následující kapitoly tohoto příspěvku.

3 Metody výpočtu T napětí

3.1 Přímý způsob výpočtu T napětí

Přímý model výpočtu T napětí využívá složek napětí, popř. posunutí před kořenem trhliny, podél lomových ploch, popř. pod obecným úhlem. Z těchto hodnot se vybere jistá oblast, na které se provede lineární interpolace. Hledaná hodnota T napětí se pak získá extrapolací získané závislosti do kořene trhliny, tj. jako kvocient regresní přímky. Vyčerpávající přehled o nejrůznějších způsobech přímého určení T napětí uvádí Ayatollahi [1]. Z praktického hlediska jsou hodnoty získané jednotlivými přímými přístupy vcelku srovnatelné.

Mějme dány složky napětí σ_{rr},$\sigma_{\theta\theta}$ před kořenem trhliny, tj. pro $0 \leq r \leq W$ a $\theta = 0$, kde W udává zbytkový průřez, tzv. *ligament*. Potom lze ukázat, že v homogenním případě lze použít následující způsob přímého výpočtu T napětí:

$$T = \lim_{r \to 0} (\sigma_{2rr} - \sigma_{2\theta\theta})|_{\theta=0} \ , \tag{12}$$

kde σ_{2rr},$\sigma_{2\theta\theta}$ jsou složky napětí určené před kořenem trhliny – viz. Obr. 1 (v našem případě pro materiál 2). Vzhledem k tomu, že napětí v uzlech ležících v bezprostřední blízkosti kořene trhliny jsou zatížena značnou chybou, je nezbytné vynechat jisté okolí kořene trhliny. Podobně je nutné odstranit z výpočtu body ležící v takové vzdálenosti od kořene trhliny, v níž je vliv napěťových členů nesingulárních vzhledem k r podstatný a jež jsme v limitním analytickém popisu pole napětí zanedbali. V konečném důsledku se tak lineární regrese bude odehrávat pouze na jistém rozmezí $r_\varepsilon \leq r \leq r_{max}$. Jak je zřejmé, určení právě těchto limitních mezí r_ε a r_{max} je problematické a vyžaduje notnou dávku zkušenosti.

Prezentovaný způsob výpočtu (12) byl navržen pro homogenní materiál, u něhož dojde k eliminaci všech singulárních napěťových členů Williamsova rozvoje. V případě trhliny s kořenem na rozhraní dvou materiálů s různými elastickými parametry už není exponent singularity napětí konstantní, ale mění se v rozmezí $0 < p < 1$. V takovém obecném případě už ale nedojde při použití vztahu (12) automaticky k eliminaci všech singulárních napěťových členů a z matematického hlediska je nezbytné tento vliv zakomponovat do přímého modelu výpočtu. Vyjdeme-li tedy z analytického řešení a provedeme diferenci $(\sigma_{2rr} - \sigma_{2\theta\theta})|_{\theta=0}$, je možné ukázat, že T napětí lze v tomto obecném případě stanovit vztahem

$$T = \lim_{r \to 0} \left\{ (\sigma_{2rr} - \sigma_{2\theta\theta})|_{\theta=0} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{n} H_k \lambda_k r^{\lambda_k - 1} \left[b_2^{(k)}(\lambda_k + 1) + d_2^{(k)}(\lambda_k - 1) \right] \right\} , \tag{13}$$

kde H_k je zobecněný faktor intenzity napětí, $b_2^{(k)}$,$d_2^{(k)}$ jsou konstanty závislé na konkrétním vlastním čísle λ_k a orientaci trhliny vzhledem k rozhraní a n je počet reálných vlastních čísel v rozmezí $0 < \lambda_k < 1$, které jsou řešením systému uvedeného v kapitole 2. Stejně jako T napětí lze i zobecněný faktor intenzity napětí H_k stanovit pro konkrétní konfiguraci numericky, a to opět buď na základě přímého výpočtu nebo pomocí integrálního algoritmu založeného na teorému reciprocity prací – podrobněji viz. [6].

3.2 Integrální algoritmus výpočtu T napětí

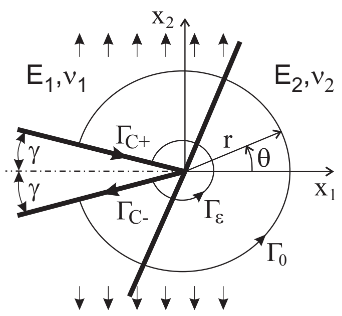
3.2.1 Zavedení M integrálu

Zabývejme se nyní integrálním způsobem výpočtu T napětí založeném na dřívější práci Sládek *et al.* [11] pro trhliny v bimateriálovém rozhraní. Vyjděme z principu superpozice mezi dvěma zátěžnými stavy označenými jako A, kterým je modelovaná úloha s neznámým T napětím a B představujícím doplňkovou úlohu, která splňuje stejné okrajové podmínky jako řešená úloha A. Na základě znalosti definice J integrálu lze pak definovat M integrál jako

$$M = J^{A+B} - J^{A} - J^{B} \tag{14}$$

kde J^{A+B} je J integrál určený ze součtu složek napětí a přetvoření pro úlohu A a B. Za předpokladu, že je J integrál nezávislý na integrační cestě, je také M integrál nezávislý na integrační cestě. Dosazením jednotlivých členů do vztahu (14) lze podle [11] získat pro uzavřenou integrační cestu křivkový integrál:

$$\oint_{\Sigma} \left(\sigma_{ij}^{A} \varepsilon_{ij}^{B} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{A} u_{i,1}^{B} - \sigma_{ij}^{B} u_{i,1}^{A} \right) n_j \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad . \tag{15}$$



Obrázek 2: Integrační cesta pro výpočet M integrálu podle (16).

Zvolme integrační cestu Σ tak, jak je ukázáno na Obr. 2, tzn. $\Sigma = \Gamma_0 + \Gamma_{C+} - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{C-}$. Segment Γ_0 musí být umístěn v dostatečné vzdálenosti od kořene trhliny, kde je vliv singularity na pole napětí zanedbatelný. Naopak integrační cesta Γ_{ε} leží v limitní blízkosti kořene trhliny. V dalším textu bude ukázáno, že právě tuto integraci je možné vyjádřit analyticky, na základě vztahů pro pole napětí a deformace v okolí kořene trhliny doplňkové úlohy B. Za předpokladu, že jsou lomové plochy nezatížené, vymizí integrace přes Γ_{C+} a Γ_{C-}. Integrál podél uzavřené křivky Σ se tak zjednoduší na identitu

$$M = \int_{\Gamma_0} \left(\sigma_{ij}^{A} \varepsilon_{ij}^{B} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{A} u_{i,1}^{B} - \sigma_{ij}^{B} u_{i,1}^{A} \right) n_j \mathrm{d}\Gamma = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{r \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \left(\sigma_{ij}^{A} \varepsilon_{ij}^{B} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{A} u_{i,1}^{B} - \sigma_{ij}^{B} u_{i,1}^{A} \right) n_j \mathrm{d}\Gamma \quad , \tag{16}$$

kde n_j je j-tá složka kladné vnější normály integrační cesty a člen $u_{i,1}$ je tenzorovým vyjádřením parciální derivace $\partial u_i / \partial x_1$.

Levá strana vztahu (16) se v obecném případě určí numericky, a to jednak z hodnot určených metodou konečných nebo hraničních prvků (členy s indexy A), a také z odvozeného analytického řešení doplňkové úlohy (členy s indexy B) – viz. příloha.

3.3 Odvození relace mezi M integrálem a T napětím

Jak už bylo předesláno dříve, umožňuje pravá strana identity (16) analytické vyjádření M integrálu, a to pouze na základě znalosti řešení doplňkové úlohy B. Označme indexem ^{T} složky napětí a deformace příslušející druhému členu rozvoje (2) nezávislé na radiální souřadnici a obsahující T napětí – viz. (6),(7). Potom lze pravou stranu rovnice (16) pro tento člen ekvivalentně zapsat jako

$$M = \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} (\sigma_{ik}^{(a)B} \varepsilon_{ik}^{(a)T} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(a)T} u_{i,1}^{(a)B} - \sigma_{ij}^{(a)B} u_{i,1}^{(a)T}) n_j \mathrm{d}\Gamma \ , \tag{17}$$

kde $\sigma_{ij}^{(a)T} = C^{(a)} T \delta_{1i} \delta_{1j}$ pro oblast $a = 1{,}2{,}3$, viz. Obr. 1. Za předpokladu stavu rovinné deformace lze na základě zobecněného Hookeova zákona použít následující transformaci:

$$\varepsilon_{ij}^{(a)T} = \frac{1+\nu_a}{E_a} (\delta_{1i}\delta_{1j} - \nu_a \delta_{ij}) \sigma_{11}^{(a)T} \ . \tag{18}$$

Parciální derivace posuvů vzhledem k horizontální souřadnici x_1 jsou potom ve tvaru:

$$u_{i,1}^{(a)T} = u_{1,1}^{(a)T} \delta_{1i} = \varepsilon_{11}^{(a)T} \delta_{1i} \quad . \tag{19}$$

Využitím rovnice (18) a (19) lze derivaci $u_{1,1}^{(a)B}$ zapsat jako

$$u_{1,1}^{(a)B} = \varepsilon_{11}^{(a)B} = \frac{1+\nu_a}{E_a} (\sigma_{11}^{(a)B} - \nu_a \sigma_{kk}^{(a)B}) \quad . \tag{20}$$

Dosazením vztahů (18), (19), (20) do rovnice (17) vymizí první dva členy integrandu a výpočet M integrálu se tak zjednoduší na tvar:

$$M = -\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \sigma_{1j}^{(a)B} \varepsilon_{11}^{(a)T} n_j \mathrm{d}\Gamma \quad . \tag{21}$$

Po dosazení složek napětí $\sigma_{1j}^{(a)B}$ uvedených v příloze ve vztahu (39) vymizí také radiální souřadnice r a integrace probíhá podobným způsobem, jak naznačuje zápis (35), tzn. po segmentech příslušejících postupně jednotlivým oblastem a. Provedením naznačených integrací je pak možné získat hledanou relaci mezi M integrálem a T napětím ve tvaru:

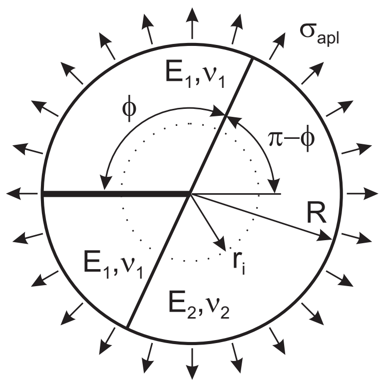
$$\begin{aligned} M = 2Tfc_{12}c_{33} \frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} \Bigg\{ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \Bigg[{C^{(1)}}^2 (\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi) + \ldots \\ \ldots + {C^{(3)}}^2 (\pi - \phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi) \Bigg] \frac{1-\nu_2^2}{E_2} {C^{(2)}}^2 \pi \Bigg\} \quad , \end{aligned} \tag{22}$$

kde jednotlivé koeficienty v tomto vztahu jsou pobrobně rozepsány v příloze.

V obecném případě rozdílných materiálových charakteristik obou materiálů je jak M integrál, tak i T napětí komplexní a je nutná separace jejich reálných a imaginárních částí. Nicméně lze ukázat, že obě části mají pro libovolný sklon trhliny ϕ a kombinaci materiálových parametrů shodnou velikost. Ve speciálním případě trhliny kolmé k rozhraní se relace (22) transformuje na vztahy publikované v [5]. Podobně v případě trhliny skloněné do rozhraní, tj. pro $\phi = \pi$ se obecný vztah zjednoduší na relaci uvedenou v práci [11].

4 Modelová úloha

Pro výpočet T napětí byla zvolena modelová úloha, kterou tvořila kruhová oblast poloměru $R = 10$ mm rozdělená na dvě rovnocenné poloviny rozhraním, přičemž vzniklé dvě oblasti byly obecně popsány rozdílnými materiálovými parametry. Trhlina vycházela z volného povrchu modelu a končila na rozhraní mezi oběma materiály tak, že úhel mezi lícemi trhliny a horní polovinou rozhraní byl označen jako ϕ – Obr. 3.

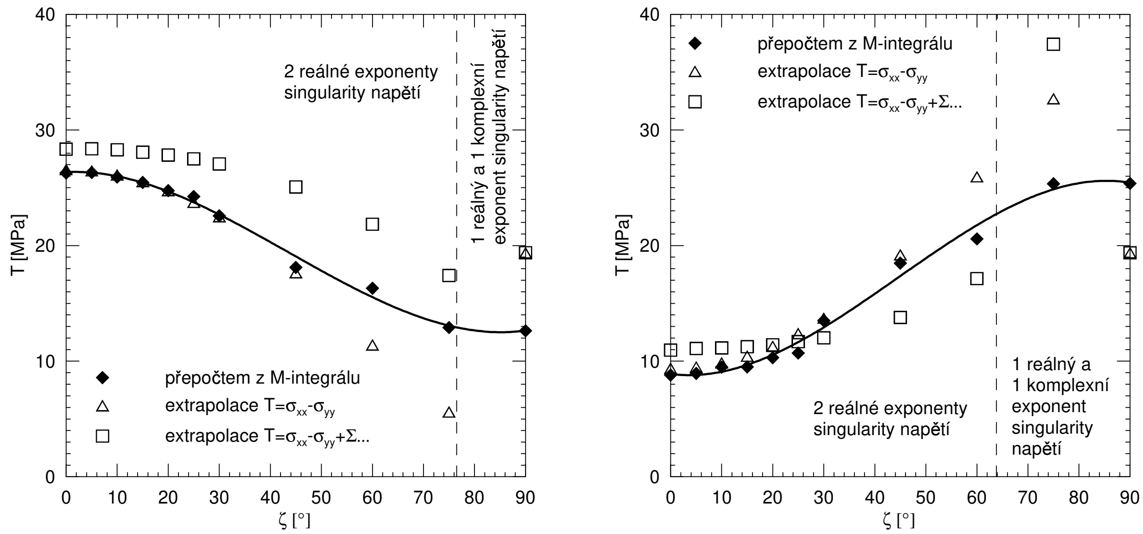


Obrázek 3: Modelové těleso pro výpočet T napětí.

Na rozhraní byly předepsány podmínky spojitosti složek posunutí a napětí. Model byl zatížen podél celého obvodu vnějším radiálním napětím $\sigma_{apl} = 10$ MPa, přičemž modul pružnosti ve smyku jednotlivých oblastí byl volen buď 2.10^5 MPa nebo 4.10^5 MPa. Integrační cesta pro numerický výpočet M integrálu byla zvolena jako kruhová s poloměrem $r_i = 5$ mm a tvořilo ji 40 integračních bodů. Numerický výpočet integrálu byl realizován pomocí dvoubodové integrační formule. Výpočet T napětí přímou metodou byl proveden na oblasti $1 < r < 5$ [mm] před kořenem trhliny.

Na Obr. 4 je vidět průběh T napětí určeného extrapolačními postupy (12), (13), a také přepočtem z M integrálu (22) v závislosti na úhlu ζ, který udává odklon trhliny od kolmice k rozhraní. Tedy např. pro trhlinu kolmou k rozhraní je $\zeta = 0$ a pro trhlinu ležící v rozhraní je $\zeta = 90$. Pro poměr Youngových modulů $E_1/E_2 = 2$ a shodná Poissonova čísla $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ existují dva reálné exponenty singularity napětí, tj. dvě reálné vlastní čísla λ, přibližně pro $\zeta < 7630'$. Pro opačný poměr $E_1/E_2 = 0{,}5$ existují dva reálné exponenty singularity napětí přibližně do $\zeta < 6348'$. Nad tyto meze vyhovuje analytickému řešení pouze jeden reálný exponent singularity napětí, přičemž druhý exponent je komplexní. V odborných kruzích zatím panuje silný nesoulad v názorech na to, jaký fyzikální význam mají tyto komplexní členy, a proto se v dalších úvahách omezíme pouze na reálné exponenty singularity napětí.

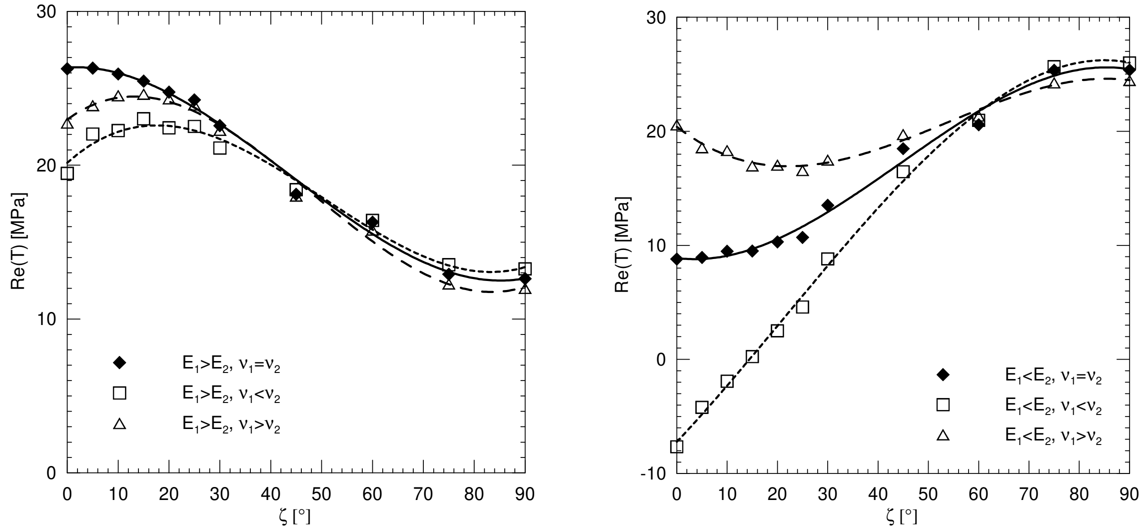
Z teorie podané v kapitole 3.1 vyplývá, že v případě, kdy je exponent singularity napětí různý od 0,5 není z matematického hlediska možné použít přímého přístupu (12). V takovém případě se totiž automaticky neeliminuje vliv singulárních napěťových členů a je tedy nutné toto zohlednit v modelu výpočtu T napětí. Tato modifikace pak vede na rovnici (13), která pro trhlinu v homogenním prostředí splyne s rovnicí (12). Jak je ale vidět ze získaných průběhů T napětí (Obr. 4), poskytuje jednoduchý přímý způsob výpočtu (12)



a) $E_1/E_2 = 2, \nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$

b) $E_1/E_2 = 0{,}5, \nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$

Obrázek 4: Závislost T napětí určeného integrálně a různými diferenčními modely na orientaci trhliny pro různé poměry Youngových modulů obou materiálů. Úhel ζ udává sklon trhliny od kolmice k rozhraní, tj. $\zeta = 0$ pro trhlinu kolmou k rozhraní a $\zeta = 90$ odpovídá trhlině ležící v rozhraní.



a) $E_1/E_2 = 2$

b) $E_1/E_2 = 0{,}5$

Obrázek 5: Závislost integrálně stanoveného T napětí na orientaci trhliny pro různé poměry Youngových modulů a Poissonových čísel obou materiálů. $\zeta = 0$ pro trhlinu kolmou k rozhraní a $\zeta = 90$ odpovídá trhlině ležící v rozhraní.

pro většinu úhlů ζ hodnoty bližší integrální metodě než modifikovaný model (13). Ačkoliv je tato modifikace vzdálenější „přesným“ hodnotám T napětí (považujeme-li integrální přístup za přesný), poskytuje stabilnější hodnoty T napětí, a to i pro konfigurace, kdy se trhlina sklonila až téměř do rozhraní. V pásu komplexní hodnoty exponentu singularity napětí už u klasického postupu (12) dochází ke značné oscilaci hodnot T napětí.

Obr. 5 ukazuje průběhy T napětí pro trhlinu pod libovolným úhlem ζ pro konstantní poměr Youngových modulů, ale rozdílná Poissonova čísla obou materiálů. Konkrétně byly studovány různé poměry Poissonových čísel $\nu = 0{,}3$ a $\nu = 0{,}4$, která jsou reálná z pohledu praktického využití. Na obou závislostech je dobře vidět, že nestejnoměrná stlačitelnost obou materiálů nemá podstatný vliv na hodnotu T napětí pro trhlinu pod úhlem sklonu $\zeta > 45$ (Obr. 5 a), popř. pro $\zeta > 60$ (Obr. 5 b). Ve zbývajících případech má Poissonovo číslo významný vliv na hodnotu T napětí, přičemž odchylka od případu $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ závisí na konkrétním poměru Youngových modulů. V případě, kdy se trhlina šíří do materiálu s vyšším modulem pružnosti, dochází pro $\nu_1 < \nu_2$ ke znatelnému poklesu T napětí, a tedy nárůstu lomové houževnatosti.

5 Závěr

Uvedená práce shrnuje poznatky o výpočtu T napětí jako lomově-mechanickém parametru vyskytujícím se v druhém členu rozvoje napětí a vyjadřující míru constraintu (stísnění) deformace na čele trhliny. Pro obecně orientovanou trhlinu s kořenem na rozhraní dvou materiálů je navržen integrální algoritmus výpočtu T napětí, který je obecný pro jakýkoliv úhel sklonu trhliny k rozhraní. Z teoretického pohledu je tato práce zobecněním řešení [11] pro trhlinu v bimateriálovém rozhraní a také práce [5] představující řešení pro trhlinu kolmou k rozhraní. Mimo to je také ukázána modifikace klasického přímého přístupu určení T napětí pro trhliny s exponentem singularity napětí různým od 0,5.

Z dosud provedených experimentálních měření vyplývá, že T napětí ovlivňuje lomovou houževnatost materiálu, přičemž s klesající hodnotou T napětí roste lomová houževnatost. Z tohoto pohledu je žádoucí, aby konfigurace tělesa s trhlinou dosahovala pokud možno co nejnižších hodnot T napětí. Obecně však tento fakt neplatí, neboť je třeba brát v úvahu také konkrétní mechanismus šíření trhliny.

Z pohledu dvouparametrové lomové mechaniky přistupuje k hodnocení stability trhliny také zobecněný faktor intenzity napětí H, který je též možno určit pomocí integrálního přístupu – viz. Gröger [6] nebo Qian *et al.* [9],[10]. Oba tyto parametry pak tvoří základ pro hodnocení stability konstrukcí vyrobených z kompozitních materiálů s křehkou matricí.

Poděkování

Tento příspěvek byl zpracován v rámci řešení grantu GA ČR č. 106/01/0381 "Šíření únavových trhlin přes rozhraní dvou materiálů" a grantu K 2076106 AV ČR nazvaného "Role rozhraní dvou materiálů v lomové mechanice".

Literatura

[1] Ayatollahi, M. R., Pavier, M. J., Smith, D. J.: Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading, *Int. Journal of Fracture*, Vol. **91**, pp. 283–298, 1998

[2] Bogy, D. B.: On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface, *Journal of Applied Mechanics*, ASME 71-APM-0, 1971

[3] Čobanjan, K. S.: Naprjaženija v sostavnych uprugich tělach, *Izdatěľstvo AN Armjanskoj SSR*, Jerevan, 1987

[4] Fenner, D. N.: Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface, *Int. Journal of Fracture*, Vol. **12**, No. 5, pp. 705–721, 1976

[5] Gröger, R., Náhlík, L.: Calculations of fracture-mechanics parameters of general stress concentrators: II. Integral formulation to determination of fracture-mechanics parameters of the nonhomogeneous bodies, *Seminář Únava a lomová mechanika*, Žinkovy, 2002

[6] Gröger, R.: Application of integral approach to calculation of the fracture mechanics parameters of general stress concentrators, *Pojednání ke státní doktorské zkoušce*, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně, 2002

[7] Muschelišvili, N. I.: Někatoryje osnovnyje zadači matěmatičeskoj těorii uprugosti, *Izdatěľstvo "Nauka"*, Moskva, 1966

[8] Náhlík, L.: Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů, *Pojednání ke státní doktorské zkoušce*, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně, 2001

[9] Qian, Z. Q., Akisanya, A. R.: Wedge corner stress behaviour of bonded dissimilar materials, *Theor. and Appl. Fracture Mechanics*, Vol. **32**, pp. 209–222, 1999

[10] Qian, Z. Q., Akisanya, A. R.: An investigation of the stress singularity near the free edge of scarf joints, *Eur. J. Mech, A/Solids*, Vol **18**, pp. 443–463, 1999

[11] Sládek, J., Sládek, V.: Evaluations of the T-stress for interface cracks by the boundary element method, *Eng. Fracture Mechanics*, Vol. **56**, No. 6, pp. 813–825, 1997

Příloha

Odvození analytického řešení pomocné úlohy

Uvažujme trhlinu obecně orientovanou vzhledem k rozhraní dvou materiálů s kořenem na rozhraní zatíženou bodovou silou f působící v kořeni trhliny paralelně s líci trhliny. Složky napětí a posunutí požadované pro kvantifikaci M integrálu je pak možné odvodit na základě teorie funkce komplexní proměnné.

Vyjdeme-li z obvyklých vztahů mezi Muschelišviliho komplexními potenciály $\psi(z)$,$\chi(z)$ a složkami napětí [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4\Re\{\psi'(z)\} \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= 2e^{2i\theta}[\overline{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \\ 2\mu(u_r - iu_\theta) &= e^{i\theta}[\kappa\overline{\psi(z)} - \overline{z}\psi'(z) - \chi'(z)] \quad , \end{aligned} \tag{23}$$

kde $z = re^{i\theta}$ je komplexní číslo, $\Re\{\ldots\}$ vrací reálnou část argumentu, r,θ jsou souřadnice polárního souřadného systému s počátkem v kořeni trhliny, nadtržení označuje komplexní sdruženost a čárka značí derivaci typu $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$. Nechť $a = 1{,}2{,}3$ označuje konkrétní oblast modelu – viz. Obr. 1, přičemž materiálové vlastnosti oblasti 1 a 3 jsou identické a obecně rozdílné od vlastností oblasti 2.

Na základě dřívějších prací Muschelišviliho [7] lze podle [11] pro náš účel využít komplexní potenciály tvaru

$$\begin{aligned} \psi_a &= A_a \ln z = A_a(\ln r + i\theta) \\ \chi_a &= B_a z \ln z = B_a r e^{i\theta}(\ln r + i\theta) \quad , \end{aligned} \tag{24}$$

kde A_a a B_a jsou neznámé koeficienty. Dosazením vztahů (24) do rovnic (23) získáme následující vztahy pro složky napětí:

$$\sigma_{rr}^{(a)} + \sigma_{\theta\theta}^{(a)} = \frac{4A_a}{r}\cos\theta \quad , \quad \sigma_{\theta\theta}^{(a)} = \frac{A_a + B_a}{r}\cos\theta \quad , \quad \sigma_{r\theta}^{(a)} = \frac{A_a + B_a}{r}\sin\theta \quad . \tag{25}$$

Předpokládejme, že jsou líce trhliny nezatížené, tzn. jsou předepsány okrajové podmínky typu

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(\pi) = \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\pi) = 0 \quad , \quad \sigma_{r\theta}^{(3)}(-\pi) = \sigma_{\theta\theta}^{(3)}(-\pi) = 0 \quad . \tag{26}$$

Aplikací podmínek (26) na rovnici (25) získáme relaci mezi oběma neznámými parametry, tj. $A_1 = -B_1$ a $A_3 = -B_3$. Chybějící podmínka $A_2 = -B_2$ se pak získá za předpokladu spojitosti složek napětí přes rozhraní:

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(\pi - \phi) = \sigma_{r\theta}^{(2)}(\pi - \phi) \quad , \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\pi - \phi) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\pi - \phi) \tag{27}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(3)}(-\phi) = \sigma_{r\theta}^{(2)}(-\phi) \quad , \quad \sigma_{\theta\theta}^{(3)}(-\phi) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(-\phi) \ . \tag{28}$$

Nyní dosaďme potenciály (24) do rovnice pro posunutí v (23), abychom obdrželi vztahy pro výpočet posuvů v okolí kořene trhliny:

$$\begin{aligned} 2\mu_a(u_r^{(a)} - iu_\theta^{(a)}) &= e^{i\theta}[\kappa_a\overline{\psi_a(z)} - \overline{z}\psi_a'(z) - \chi_a'(z)] \quad \text{nebo :} \\ 2\mu_a(u_r^{(a)} - iu_\theta^{(a)}) &= A_a[(\kappa_a\overline{\ln z} + \ln z)e^{i\theta} + 2i\sin\theta] \quad , \end{aligned} \tag{29}$$

kde μ_a je modul pružnosti ve smyku, $\kappa_a = 3 - 4\nu_a$ pro rovinnou deformaci, $\kappa_a = (3 - \nu_a)/(1 + \nu_a)$ pro rovinnou napjatost a ν_a je Poissonovo číslo. Separací reálné a imaginární části rovnice (29) získáme hledané složky posunutí:

$$\begin{aligned} u_r^{(a)} &= \frac{A_a}{2\mu_a}\left[(\kappa_a + 1)\ln r\cos\theta + (\kappa_a - 1)\theta\sin\theta\right] \\ u_\theta^{(a)} &= -\frac{A_a}{2\mu_a}\left[(\kappa_a + 1)\ln r\sin\theta - (\kappa_a - 1)\theta\cos\theta + 2\sin\theta\right] \quad . \end{aligned} \tag{30}$$

Dále požadujme spojitost složek posunutí přes rozhraní, tzn. splnění následujících čtyř podmínek:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(\pi-\phi) = u_r^{(2)}(\pi-\phi) \quad &, \quad u_\theta^{(1)}(\pi-\phi) = u_\theta^{(2)}(\pi-\phi) \\ u_r^{(3)}(-\phi) = u_r^{(2)}(-\phi) \quad &, \quad u_\theta^{(3)}(-\phi) = u_\theta^{(2)}(-\phi) \quad . \end{aligned} \tag{31}$$

Použitím podmínek (31) na vztahy (30) získáme relaci mezi koeficienty A_a pro různé oblasti a:

$$A_2 = A_1 \frac{c_{12}}{c_{22}} \quad , \quad A_3 = A_2 \frac{c_{23}}{c_{33}} \quad , \tag{32}$$

kde konstanta c_{ab} se vztahuje k oblasti a při výpočtu koeficientu A_b podle následujících vztahů:

$$c_{a2} = \frac{1}{\mu_a}\left[-\ln r\cos\phi(\kappa_a+1) + (\pi-\phi)\sin\phi(\kappa_a-1)\right] \tag{33}$$

$$c_{a3} = \frac{1}{\mu_a}\left[\ln r\cos\phi(\kappa_a+1) - (2\pi-\phi)\sin\phi(\kappa_a-1)\right] \tag{34}$$

Nyní máme tedy systém dvou rovnic (32) pro tři neznámé koeficienty A_1,A_2,A_3. Zbývající relaci je možné získat integrací radiální složky napětí podél integrační cesty s počátkem a koncem na lících trhliny:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr} e^{i\theta} r \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{-\phi} \sigma_{rr}^{(3)} e^{i\theta} r \mathrm{d}\theta + \int_{-\phi}^{\pi-\phi} \sigma_{rr}^{(2)} e^{i\theta} r \mathrm{d}\theta + \int_{\pi-\phi}^{\pi} \sigma_{rr}^{(1)} e^{i\theta} r \mathrm{d}\theta = -f \; . \tag{35}$$

Dosazením radiálních složek napětí $\sigma_{rr}^{(a)} = (4A_a/r)\cos\theta$ do (35) a integrací získáme chybějící závislost pro libovolný úhel ϕ a kombinaci materiálů. Řešením toho systému tří algebraických rovnic máme tedy konkrétní vztahy pro jednotlivé koeficienty A_a pro $a = 1{,}2{,}3$:

$$A_a = -fC^{(a)} c_{12} c_{33} \frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} \quad , \tag{36}$$

kde parametry $C^{(a)}$ jsou definovány zvlášť pro každou oblast jako:

$$C^{(1)} = \frac{c_{22}}{c_{12}} \quad , \quad C^{(2)} = 1 \quad , \quad C^{(3)} = \frac{c_{23}}{c_{33}} \tag{37}$$

a Z_1,Z_2 jsou obecně komplexní funkce ve tvaru:

$$\begin{aligned} Z_1 &= c_{22}c_{33}(2\phi + \sin 2\phi) + 2\pi c_{12}c_{33} + c_{12}c_{23}[2(\pi-\phi) - \sin 2\phi] \\ Z_2 &= (c_{22}c_{33} - c_{12}c_{23})(1-\cos 2\phi) \quad . \end{aligned} \tag{38}$$

Transformací (25) a (30) do kartézských souřadnic získáme hledané vztahy pro složky napětí:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(a)} &= -\frac{4f}{r} C^{(a)} c_{12}c_{33} \frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} \cos^3\theta \\ \sigma_{12}^{(a)} &= -\frac{4f}{r} C^{(a)} c_{12}c_{33} \frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} \sin\theta\cos^2\theta \\ \sigma_{22}^{(a)} &= -\frac{4f}{r} C^{(a)} c_{12}c_{33} \frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} \sin^2\theta\cos\theta \; , \end{aligned} \tag{39}$$

a posunutí:

$$\begin{aligned} u_1^{(a)} &= -\frac{f}{2\mu_a} C^{(a)} c_{12}c_{33} \frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} \left[(\kappa_a+1)\ln r + 2\sin^2\theta\right] \\ u_2^{(a)} &= -\frac{f}{2\mu_a} C^{(a)} c_{12}c_{33} \frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} \left[(\kappa_a-1)\theta - \sin 2\theta\right] \end{aligned} \tag{40}$$

jako požadované řešení doplňkové úlohy označené indexem B ve vztahu pro numerický výpočet M integrálu (16).

Poznámka: V obecném případě, kdy jsou Poissonova čísla obou materiálů odlišná, je pole napětí a posunutí komplexní. Na druhou stranu, ve speciálním případě, kdy mají všechny materiály stejné Poissonovo číslo, tj. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, je také $c_{22}c_{33} = c_{12}c_{23}$ a $C^{(1)} = C^{(3)}$. Ve smyslu těchto vztahů je pak zřejmě $Z_2 = 0$, a tedy imaginární části ve shora uvedených vztazích vymizí. Důsledkem tohoto faktu je reálné pole napětí a deformace v okolí kořene takovéto trhliny.

Pro kvatifikaci T napětí křivkovým integrálem (16) je nezbytné m.j. analytické vyjádření derivací složek posunutí vzhledem k horizontální souřadnici x_1. Vyjdeme-li z transformačních vztahů

$$u_{1,1}^{(a)} = \cos\theta u_{1,r}^{(a)} - \frac{\sin\theta}{r} u_{1,\theta}^{(a)} \quad , \quad u_{2,1}^{(a)} = \cos\theta u_{2,r}^{(a)} - \frac{\sin\theta}{r} u_{2,\theta}^{(a)} \quad , \tag{41}$$

kde čárka značí parciální derivaci. Dosazením (40) do (41) lze získat následující vztahy pro derivace složek posunutí:

$$\begin{aligned} u_{1,1}^{(a)} &= -\frac{f}{2r\mu_a}\frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} C^{(a)} c_{12}c_{33} \left[\kappa_a + 1 - 4\sin^2\theta\right] \cos\theta \\ u_{2,1}^{(a)} &= \frac{f}{2r\mu_a}\frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1^2 + Z_2^2} C^{(a)} c_{12}c_{33} \left[\kappa_a - 1 - 2\cos 2\theta\right] \sin\theta \quad . \end{aligned} \tag{42}$$

Konečně, analytické vztahy (39) a (42) představují nezbytné rovnice pro numerické určení M integrálu podle vztahu (16).

VLIV VELIKOSTI KOEFICIENTU ZPEVNĚNÍ NA PARAMETRY POPISUJÍCÍ PLASTICKOU ZÓNU

Pavel HUTAŘ [1]

Abstrakt: Plastická zóna, její tvar, velikost a parametry vystupují buď přímo nebo zprostředkovaně v kriteriích stability, nebo v popisu rychlosti růstu trhlin. Je tedy důležité sledovat jevy, které mohou způsobit změny plastické zóny. Tato studie se zabývá vlivem koeficientu zpevnění na tvar a velikost plastické zóny, na otevření v kořeni trhliny definované na hranici plastické zóny, velikost plastické zóny ve směru šíření ... Tyto veličiny jsou sledovány v závislosti na různé velikosti constraintu definovaného T-napětím. Jsou vysloveny závěry a doporučení týkající se těchto jevů.

1 Úvod

Plastická zóna v kořeni trhliny indikuje velikost napjatosti a pro to se některé její parametry používají v kriteriích stability nebo při popisu rychlosti šíření trhliny. Pro kriteria stability se poměrně často používá $CTOD$ (crack tip opening displacement) otevření v kořeni trhliny, za předpokladu že kritická hodnota této veličiny, $CTOD_C$, je materiálová konstanta má lomové kriterium tvar $CTOD < CTOD_C$. Výhoda takto formulovaného kriteria stability je jasný fyzikální význam a jednotky.

Zabýváme-li se šířením únavové trhliny, lze její rychlost popsat podle klasického Parisova-Erdoganova vztahu pracujícího s rozkmitem faktoru intenzity napětí. Pokud chceme zohlednit velikost constraintu, který jak se ukazuje [8],[9] má vliv na rychlost šíření trhliny, lze postupovat podle [6] zavedením fiktivního rozkmitu faktoru intenzity napětí. Vychází se zde z předpokladu, že trhlina se bude chovat stejně jako jiná, jestliže budou mít stejnou velikost plochy plastické zóny.

Z výše uvedených faktů plyne, že jevy, které mohou ovlivňovat velikost, tvar nebo jiné parametry plastické zóny je třeba sledovat a kvantifikovat jejich vliv. Dosud se, zkoumal zejména vliv meze kluzu a T-napětí. V tomto článku se budeme zabývat vlivem koeficientu zpevnění.

[1] Ing. Pavel HUTAŘ,
Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žižkova 22, 616 63 Brno a
Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno
(tel.: 05/ 4163 6362, e-mail:hutar@ipm.cz)

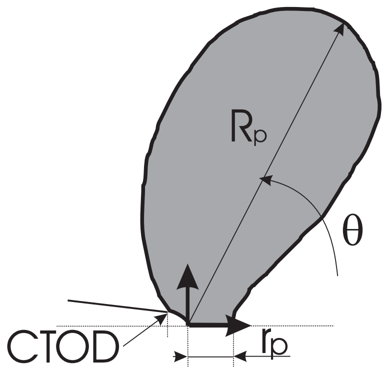
2 Cíle práce

Cílem této práce je popsat změnu parametrů popisujících plastickou zónu v kořeni trhliny v závislosti na velikosti koeficientu zpevnění pro dané hodnoty meze kluzu, faktoru intenzity napětí a intervalu hodnot T-napětí. Koeficient zpevnění N je definován pomocí modelu kontinuálně zpevňujícího materiálu daného Rambergovým-Osgoodovým vztahem:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} + \alpha(\frac{\sigma}{\sigma_o})^n, \quad (1)$$

kde σ_o,ϵ_o je napětí a přetvoření na mezi kluzu, $n = 1/N$, N je koeficient zpevnění a α je bezrozměrná materiálová konstanta.

Obrázek s popisem parametrů plastické zóny je označen jako (1),



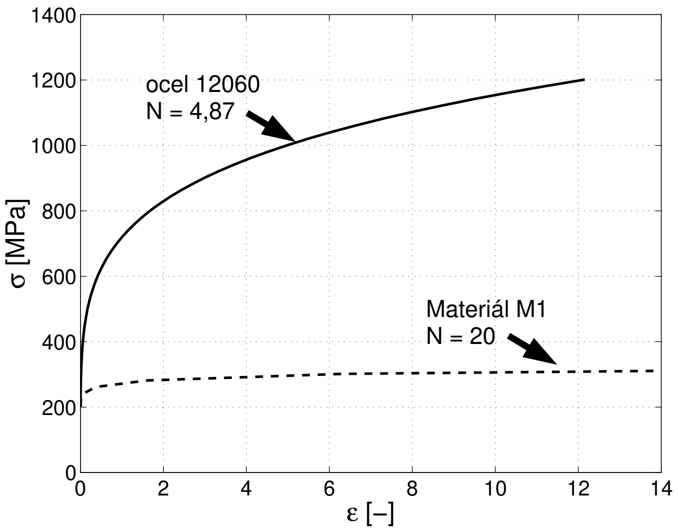
Obrázek 1: Parametry plastické zóny

Kde pokud uvažujeme normálový mód zatížení trhliny je r_p je velikost plastické zóny ve směru šíření trhliny, R_p max. velikost plastické zóny, θ úhel největšího poloměru plastické zóny, S_p plocha plastické zóny a $CTOD$ je otevření v kořeni trhliny.

3 Numerický model

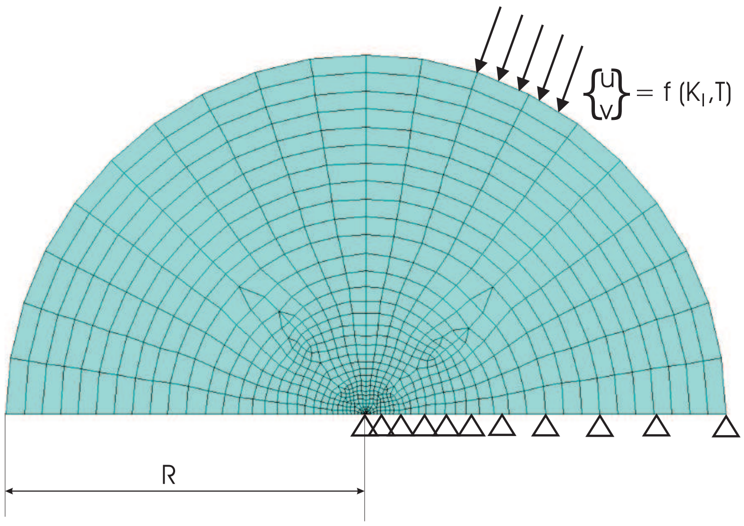
Protože hlavním cílem bylo sledovat vliv koeficientu zpevnění, byl numerický model vystavěn takto: byly zvoleny dva materiály, které lze popsat pomocí Rambergova-Osgoodova vztahu mezi napětím a přetvořením (1). Abychom získali čistý vliv koeficientu zpevnění oba materiály mají stejnou velikost meze kluzu a to $\sigma_0 = 202\,\mathrm{MPa}$. Liší se od sebe pouze velikostí koeficientu zpevnění, který je v prvním případě oceli 12060 roven $N = 4{,}87$ a pro modelový materiál M je roven $N = 20$. Toto rozpětí je dostatečně velké, abychom v něm postihli většinu běžně používaných materiálů. Grafické vyjádření závislosti napětí-přetvoření pro oba materiály je vidět na obr.(2).

Zatížení bylo voleno tak, aby se plastická zóna mohla dostatečně rozvinout a hledané efekty se tak zvýraznily. Proto byla zvolena hodnota faktoru intenzity napětí $K_I = 30\,\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$. Rozpětí hodnot T-napětí odpovídá intervalu mezi hodnotou určenou pro CT vzorek (výrazně kladné T) a hodnotou pro vzorek s centrální trhlinou (výrazně záporné hodnoty). Interval hodnot T-napětí je dán $T/\sigma_0 = \langle -0{,}75{,}0{,}5 \rangle$.



Obrázek 2: Materiálová křivka

Samotný výpočet byl realizován pomocí metody konečných prvků. Pro analýzu byla použita metoda modifikované okrajové vrstvy (MBLM),(3).



Obrázek 3: Model MBLM - realizovaný pomocí MKP

Tato metoda výpočtu má hned několik výhod. Lze libovolně volit velikost faktoru intenzity napětí a T-napětí a pokrýt tak spojitě žádaný interval. Studujeme tak pouze čistý vliv K_I a T na plastickou zónu. Neovlivňují ji např.hranice realné struktury, které působí jako další koncentrátory napětí. Další výhodou je také numerická stabilita výpočtu, která je podpořena deformačním zatěžováním modelu. Model na obr.(3)je vytvořen jako dvoudimenzionální s podmínkou rovinné deformace, má tvar půlkruhu o poloměru R se symetrickou okrajovou podmínkou na ose X. Poloměr této oblasti se mění v závislosti na velikosti plastické zóny a to tak aby byly zachovány podmínky SSY (small scale yielding) tj. plastické zóny malého rozsahu. V tomto případě se R pohybuje v intervalu 10-50 mm. Velikost plastické zóny nepřesahuje 20% tohoto poloměru, jak je doporučováno v [2]. Zatížení je realizováno pomocí posuvů na obvodu kruhové oblasti. Ty jsou dány pomocí vztahů :

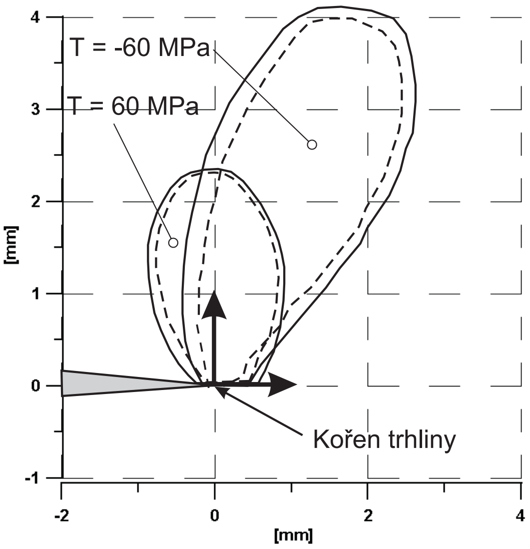
$$u = \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)+\frac{Tr}{8G}(k+1)\cos\theta \tag{2}$$

$$v = \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)+\frac{Tr}{8G}(k-3)\sin\theta \tag{3}$$

kde K_I je faktor intenzity napětí, T T-napětí, $k = 3 - 4\nu$ pro rovinnou deformaci a G je modul pružnosti ve smyku. Síť konečných prvků je tvořena izoparametrickými čtyřúhelníky, které se zhušťjí směrem ke kořeni trhliny.

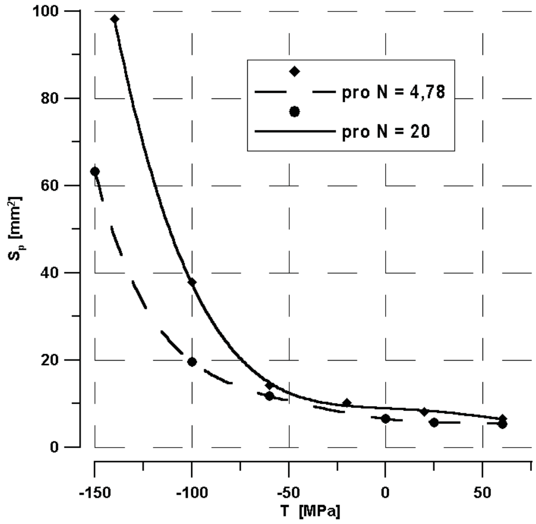
4 Výsledky analýzy

Na obr.(4) je vidět ovlivnění tvaru a velikosti plastické zóny vlivem koeficientu zpevnění. Jsou zde vybrány dva kontrastní případy a to případ vysokého constraintu pro $T = 60\,\mathrm{MPa}$ a případ ztráty constraintu $T = -60\,\mathrm{MPa}$, $K_I = 30\,\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$.

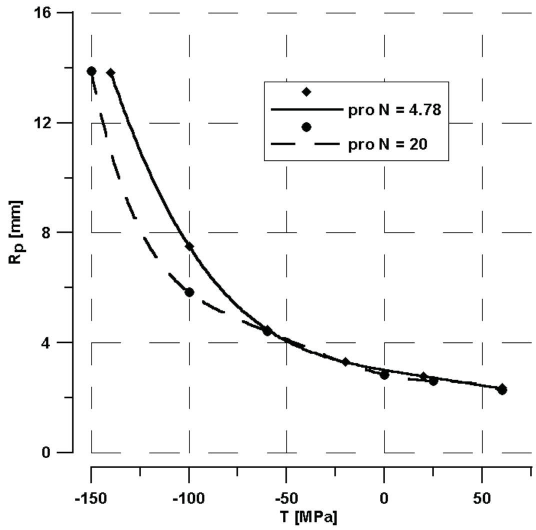


Obrázek 4: Vliv koeficientu zpevnění na tvar plastické zóny

Je vidět že podle očekávání se plastická zóna vlivem záporných hodnot T napětí natáčí směrem do prava tedy ve směru růstu trhliny a citelně se zvětšuje. V obou případech jsou porovnány plastické zóny pro případ materiálu s koeficientem zpevnění N =4,78 (v obrázku značeno plnou čarou) a pro případ N =20 (značeno čárkovaně). Jak je vidět s rostoucí hodnotou koeficientu zpevnění se plastická zóna mírně zmenšuje a zužuje, což je zvláště patrné v oblasti záporných T-napětí. Ovšem tyto změny nejsou příliš velké a na globální charakteristiky plastické zóny jako je její plocha nebo maximální poloměr nebudou mít velký vliv.V grafu(2) je vidět, jak rozdílný průběh zpevnění mají oba materiály a přesto vliv na tvar nebo natočení plastické zóny je poměrně malý. To budeme dokumentovat v následujících grafech.

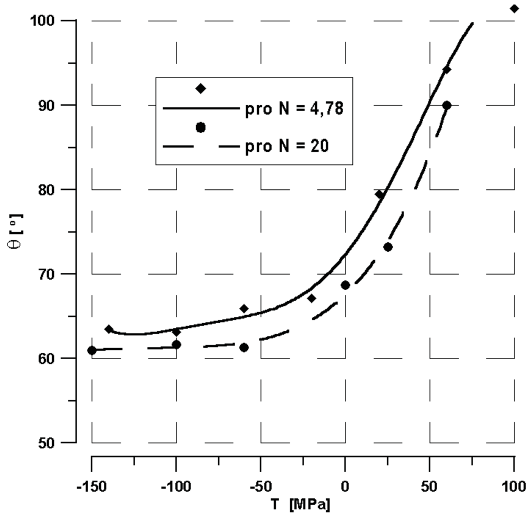


Obrázek 5: Vliv koeficientu zpevnění na velikost plochy plastické zóny

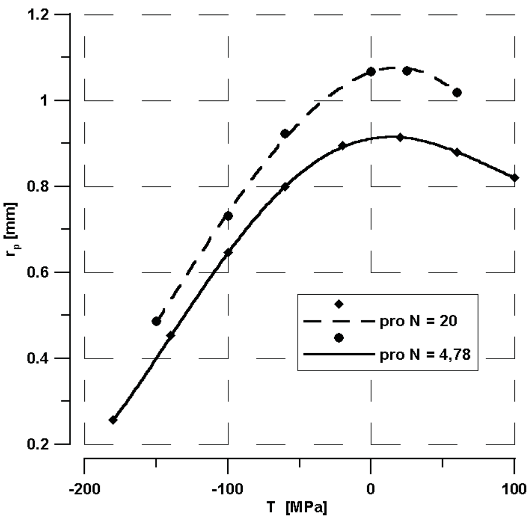


Obrázek 6: Vliv koeficientu zpevnění na maximalní poloměr plastické zóny

Na obrázku (5) je vidět závislost velikosti plochy plastické zóny na různých hodnotách koeficientu zpevnění. V oblasti kladných hodnot T-napětí se plocha plastické zóny prakticky nemění a je stejná i pro obě hodnoty koeficientu zpevnění. Jejich rozdíl se pohybuje do 10%. Křivky se od sebe začnou oddalovat až při $T < -50\,\mathrm{MPa}$ kde rychle vzrůstá velikost plastické zóny. Podobnou závislost dostaneme i pro největší poloměr plastické zóny R_p jak lze vidět na obr.(6).



Obrázek 7: Vliv koeficientu zpevnění na úhel natočení maximálniho poloměru plastické zóny

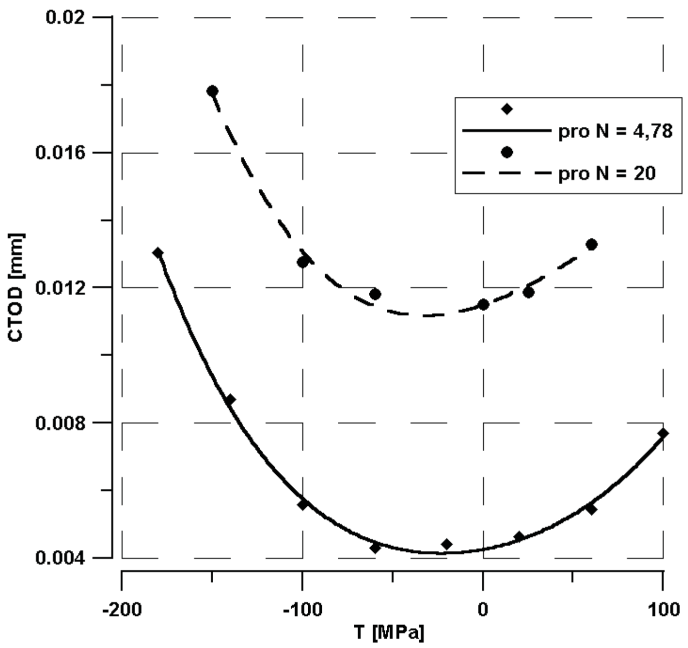


Obrázek 8: Vliv koeficientu zpevnění na velikost plastické zóny ve směru šíření trhliny

Velikost R_p roste v závislosti na T-napětí podobně jako plocha plastické zóny. Křivky reprezentující různé hodnoty koeficientu zpevnění se od sebe odchylují až ve výrazně záporných hodnotách T. V grafu (7) je závislost úhlu natočení plastické zóny na velikosti T napětí pro dvě různé hodnoty koeficientu zpevnění.

Je zřejmé že, úhel natočení klesá vlivem T napětí jak už je vidět na obr.(4). S rostoucí hodotou koeficientu zpevnění N se celá křivka této závislosti posouvá dolů, tento posuv však reprezentuje odchylku řádově několik procent. Ukazuje se tedy, že na globální charakteristiky plastické zóny je vliv velikosti koeficientu zpevnění poměrně malý. Vyjímku tvoří pouze oblast výrazně záporného T-napětí, kde se ovšem v praxi příliš napohybujeme. Podobné výsledky lze najít v práci [3], kde jsou tyto závislosti pro lineárně zpevňující materiál a pro nezpevňující materiál. Ani zde nejsou rozdíly nijak dramatické a potvrzují předchozí závěry.

Na obr.(8) je vidět závislost velikosti plastické zóny ve směru šíření trhliny r_p na T-napětí pro obě hodnoty N. I zde je znatelný posun hodnot ovšem na druhou stranu než u předchozích parametrů. S rostoucí hodnotou koeficientu zpevnění roste i velikost r_p. Zajímavý je i trend závislosti r_p na T napětí, ten je diskutován například v práci [4]. Prakticky se používá tento parametr většinou pro reziduání plastickou zónu, kde se trend obrací a minimum je někde v oblasti $T = 0\,\mathrm{MPa}$. To odpovídá více představě, že parametr popisující šíření trhliny by měl růst zvláště směrem do záporných hodnot jako je tomu třeba u $CTOD$ na obr.(9).



Obrázek 9: Vliv koeficientu zpevnění na otevření v kořeni trhliny

$CTOD$ je jeden z nejpoužívanějších lomových parametrů jak pro formulaci kriteria stability [1], tak pro popis rychlosti šíření trhiny [7]. Z grafu na obr.(9) je vidět, že vliv koeficientu zpevnění je na tento parametr plastické zóny největší. Tento jev je potvrzen např. v [5], kde je popisován vliv koeficientu zpevnění na proporční faktor (jeho hodnota je závislá přímo na velikosti $CTOD$). Jeho hodnoty se mění v závislosti na N tak, že z rostoucím N velikost $CTOD$ roste. Tato skutečnost je poměrně zajímavá, je otázkou do jaké míry kvantitativně tato skutečnost ovlivní kriteria stability na otevření v kořeni trhliny postavená, jestli není ovlivnění hodnotou N příliš velké, nebo naopak malé. Zde by se měla tato studie prohloubit. Celá tato analýza je provedena pouze pro jednu hodnotu meze kluzu, proto je třeba ověřit zda se ovlivnění $CTOD$ bude s touto veličinou měnit, nebo jestli stačí výsledky normovat a tedy celou závislost zobecnit.

5 Závěr

Pro materiály s různou velikostí koeficientu zpevnění N byla provedena elastoplastická analýza napětí a deformace na modelu vytvořeného pomocí metody modifikované okrajové vrstvy MBLM. Byla vyhodnocena závislost parametrů plastické zóny na velikosti T-napětí v intervalu $T = \langle -150{,}100 \rangle$MPa při zatížení úměrném faktoru intenzity napětí $K_I = 30\,\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$.

Ukázalo se, že charakteristiky definující tvar a velikost plastické zóny se příliš se změnou hodnoty koeficientu zpevnění nemění. Plocha plastické zóny S_p a největší poloměr plastické zóny R_p se mění se změnou N velice málo řádově v procentech. Větší odchylky se objevují pouze při velice nízkých hodnotách T-napětí kdy s rostoucí hodnotou N oba parametry klesají. Stejný pokles je vidět na celém intervalu T-napětí i pro úhel natočení plastické zóny, opět se ale jedná pouze o pokles v řádu procent. Lze tedy konstatovat že charakteristiky popisující plastickou zónu globálně se skoro nemění. Proto ani kriteria stability na nich postavená nebudou hodnotou koeficientu zpevnění ovlivněny.

Nejcitlivější na změnu koeficientu zpevnění je otevření v kořeni trhliny definované na hranici plastické zóny. Jeho hodnoty se mění v závislosti na N poměrně výrazně a to tak, že z rostoucím N velikost $CTOD$ roste.Tato skutečnost je poměrně zajímavá, je otázkou do jaké míry kvantitativně tato skutečnost ovlivní kriteria stability na otevření v kořeni trhliny postavená, jestli není ovlivnění hodnotou N příliš velké, nebo naopak malé. Zde by se měla tato studie prohloubit. Celá tato analýza je provedena pouze pro jednu hodnotu meze kluzu, proto je třeba ověřit zda se ovlivnění $CTOD$ bude s touto veličinou měnit, nebo jestli stačí výsledky normovat a tedy celou závislost zobecnit.

Poděkování

Tento článek byl vytvořen za pomoci grantu Grantové Agentury ČR č.106/01/0381

Literatura

[1] Anderson T. L., Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications 2nd edition, CRC Press Inc., 1995

[2] Andrews R. M. Garwood S. J., An analysis of fracture under biaxial loading using the non-singular T-stress, Fatigue Frac. Engng. Mater. Struct.,23, 2001, 53–62

[3] Bednář K., Dvouparametrová lomová mechanika - výpočet parametrů a jejich význam při popisu chování úvavových trhlin. Disertační práce, ÚFM AV ČR Brno, 1999

[4] Hutař P., Vliv T-napětí na charakteristiky popisující únavovou trhlinu při cyklickém namáhání. Výpočtová mechanika 17, Nečtiny, 2001, s. 105–112.

[5] Hutař P., Závislost proporčniho faktoru na T-napětí. Únava a lomová mechanika 23, Žinkovy, 2002

[6] Knésl, Z., Bednář K., Radon J. C., Influence of T-stress on the rate of propagation of fatigue cracks. Physical Mesomechanics, 2000, s. 5–9.

[7] Li C., Vector CTD criterion applied to mixed mode fatigue crack growth, Fatigue Frac. Engng. Mater. Struct.,12, 1989, 59–65

[8] Tong J., T-stress and its implications for crack growth, Engng. Fract. Mech.,in press, 2002

[9] Vecchio R. S., Crompton J. S., Hertzberg R.W.: The influence of specimen geometry on near treshold fatigue crack growth, Fatigue Frac. Engng. Mater. Struct.,10, 1987, 333–342

Kriterium minimální hustoty deformační energie v případě namáhání tělesa s V-vrubem

Jan Klusák[1]

Abstrakt: Příspěvek je věnován návrhu kriteria stability těles s V-vruby zatěžovaných jednoduchým módem I nebo II nebo kombinací módů I a II. Metodika návrhu kriteria stability vychází z analogie chování těles s trhlinou a V-vrubem. V článku je nejprve ukázáno rozložení hustoty deformační energie v okolí tělesa s V-vrubem, poté je určen směr šíření trhliny z V-vrubu při kombinovaném namáhání a nakonec je proveden návrh lomových kriterií.

1 Úvod

Ve většině případů jsou reálná tělesa zatěžována kombinovaným způsobem namáhání. V tomto případě je pro posouzení životnosti takových součástí vhodné vyjít ze znalosti rozložení hustoty deformační energie kolem vrcholu V-vrubu [1], [2], [3], [4], [5]. V roce 1991 Sih a Ho v článku [1] ukázali, že porušení materiálu před vrubem lze předpovídat ze stálé hodnoty hustoty objemové energie dW/dV bez ohledu na stupeň singularity vrubu. Ukázali, že iniciace lomu je spojena s kritickou hodnotou $(\mathrm{d}W/\mathrm{d}V)_c$, která je materiálovou charakteristikou. V článku jsou nejprve objasněny základní pojmy týkající se hustoty deformační energie, poté je pomocí této veličiny odvozeno kriterium stability pro jednoduché zatěžovací módy I, II a nakonec je využito i k odvození kriteria stability V-vrubu pro kombinované namáhání I+II.

2 Faktor hustoty deformační energie V-vrubu

Faktor hustoty deformační energie původně představil Sih v [5] pro trhliny. Zde aplikujeme faktor hustoty deformační energie na V-vruby v případech rovinné napjatosti a deformace.

2.1 Hustota deformační energie

Hustota deformační energie (Strain energy density - SED) w = dW/dV je dána vztahem:

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}V = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{1}$$

Omezíme-li se na rovinné případy, pak předchozí rovnice (1) přechází na:

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}V = [k_n(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}] \tag{2}$$

kde $n = 1,2$ a $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}$ (součet složek napětí od zatěžovacího módu I a II). Pro rovinnou napjatost pak platí $k_1 = (1-\nu)/(1+\nu)$ a pro rovinnou deformaci $k_2 = (1-2\nu)$; ν je Poissonovo číslo.

[1]Jan Klusák, Ing.,Ústav fyziky materiálů, AV ČR, Žižkova 22, 616 62 Brno, tel. 05/32290348, e-mail:klusak@ipm.cz

2.2 Rozložení hustoty deformační energie

Výraz pro rozložení hustoty deformační energie na vrcholu V-vrubu při smíšeném módu zatěžování I + II lze jednoduše odvodit dosazením vztahů pro složky napětí do vztahu (2). Potom:

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}V = (A_{11}H_I^2 + 2A_{12}H_I H_{II} + A_{22}H_{II}^2)/r \tag{3}$$

kde

$$\begin{aligned} A_{11} &= (k_n U_I + V_I)r^{1-2p_I}/16\pi\mu \\ A_{22} &= (k_n U_{II} + V_{II})r^{1-2p_{II}}/16\pi\mu \\ A_{12} &= (k_n Q + T)r^{1-p_I-p_{II}}/16\pi\mu \end{aligned} \tag{4}$$

p_I,p_{II} jsou exponenty singularity napětí pro příslušné módy namáhání a závisí na úhlu otevření V-vrubu α, μ je modul pružnosti ve smyku a $U_I, V_I, U_{II}, V_{II}, Q, T$ jsou závislé pouze na úhlu otevření V-vrubu α [4].

2.3 Faktor hustoty deformační energie V-vrubu

Napišme vztah (3) ve tvaru

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}V = \Sigma(\alpha,\theta,r,\nu,\mu)/r \tag{5}$$

kde

$$\Sigma = A_{11}H_I^2 + 2A_{12}H_I H_{II} + A_{22}H_{II}^2 \tag{6}$$

Označme pro případ trhliny (tj. pro $\alpha = 0$):

$$\begin{aligned} A_{11}(\alpha = 0) &= a_{11} \\ A_{22}(\alpha = 0) &= a_{12} \\ A_{12}(\alpha = 0) &= a_{22} \end{aligned} \tag{7}$$

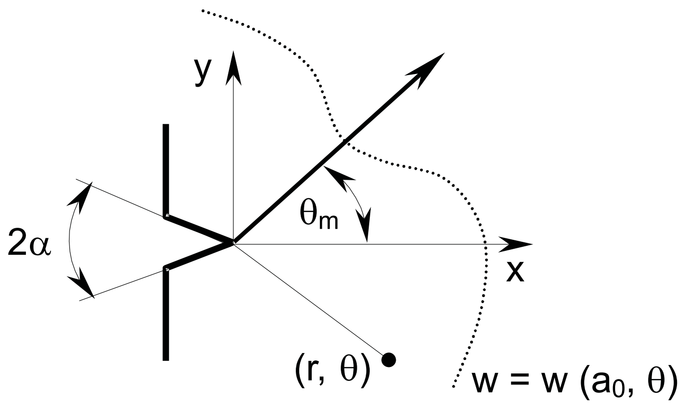
a zároveň $H_I = K_I, H_{II} = K_{II}$. Pak i rovnice (6) může být přepsána do tvaru:

$$\Sigma(\alpha = 0) = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 = S \tag{8}$$

kde S je faktor hustoty deformační energie pro trhlinu, jak ho popsal Sih [5].

Funkce Σ zobecňuje Sihův faktor hustoty deformační energie na V-vruby a může být použit pro určení směru šíření trhliny z vrcholu V-vrubu.

Na rozdíl od S-faktoru pro trhlinu, je vrubový faktor hustoty deformační energie Σ závislý na vzdálenosti r od vrcholu V-vrubu.



Obrázek 1: Směr $\theta = \theta_m$ šíření trhliny z V-vrubu odpovídající minimu hustoty deformační energie $w(a_0,\theta)$

3 Určení směru šíření trhliny z V-vrubu při kombinovaném módu namáhání I + II

Určení směru šíření trhliny z V-vrubu zatíženého kombinovaným namáháním módů I a II je nutným krokem pro spolehlivý odhad životnosti součástí s V-vruby.

První studie růstu trhlin při kombinovaném namáhání prováděli Iida a Kobayashi kolem roku 1970 [6]. Obecně lze konstatovat, že úhel θ_m, který určuje v jakém směru se bude trhlina šířit, je funkcí poměru hodnot K_{II}/K_I (resp. H_{II}/H_I) a trhlina se bude šířit tak, aby byl eliminován mód II ($K_{II}, H_{II} \to 0$). V případě, že $KII/KI << 1$ (resp. $HII/HI << 1$), poskytují všechna kriteria v podstatě stejné výsledky.

Postup vychází z analogie mezi chováním V-vrubu a trhliny [4]. Trhlina se bude z V-vrubu šířit ve směru $\theta = \theta_m$ identickém se směrem minima hustoty deformační energie $w(r,\theta)$ obr. 1, tedy ve směru minima faktoru hustoty deformační energie

$$\Sigma(a_0,\theta_m) = \Sigma_{min}(a_0,\theta) \tag{9}$$

Musí být tedy splněny následující podmínky:

$$(\partial\Sigma/\partial\theta)_{\theta_m} = 0 \tag{10}$$

$$(\partial^2\Sigma/\partial\theta_2)_{\theta_m} > 0 \tag{11}$$

Pro řešení nutné podmínky (9) vyjádřeme vztah (6) pro Σ za předpokladu $H_I \neq 0$ ve tvaru:

$$\Sigma = H_I^2(A_{11} + 2A_{12}(H_{II}/H_I) + A_{22}(H_{II}/H_I)^2) \tag{12}$$

Uvážíme-li, že hodnoty H_I a H_{II} nezávisí na polární souřadnici θ, nutná podmínka (9) přejde na tvar:

$$(\partial A_{11}/\partial\theta + 2\partial A_{12}/\partial\theta(H_{II}/H_I) + \partial A_{22}/\partial\theta(H_{II}/H_I)^2)_{\theta_m} = 0 \tag{13}$$

Z této rovnice plyne, že hodnota úhlu θ_m nezávisí na absolutní hodnotě zobecněných faktorů intenzity napětí H_I a H_{II}, ale že k určení směru šíření trhliny z V-vrubu postačíme se znalostí poměru H_{II}/H_I. Na obr. 2 je znázorněna závislost úhlu θ_m na poměru H_{II}/H_I pro různé úhly otevření V-vrubu. Hodnoty pro obr. 2 jsou počítány pro $r = 0{,}001$ m a $\nu = 1/3$ pro případy jak rovinné napjatosti, tak rovinné deformace.

Při návrhu kriteria stability V-vrubu vycházíme z podobnosti chování trhlin a V-vrubů. Předpokládáme, že hodnota hustoty deformační energie je stejná v případě šíření trhliny z V-vrubu jako v případě klasického šíření trhlin. V případě zatěžovacího módu I bude minimum hustoty deformační energie ve směru $\theta = 0$, tj. ve směru předpokládaného šíření trhliny. Předpokládáme, že v okamžiku počátku šíření trhliny platí pro zatěžovací mód I:

$$w_{min}^{trhlina} = \frac{S_{min}(K_{th},\alpha = 0, \theta = 0,r,\nu,\mu)}{r} = \frac{\Sigma_{min}(H_{th},\alpha,\theta = 0,r,\nu,\mu)}{r} = w_{min}^{V-vrub} \tag{14}$$

tedy - stejně pro případ faktoru hustoty deformační energie:

$$S_{min}(K_{Ith},\alpha = 0,\theta = 0,r,\nu,\mu) = \Sigma_{min}(H_{Ith},\alpha,\theta = 0,r,\nu,\mu) \tag{15}$$

Pro mód I lze vyjádřit rovnost faktorů hustoty deformační energie porovnáním jejich vyjádření při prahové podmínce (pro cyklické zatěžování) v následujícím tvaru:

$$a_{11}K_{Ith}^2 = A_{11}H_{Ith}^2 \tag{16}$$

kde A_{11} a a_{11} jsou definovány vztahy (4) a (7). Potom pro prahovou hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí platí:

$$H_{Ith} = K_{Ith} r^{p_I - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4k_n + 1}{k_n U_I(\theta = 0) + V_I(\theta = 0)}} \tag{17}$$

Analogické odvození lze provést i v případě statického zatěžování porovnáním faktorů hustoty deformační energie při kritické podmínce. V tomto případě by se kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí vyjádřila ve tvaru:

$$H_{IC} = K_{IC} r^{p_I - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4k_n + 1}{k_n U_I(\theta = 0) + V_I(\theta = 0)}} \tag{18}$$

kde

$$U_I(\theta = 0) = 16(1 - p_I) \tag{19}$$

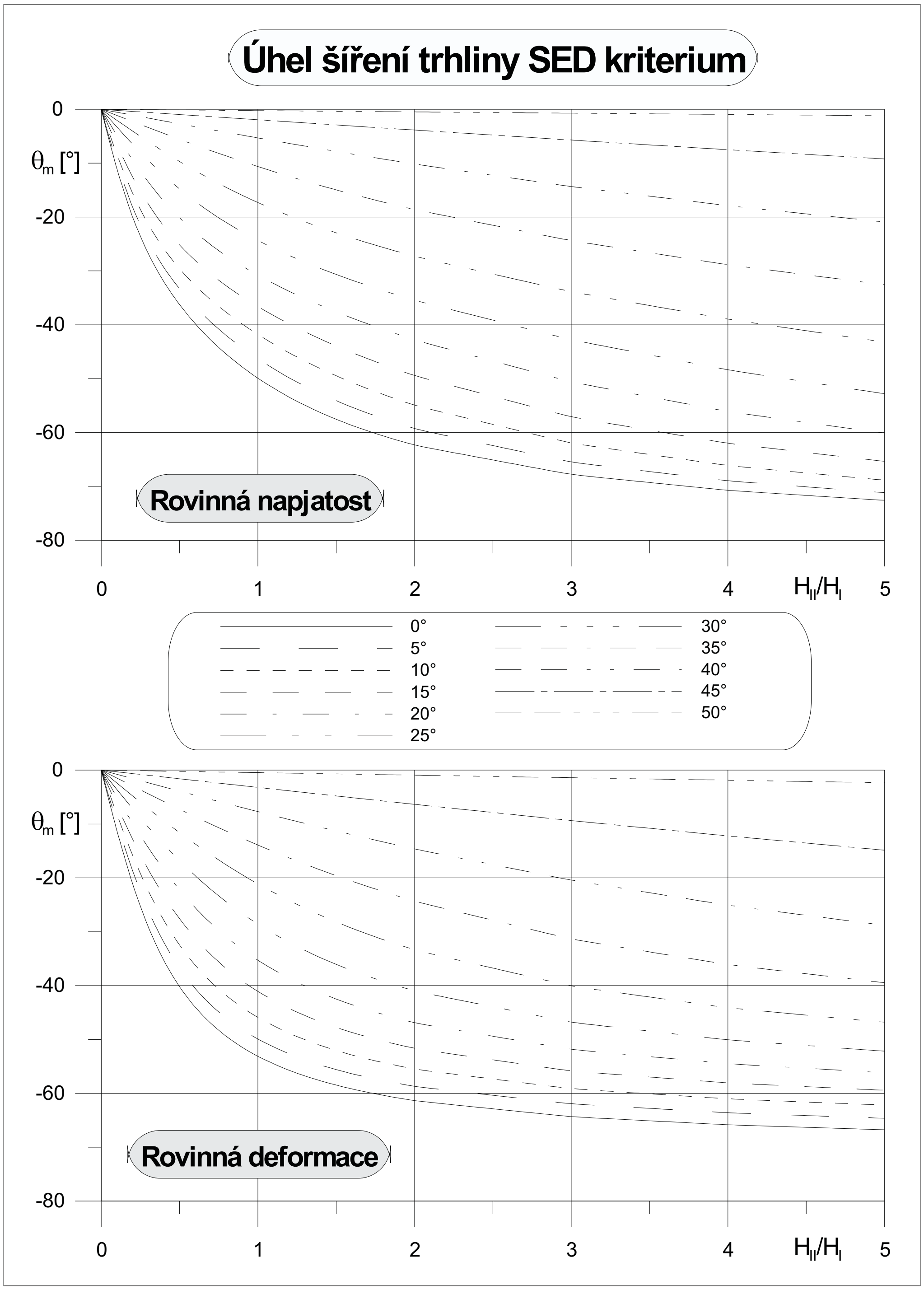
$$V_I(\theta = 0) = 4p_I^2(1 - p_I)^2 + 4q_I^2(2 - 3p_I + p_I^2)^2 - 8p_I q_I(1 - p_I)(2 - 3p_I + p_I^2) \tag{20}$$

Konečně kriterium stability V-vrubu, zatěžovaného módem I, vyjádřené pomocí hustoty deformační energie lze pro cyklické, resp. statické zatěžování napsat ve tvaru nerovnic (21) resp. (22).

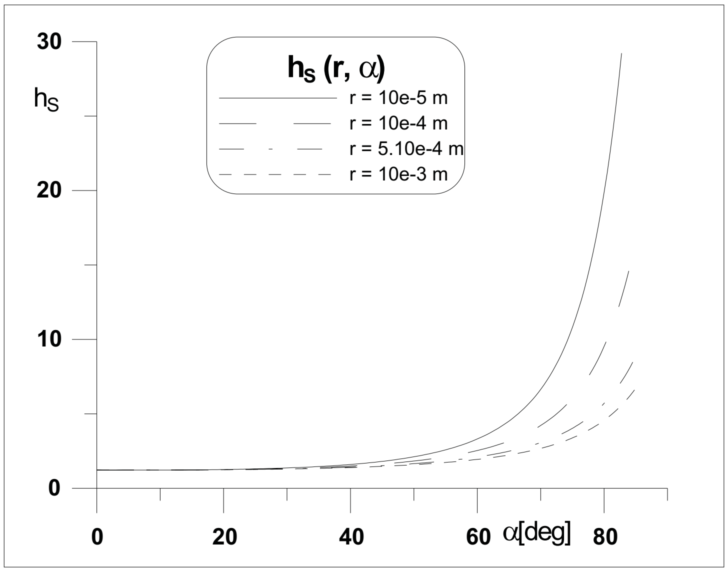
$$H_I(\alpha) < H_{Ith}(K_{Ith},\alpha) \tag{21}$$

$$H_I(\alpha) < H_{IC}(K_{IC},\alpha) \tag{22}$$

Hodnoty zobecněného faktoru intenzity napětí H_I jsou určovány numericky pro konkrétní zatížení a okrajové podmínky. Velikost polární souřadnice r ve vztazích (17) a (18) je možné volit v závislosti na konkrétních podmínkách zatížení atd. Např. pro cyklické zatěžování



Obrázek 2: Úhel θ_m šíření trhliny z V-vrubu v závislosti na poměru H_{II}/H_I pro různé poloviční úhly otevření V-vrubu α, určeno pro hodnotu $r = 0{,}001$m, $\nu = 1/3$ a případ rovinné napjatosti a rovinné deformace



Obrázek 3: Vliv volby rozměru r na funkci $h_S(r, \alpha)$. Funkce je počítána pro $r = 10\mu m$, $100\mu m$, $500\mu m$ a $1mm$.

je vhodné r volit ve velikosti plastické zóny, v případě statického zatížení lze zohlednit velikost zrna.

Jestliže vyjádříme vztahy (17) a (18) ve tvaru (23),

$$\begin{aligned} H_{Ith} &= K_{Ith} h_S(r,\alpha) \\ H_{IC} &= K_{IC} h_S(r,\alpha) \end{aligned} \tag{23}$$

kde funkce $h_S(r,\alpha)$ je dána vztahem (24),

$$h_S = r^{p_I - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4k_n + 1}{k_n U_I(\theta = 0) + V_I(\theta = 0)}} \tag{24}$$

můžeme závislost funkce $h_S(r, \alpha)$ a tím i H_{Ith}, případně H_{IC} na volbě rozměru r demonstrovat grafem na obr. 3. Z něho je vidět, že pro úhly otevření V-vrubu menší než asi 2α = 100, liší se hodnoty funkce $h_S(r, \alpha)$ minimálně pro r v rozsahu od 1 μm do 1 mm.

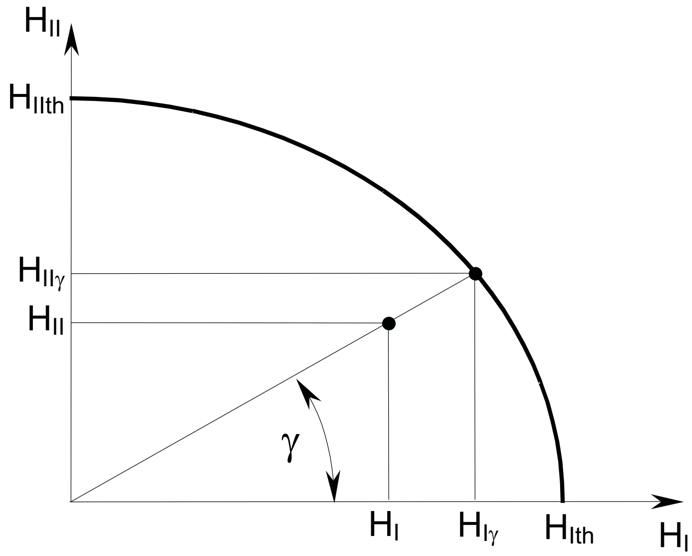
4 S-kriterium minimální hustoty deformační energie - zatěžovací mód II

Stejně jako v případě zatěžování módem I, budeme i zde vycházet ze srovnání faktorů hustoty deformační energie S a Σ:

$$S_{min}(K_{IIth}, \alpha = 0, \theta = \theta_m, r, \nu, \mu) = \Sigma_{min}(H_{IIth}, \alpha, \theta = \theta_m, r, \nu, \mu) \tag{25}$$

Pro mód II lze vyjádřit rovnost faktorů hustoty deformační energie porovnáním jejich vyjádření při prahové podmínce (pro cyklické zatěžování) v následujícím tvaru:

$$a_{22} K_{IIth}^2 = A_{22} H_{IIth}^2 \tag{26}$$



Obrázek 4: Kombinované namáhání V-vrubu

kde A_{22} a a_{22} jsou definovány vztahy (4) a (7). Potom pro prahovou hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí platí:

$$H_{IIth} = K_{IIth} r^{p_{II}-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\sin\theta_m(\cos\theta_m - k_n)}{k_n U_{II}(\theta=\theta_m) + V_{II}(\theta=\theta_m)}} \tag{27}$$

analogicky pro statické zatěžování:

$$H_{IIC} = K_{IIC} r^{p_{II}-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\sin\theta_m(\cos\theta_m - k_n)}{k_n U_{II}(\theta=\theta_m) + V_{II}(\theta=\theta_m)}} \tag{28}$$

kde θ_m je předpokládaný úhel šíření trhliny z V-vrubu při módu II, který můžeme určit numericky například z podmínky (13) hledající minimum hustoty deformační energie.

5 S-kriterium minimální hustoty deformační energie - kombinovaný zatěžovací mód I + II

V analogii k postupům aplikovaným na trhlinu [7], [8], [9], budeme i zde vycházet z předpokladu, že trhlina se bude šířit z V-vrubu právě tehdy, když hodnota faktoru hustoty deformační energie od kombinovaného zatěžování dosáhne prahové hodnoty Σ_{th} od jednoduchého módu I. Snahou je určit v grafu $H_{II}(H_I)$ křivku rozdělující oblast grafu na část, v níž se bude trhlina z V-vrubu šířit a na oblast, kde spočítané hodnoty H_I a H_{II} budou zaručovat stabilitu V-vrubu. Na obr. 4 je tato situace znázorněna. Poznamenejme, že body H_{Ith} a H_{IIth} na osách grafu jsme již schopni určit pomocí vztahů (17) a (27). Ukažme nyní stanovení vztahu mezi hodnotami $H_{I\gamma}$ a $H_{II\gamma}$ z rovnosti faktorů hustoty deformační energie. Pro faktor hustoty deformační energie pro jednoduchý mód I a smíšený mód I+II zatěžování platí:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Ith} &= A_{11}^* H_{Ith}^2 \\ \Sigma_{\gamma th} &= A_{11} H_{I\gamma}^2 + 2A_{12} H_{I\gamma} H_{II\gamma} + A_{22} H_{II\gamma}^2 \end{aligned} \tag{29}$$

kde parametry A_{11}, A_{12}, A_{22} jsou pro předpokládaný úhel šíření trhliny z V-vrubu vyjádřeny ve vztazích (4) a $A_{11}^* = A_{11}(\theta_m = 0)$, tj. pro úhel šíření trhliny při módu zatížení I. Porovnáme-li tedy vztahy z (29) a dosadíme do nich vztah (30) (viz. obr. 4), dostáváme (31):

$$H_{II\gamma} = \tan(\gamma) H_{I\gamma} \tag{30}$$

$$H_{I\gamma} = H_{Ith}\left(\frac{A_{11}^*(\theta_m = 0)}{A_{11}(\theta_m) + 2\tan(\gamma) A_{12}(\theta_m) + \tan^2(\gamma) A_{22}(\theta_m)}\right) \tag{31}$$

Analogicky lze vztah (31) zapsat pro kritickou hodnotu H_{IC} při statickém zatěžování:

$$H_{I\gamma} = H_{IC}\left(\frac{A_{11}^*(\theta_m = 0)}{A_{11}(\theta_m) + 2\tan(\gamma) A_{12}(\theta_m) + \tan^2(\gamma) A_{22}(\theta_m)}\right) \tag{32}$$

Vzhledem k tomu, že směr šíření trhliny z V-vrubu při kombinovaném namáhání nezávisí na velikosti zatížení, ale pouze na jeho směru (i poměr H_{II}/H_I u kořene V-vrubu je závislý pouze na směru aplikovaného zatížení), lze očekávat, že při nárůstu nebo poklesu zatížení se body o souřadnicích $[H_I, H_{II}]$ budou v obr. 4 pohybovat lineárně pod úhlem γ. Potom kriterium stability V-vrubu můžeme zapsat pro statické i cyklické zatěžování ve tvaru následující podmínky:

$$\sqrt{H_I^2 + H_{II}^2} < \sqrt{H_{I\gamma}^2 + H_{II\gamma}^2} \tag{33}$$

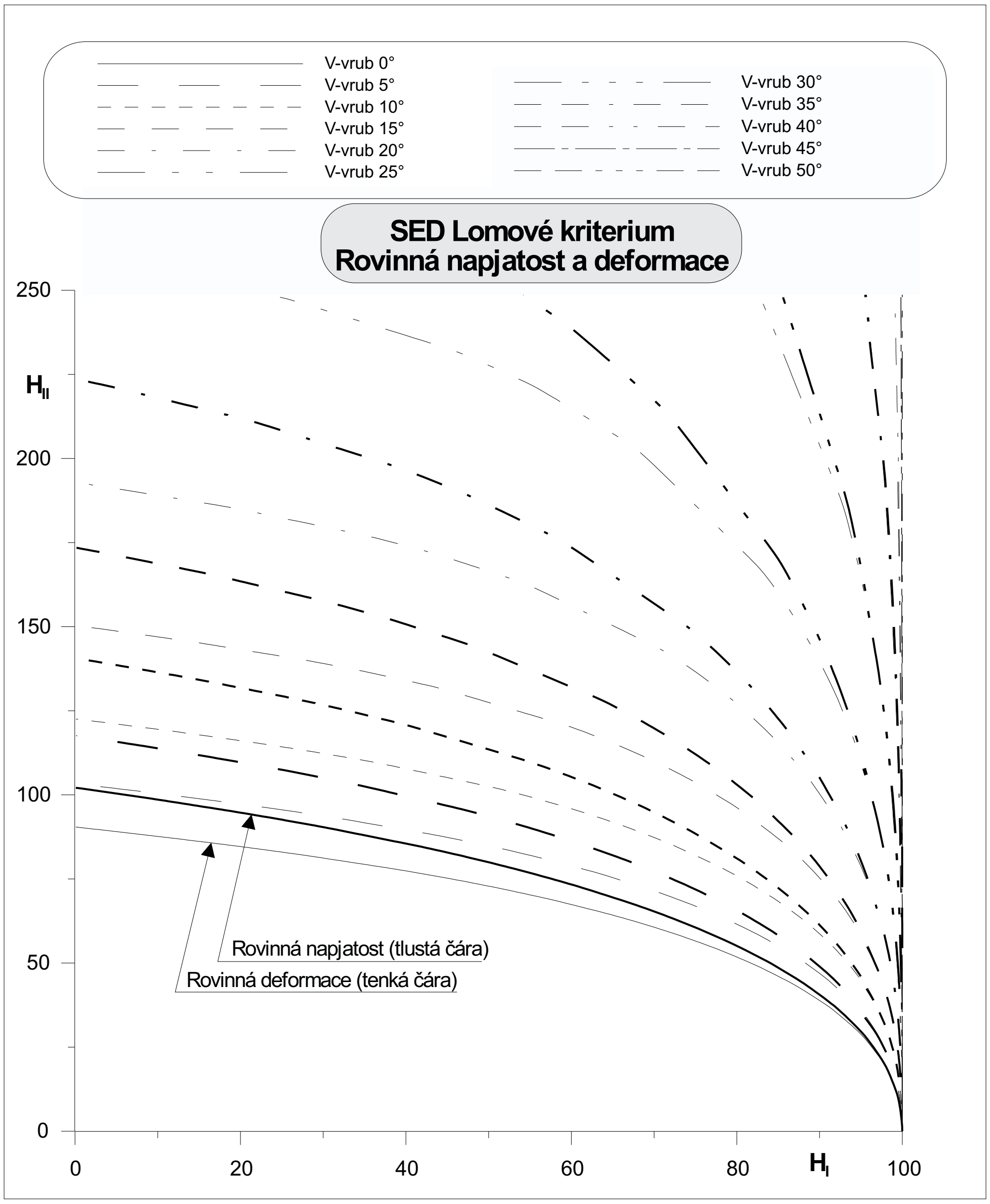
pro stejné poměry $\tan(\gamma) = \frac{H_{II}}{H_I} = \frac{H_{II\gamma}}{H_{I\gamma}}$. Tedy:

$$\sqrt{H_I^2 + H_{II}^2} < H_{I\gamma}\sqrt{1 + \tan^2(\gamma)} \tag{34}$$

kde hodnoty H_I a H_{II} získáme z numerického řešení konkrétního tělesa s V-vrubem pro danou geometrii a okrajové podmínky.

Lomové kriterium V-vrubů namáhaných kombinovaným módem je znázorněno na obr. 5. Hodnoty bodů o souřadnicích $[H_{I\gamma}, HII\gamma]$ jsou vypočítány pro $H_{Ith} = 100 MPa.m^{p_I}$, resp. $H_{IC} = 100 MPa.m^{p_I}$, pro hodnotu polární souřadnice $r = 0{,}001 m$, hodnotu $\nu = 1/3$ a případ rovinné napjatosti a rovinné deformace.

K šíření trhliny z V-vrubu nedojde, jestliže bod o souřadnicích $[H_I, H_{II}]$ (tyto hodnoty jsou vypočítány pro danou geometrii a zatížení numericky) bude ležet pod křivkou odpovídající danému úhlu otevření V-vrubu.



Obrázek 5: Lomové kriterium V-vrubu namáhaného kombinací módů I + II ($H_{Ith} = 100MPa.m^{p_I}$, resp. $H_{IC} = 100MPa.m^{p_I}$, $r = 0.001m$, $\nu = 1/3$)

6 Stanovení poměru H_{II}/H_I metodou konečných prvků

Při kombinovaném namáhání, kdy je třeba stanovit zobecněné faktory intenzity napětí pro oba módy H_I a H_{II}, můžeme tyto stanovit každý zvlášť např. pomocí známých přímých metod [10] nebo pomocí metody integrální [11], nebo můžeme stanovit např. pouze H_I a následně stanovit poměr H_{II}/H_I. Tento poměr je navíc nutné znát pro stanovení úhlu šíření trhliny z V-vrubu při kombinovaném namáhání. Pro výpočet poměru H_{II}/H_I s použitím metody konečných prvků použijeme metody z [4]. Ta vychází z podobné metody uvedené pro trhlinu v [12]. Označme celkové napětí odpovídající smíšenému módu namáhání σ_{ij}^T (tj. $\sigma_{ij}^T = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}$) a vyjádřeme složky napětí pro $\theta = 0$ (pro směr odpovídající ose V-vrubu):

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^T(\theta = 0) &= \sigma_{rr}^I(\theta = 0) = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi} r^{p_I}} S_{rr} \\
\sigma_{\theta\theta}^T(\theta = 0) &= \sigma_{\theta\theta}^I(\theta = 0) = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi} r^{p_I}} S_{\theta\theta} \\
\sigma_{r\theta}^T(\theta = 0) &= \sigma_{r\theta}^{II}(\theta = 0) = \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi} r^{p_{II}}} S_{r\theta}
\end{aligned} \tag{35}$$

kde

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= (2 - p_I - p_I^2) - q_I(2 - 3p_I + p_I^2) \\
S_{\theta\theta} &= (2 - 3p_I + p_I^2) + q_I(2 - 3p_I + p_I^2) \\
S_{r\theta} &= p_{II}(1 - p_{II}) + q_{II}(2 - 3p_{II} + p_{II}^2)
\end{aligned} \tag{36}$$

Hodnoty S_{rr}, $S_{r\theta}$ a $S_{\theta\theta}$ jsou uvedeny v tab. 1.

Poměr H_{II}/H_I je pak dán následujícím vztahem:

$$H_{II}/H_I = \sigma_{r\theta}^T(\theta = 0)/\sigma_{rr}^T(\theta = 0) r^{p_{II} - p_I} S_{rr}/S_{r\theta} \tag{37}$$

nebo ekvivalentně vztahem

$$H_{II}/H_I = \sigma_{r\theta}^T(\theta = 0)/\sigma_{\theta\theta}^T(\theta = 0) r^{p_{II} - p_I} S_{\theta\theta}/S_{r\theta} \tag{38}$$

Z rovnic (37) a (38) je patrné, že k určení poměru H_{II}/H_I postačuje znát výsledné složky napětí σ_{ij}^T v bodech se souřadnicemi $(r, \theta = 0)$. Přitom je nutné vzít v úvahu, že tyto rovnice platí přesně pouze pro limitní případ $r \to 0$, proto je třeba tuto hodnotu z okolních bodů spočítat.

7 Závěr

V článku je na základě znalosti rozložení hustoty deformační energie ukázáno odvození kriteria směru šíření trhliny z V-vrubu při kombinovaném namáhání. Dále je odvozeno kriterium stability V-vrubu s využitím faktoru hustoty deformační energie pro těleso s V-vrubem zatížené jednoduchýmy zatěžovacími módy I nebo II a pro kombinací těchto módů I + II. Tato kriteria je vhodné použít zvláště pro smíšený mód zatěžování. Navržená kriteria zároveň umožňují uvážit a rozlišit případ rovinné napjatosti nebo rovinné deformace.

α [deg]	α [rad]	S_{rr}	$S_{\theta\theta}$	$S_{r\theta}$
0	0	1,000	1,000	1,000
5	0.08727	0,998	1,002	1,052
10	0.17453	0,993	1,008	1,094
15	0.2618	0,985	1,021	1,121
20	0.34907	0,975	1,039	1,125
25	0.43633	0,962	1,066	1,098
30	0.5236	0,946	1,102	1,030
35	0.61087	0,928	1,151	0,910
40	0.69813	0,906	1,215	0,725
45	0.7854	0,880	1,298	0,463
50	0.87266	0,848	1,403	0,107
55	0.95993	0,808	1,537	
60	1.0472	0,758	1,705	
65	1.13446	0,693	1,916	
70	1.22173	0,610	2,179	
75	1.309	0,504	2,504	
80	1.39626	0,370	2,905	
85	1.48353	0,203	3,397	
90	1.5708	0,000	4,000	

Tabulka 1: Hodnoty funkcí S_{rr}, $S_{r\theta}$ a $S_{\theta\theta}$ z rovnic (36)

Podstatným rysem tohoto postupu je to, že pro navržená kriteria stability V-vrubu není nutné měření žádných nových materiálových charakteristik, protože vycházíme ze známých kritických, případně prahových hodnot faktoru intenzity napětí.

Je ukázáno stanovení poměru H_{II}/H_I metodou konečných prvků. Tento poměr je třeba stanovit pro konkrétní těleso s V-vrubem s danými okrajovými podmínkami a využívá se ke stanovení úhlu šíření trhliny z V-vrubu a tím i ke stanovení lomového kriteria.

Poděkování

Tento příspěvek byl vypracován v rámci řešení grantu GA ČR č. 106/01/0381
a S 2041001

Literatura

[1] Sih, G. C., Ho, J. W.: Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1991, 16: (3) 179 - 214

[2] Knésl, Z.: Vliv geometrie a zatížení tělesa s vrubem na únavovou životnost, *Zváranie*, 1991, 40: (4 - 5) 73 - 78

[3] Knésl, Z.: The determination of the crack propagation direction initiated at the notch tip, *Research report VZ*, 746/896, ÚFM ČSAV Brno, 1989

[4] Knésl, Z.: The application of the strain energy density concept to the determination of crack propagation direction initiated at a sharp notch tip, *Acta Technica ČSAV*, 1993, 38, 221 - 234

[5] Sih, G. C.: A special theory of crack propagation, *Mechanics of Fracture*, ed. G. C. Sih, Noordhoff Intern. Publishing, Leyden 1997

[6] Iida S. - Kabayashi A.S.: Crack propagation rate in 7075-T6 plates under cyclic tensile and transverse shear loading, *J. bas. Engineering*, ASME Trans., 1969, 91, 764 - 769

[7] Nuismer, R. J.: An energy release rate criterion for mixed mode fracture, *International Journal of Fracture Mechanics*, 11: (2), April 1975, 245 250

[8] Vaughan, H.: Crack propagation and the principal-tensile-stress criterion for mixed-mode loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 59: (3), 393 397

[9] Broek, D.: Elementary Engineering Fracture Mechanics, *Noordhoff International Publishing*, 1974

[10] Klusák, J. Knésl, Z.: Evaluation of the threshold values for fatigue crack propagation starting at the V-notch, *[CD-ROM] Proceedings of the abstracts VIIIth International conference Numerical Methods in Continuum Mechanics*, Kompiš, V. Žmindák, M. Maunder, E. A. W. Liptovský Ján, Slovak Republic. September 2000. pdf/014.

[11] Gröger, R.: Integral Metehods for Determination of Fracture Characteristics of the General Stress Concentrators, *Sborník konference Aplikovaná mechanika 2002*, 8. 11. 4. 2002

[12] Knésl, Z.: The stress intensity factor determination under mixed mode loading condition by an energy method, *Strojírenství*, 38, 163 166, 1988

KRITÉRIA STABILITY TRHLINY S VRCHOLEM NA BI-MATERIÁLOVÉM ROZHRANÍ

Luboš Náhlík [1]

Abstrakt: Cílem příspěvku je v rámci lineární elastické lomové mechaniky (LELM) analyzovat problém trhliny šířící se v okolí rozhraní dvou elastických materiálů. Pozornost je věnována případu, kdy se vrchol trhliny nachází právě na tomto rozhraní. Je uveden obecný postup umožňující formulovat kriteria stability singulárního koncentrátoru napětí. Na jeho základě jsou navržena dvě kriteria stability: první vychází z parametrů plastické zóny před vrcholem trhliny, druhé je založeno na energetickém principu, konkrétně na modifikaci Sihova faktoru hustoty deformační energie. Na základě uvedených kriterií jsou formulovány podmínky pro další šíření trhliny z bi-materiálového rozhraní a odhadnuto kritické napětí nutné k šíření trhliny z jednoho materiálu do druhého. Je učiněno vzájemné srovnání obou kriterií navržených a diskutována vhodnost a podmínky pro jejich použití v praxi.

1 Úvod[1]

Klasická lomová mechanika studuje chování trhliny v isotropním homogenním prostředí. V případě lineárního elastického kontinua lze ukázat (např. [2]), že rozdělení napětí v okolí vrcholu trhliny má vzhledem ke vzdálenosti r od trhliny singulární charakter a platí

$$\sigma_{ij} = K_I/\sqrt{2\pi r} f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II}/\sqrt{2\pi r} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III}/\sqrt{2\pi r} f_{ij}^{III}(\theta), \tag{1}$$

kde K_I, K_{II} a K_{III} jsou hodnoty součinitelů intensity napětí odpovídající jednotlivým módům namáhání a f_{ij}^{I}, f_{ij}^{II} a f_{ij}^{III} jsou známé funkce polárního úhlu θ. Pro rozdělení napětí je v tomto případě charakteristická singularita vzhledem ke vzdálenosti r, která je typu $1/\sqrt{r}$, tj. exponent singularity je pro všechny tři módy zatěžování stejný a je roven $1/2$.

Základní úlohou lomové mechaniky je rozhodnout, zda (a jak) se za daných podmínek bude trhlina šířit, tj. formulovat kriteria stability trhliny (lomová kriteria), případně popsat její další šíření.

Lomová mechanika vychází při analýze chování těles s trhlinami z předpokladu, podle kterého je pro chování trhliny rozhodující rozdělení napětí v oblasti blízko okolí jejího vrcholu (pro $r \longrightarrow 0$). V rámci LELM je v této oblasti napětí dostatečně přesně popsáno vztahem (1) a pro zadané okrajové podmínky (geometrie, zatěžování) je jednoznačně dáno hodnotami součinitelů intensity napětí K_I, K_{II} a K_{III}. Na základě vztahu (1) lze poté definovat další lomově-mechanické parametry, které určují chování trhliny (např. hnací sílu

[1]Ing. Luboš Náhlík, Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žižkova 22, 616 62 Brno a Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno,
(e-mail: nahlik@ipm.cz, tel.: 05/32290 351)

trhliny G, J-integrál). Srovnáním těchto parametrů s jejich kritickými hodnotami (které jsou chápány jako materiálové konstanty) lze pak stanovit podmínky stability (lomová kriteria) pro trhlinu. Jako příklad lze uvést K_{IC} kriterium pro křehký lom ve tvaru (omezíme se na normálové namáhání)

$$K_I(a,F_{appl}) < K_{IC}, \tag{2}$$

kde K_{IC} je lomová houževnatost, a délka trhliny a F_{appl} aplikované zatížení. Analogicky lze formulovat kriteria stability pomocí hnací síly trhliny G, příp. J-integrálu.

Poznamenejme, že pro výpočet hodnot součinitele intensity napětí K (příp. G, J) jsou používány numerické metody, zejména pak metoda konečných prvků (MKP) a metoda hraničních prvků (MHP).

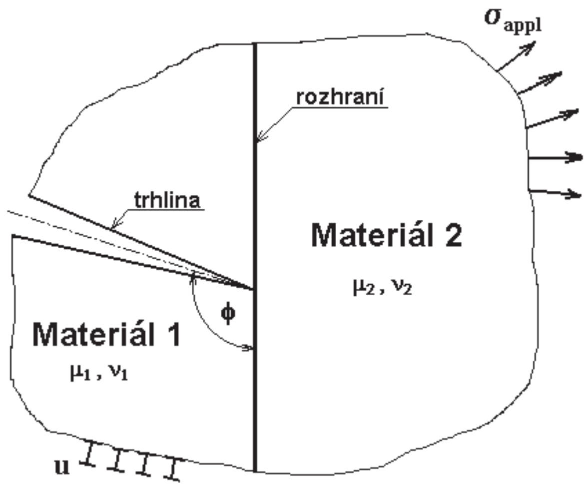
Studium chování trhlin v nehomogenních materiálech je v současné době předmětem širokého zájmu a vzhledem k praktickému významu (např. kompozity) se stalo cílem jak teoretického výzkumu, tak i praktických aplikací lomové mechaniky.

2 Popis napěťového pole trhliny s vrcholem na rozhraní dvou elastických materiálů [1]

Pro homogenní těleso je singularita v napětí v okolí vrcholu trhliny typu $r^{-1/2}$, viz (1). V případě trhliny s vrcholem na rozhraní dvou elastických materiálů je tato singularita obecně typu r^{-p}, kde $0 < p \neq 1/2 < 1$ závisí na elastických vlastnostech obou materiálů a úhlu ϕ, který svírá trhlina s rozhraním. V obecném případě může existovat singulárních členů více a hodnota exponentu singularity může být komplexní.

Výpočet napětí v okolí vrcholu trhliny který se nachází na rozhraní dvou materiálů se skládá (podobně jako pro homogenní těleso) ze dvou kroků. V první fázi se určí limitní analytickou analýzou tvar řešení. Toto řešení je obecné, nezávisí na geometrii a zatížení tělesa, závisí však na elastických vlastnostech obou materiálů a vzájemné poloze trhliny a rozhraní. Obvykle se toto řešení uvádí ve tvaru nekonečné řady, jejíž první členy (s multiplikativními konstantami, jejichž hodnoty z tohoto řešení neplynou a které odpovídají zobecněným součinitelům intensity napětí) jsou singulární vzhledem k souřadnici r. Tyto členy charakterizují rozložení napětí v okolí kořene trhliny pro potřeby LELM. Hodnoty exponentu singularity napětí p se získají jako řešení charakteristické rovnice, která je odvozena na základě okrajových podmínek. Tato rovnice se musí obvykle řešit numericky a hledáme řešení pro která platí $0 < Re(p) < 1$. Multiplikativní konstanty (odpovídající zobecněným součinitelům intensity napětí) se pak určí v druhé fázi řešení. Hodnoty těchto konstant jsou závislé na geometrii tělesa a předepsaných okrajových podmínkách a jsou úměrné velikosti vnějšího namáhání. Pro stanovení těchto multiplikativních konstant je nutno provést numericky kompletní napěťovou analýzu celého tělesa s trhlinou.

V literatuře lze nalézt obecná analytická řešení pro trhlinu orientovanou libovolně vzhledem k rozhraní např. [3],[4], popř. kolmou k bi-materiálovému rozhraní, např. [5],[6]. Výsledky analýz ukázaly, že v případě trhliny obecně orientované vzhledem k rozhraní je možné nalézt jedno nebo dvě řešení p splňující požadovanou nerovnost. Pro malé úhly ϕ je pro p známo jedno komplexní řešení v daném intervalu, pro ostatní úhly pak dvě reálná řešení, např. [3],[4].



Obrázek 1: Bi-materiálové těleso s trhlinou na rozhraní.

Poznamenejme, že v případě $\phi = 0$, tj. trhliny ležící v bi-materiálovém rozhraní, je reálná část exponentu singularity $Re(p) = 0{,}5$ a komplexní část řešení je závislá na aktuální kombinaci elastických konstant obou materiálů. Odpovídající řešení, které vyplývá z použitého modelu, pak trpí řadou neduhů, které je nutno odstranit, což se děje řadou dosti spekulativních kroků [7].

V případě, kdy existují dvě různá reálná řešení charakteristické rovnice p_1 a p_2, kde $0 < p_2 < p_1 < 1$, lze napětí v okolí vrcholu trhliny vyjádřit pomocí dvou singulárních členů ve tvaru

$$\sigma_{ij} = \frac{H_1}{\sqrt{2\pi}} f_{ij1}(\phi,\alpha,\beta,p_1,\theta) \cdot r^{-p_1} + \frac{H_2}{\sqrt{2\pi}} f_{ij2}(\phi,\alpha,\beta,p_2,\theta) \cdot r^{-p_2}, \tag{3}$$

kde $p_1 > p_2$ jsou exponenty singularity a f_{ij1}, f_{ij2} známé funkce polárního úhlu θ, materiálových kompozitních parametrů α,β definovaných např. v [8], a orientace trhliny vzhledem k rozhraní. H_1 a H_2 jsou zobecněné součinitele intensity napětí, které je nutno určit numericky. Existence dvou singulárních členů ve výrazu pro napětí způsobuje značné výpočetní komplikace a ztěžuje lomově-mechanický popis chování trhliny, viz [9]. Takový případ nastává pro úhel trhliny v intervalu přibližně (v závislosti na elastických konstantách obou materiálů) 30 – 90. Každému z exponentů singularity napětí přísluší i jiný součinitel intensity napětí H_1 resp. H_2, jenž v sobě zahrnuje jak normálový, tak i smykový mód namáhání. Příspěvky jednotlivých módů namáhání nelze v těchto součinitelích vzájemně odlišit.

Ve specielních případech kombinace elastických konstant obou materiálů a orientace trhliny může existovat pouze jedna singularita. Takovým případem je nejčastěji studovaný případ trhliny kolmé na rozhraní, kde pro libovolné kombinace materiálových parametrů existuje pouze jeden singulární člen ve výrazech pro napětí.

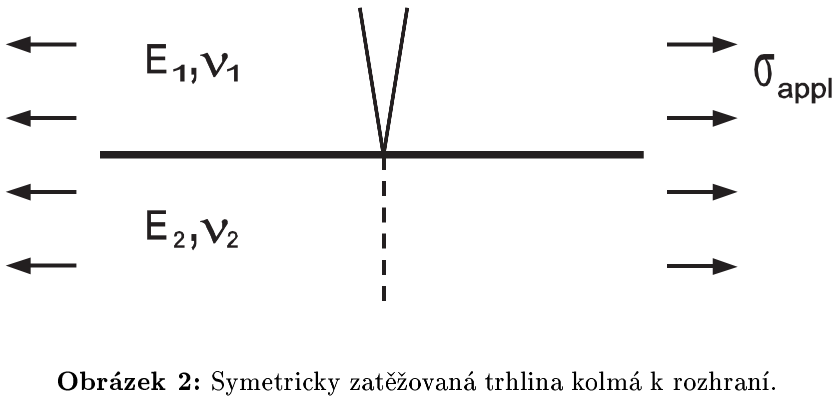
Podrobný postup určení pole napětí v okolí vrcholu trhliny, jenž se nachází na rozhraní dvou elastických materiálů, to znamená určení příslušných exponentů singularity napětí, zobecněných součinitelů intensity napětí a tvarů složek tenzoru napětí, byl několikrát na různých místech publikován a proto odkažme např. na [9], kde jsou patřičné postupy uceleně a detailně popsány.

3 Formulace kriteria stability pro trhlinu s vrcholem na rozhraní [1]

Trhlina s vrcholem na rozhraní dvou různých elastických materiálů představuje obecný singulární koncentrátor napětí. Abychom mohli formulovat kriterium stability pro tento případ, budeme v dalším předpokládat, že trhlina se bude v druhém materiálu M2 šířit stejným mechanizmem jako se v tomto materiálu šíří v případě homogenního prostředí. Tento předpoklad je přijatelný, v obou případech se jedná o singulární koncentrátory napětí a o jejich chování rozhodují veličiny odvozené pomocí průměrných hodnot složek napětí v určité malé oblasti v jejich okolí. Je tedy, i v tomto případě pro šíření trhliny rozhodující hodnota lomové houževnatosti K_{IC} pro materiál M2. Je však zřejmé, že v tomto případě nelze přímo použít kriteria typu (2) a to již i proto, že rozměry zobecněného součinitele intensity napětí H a lomové houževnatosti K_{IC} nejsou stejné.

Kriteriem stability (lomovým kritériem) obecného singulárního koncentrátoru napětí (s exponentem singularity různým od 1/2) rozumíme podmínky, které určují, kdy se z koncentrátoru začne šířit (případně je zde iniciována) trhlina. V našem modelu se jedná o nespojitý proces, exponent singularity se v případě dalšího šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu mění skokem na hodnotu 1/2, odpovídající homogennímu prostředí. V důsledku této skutečnosti nelze např. definovat hnací sílu trhliny G, která má nulovou hodnotu pro exponent singularity $p < 1/2$ a konverguje do nekonečna pro $p > 1/2$, [10].

V dalším se pro jednoduchost omezíme na případ existence jediného singulárního členu v rozvoji (3) a předpokládejme, že se jedná o normálový mód namáhání (pro stručnost nebudeme používat index I, tj. bude $K = K_I$ apod.). Takový případ nastane pokud je trhlina kolmá na rozhraní a vnější namáhání působí symetricky rovnoběžně s rozhraním, viz Obr. 2.



Obrázek 2: Symetricky zatěžovaná trhlina kolmá k rozhraní.

Rozdělení napětí v okolí vrcholu trhliny má pak tvar

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(p,\alpha,\beta,\theta) r^{-p}. \tag{4}$$

Postup při formulaci kriteria stability obecných singulárních koncentrátorů napětí lze založit na porovnání hodnot veličiny s jednoznačným fyzikálním významem, kterou určíme v případě trhliny v homogenním materiálu a v případě obecného koncentrátoru. Označme takovou veličinu L a předpokládejme, že ji můžeme stanovit (výpočtem) jako funkci proměnných, které jsou pro studovaný mechanizmus porušení rozhodující, tj. např. materiálových charakteristik, geometrie a zatížení tělesa, lomově-mechanických parametrů trhliny (včetně součinitelů intensity napětí) apod. V případě trhliny v homogenním materiálu je L zejména funkcí součinitele intensity napětí K, tj. $L = L(, K,)$. Obdobně v případě obecného singulárního koncentrátoru napětí bude tatáž veličina záviset na hodnotě zobecněného součinitele intensity napětí H, tj. $L = L(, H,)$. Předpokládáme-li v obou případech stejný mechanizmus porušení, budou mít v okamžiku porušení stability kritické hodnoty L_C veličiny L stejnou velikost jak v případě trhliny tak i v případě obecného koncentrátoru napětí, tj.

$$L_C(K_C) = L_C(H_C), \tag{5}$$

kde H_C je kritická hodnota zobecněného součinitele intensity napětí (zobecněná lomová houževnatost). Z rovnice (5) pak určíme relaci mezi H_C a K_C a kriterium stability pro obecný singulární koncentrátor napětí můžeme napsat ve tvaru

$$H(\sigma_{appl}) < H_C(K_C). \tag{6}$$

Uvedený postup je obecný a nezávisí na typu koncentrátoru napětí, např. [11]. Volba veličiny L závisí však na předpokládaném mechanizmu šíření trhliny. Např. pro štěpný lom předpokládáme, že veličina L představuje střední hodnotu složky napětí $\sigma_{\theta\theta}$ v určité oblasti před vrcholem koncentrátoru napětí (např. [12],[13]), v případě šíření únavových trhlin je výhodné použít jako veličinu L parametry plastické zóny v okolí vrcholu koncentrátoru, případně hustotu deformační energie. Tato veličina je výhodná i v případě, kdy se jedná o kombinovaný mód namáhání a umožňuje nám stanovit i směr šířící se trhliny. V případě, kdy je mechanizmus silněji ovlivněn plastickými deformacemi je vhodné použít jako L např. otevření trhliny apod.

Právě kriterii stability vhodnými pro případ šíření únavové trhliny přes rozhraní dvou elastických materiálů se budeme zabývat v dalším textu.

Výše uvedený postup je fenomenologický, zobecňuje přístup LELM na defekty netrhlinového charakteru a může být použit pro řešení celé řady praktických problémů. Výhodou tohoto postupu je i skutečnost, že pro jeho aplikaci není nutno experimentálně určovat žádné nové materiálové konstanty. Vzhledem ke komplikovanému rozměru veličiny H, $[H]$=MPa·m^p, je však nutno kritické hodnoty zobecněného součinitele intensity napětí H přepočítat na jinou veličinu, např. kritické napětí σ_{crit}.

Poznamenejme dále, že při aplikaci tohoto postupu vystupuje ve výsledných vztazích parametr, který má rozměr délky a který souvisí s mechanizmem porušení. Jeho stanovení, příp. volba jeho velikosti může být v některých případech problematická. Další omezení uvedeného postupu vycházejí z předpokladů o vlastnostech rozhraní a z aplikace předpokladů lineární elastické teorie pružnosti izotropního prostředí.

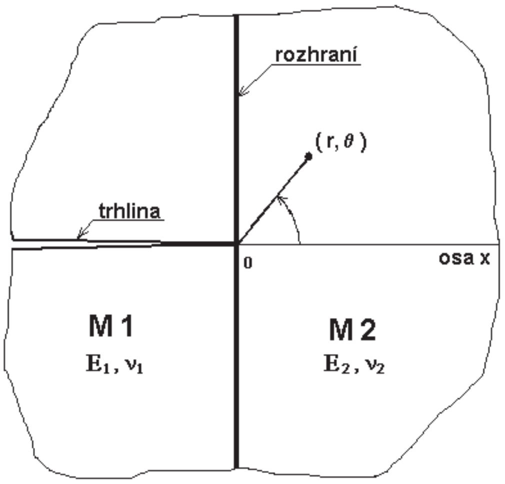
4 Kriterium stability založené na parametru plastické zóny

V rámci LELM existuje jednoznačná relace mezi velikostí plastické zóny a hodnotou součinitele intensity napětí. Této skutečnosti se dá využít i při sestavování kriteria stability únavové trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní. Jako řídící veličinu určující chování trhliny lze použít některou z veličin popisujících plastickou zónu, např. velikost plastické zóny ve směru šíření trhliny (tj. pro $\theta = 0$), viz např. [14], případně velikost plochy plastické zóny R_p.

Poznamenejme, že některého z parametrů popisujících plastickou zónu lze použít i při odhadu rychlosti šíření únavové trhliny, jak tomu bylo učiněno např. v [15],[16],[17], nebo v případě únavové trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní v [14],[18].

4.1 Plocha plastické zóny jako řídící veličina [9]

Problém, kterým se budeme zabývat v této kapitole je následující: trhlina šířící se v bimateriálovém prostředí má vrchol na rozhraní, viz Obr. 3. Na základě znalosti prahové hodnoty K_{th} pro únavové šíření trhliny v materiálu M2 a materiálových parametrů obou materiálů chceme stanovit prahovou hodnotu pro šíření trhliny z rozhraní do materiálu M2. Na základě znalosti této veličiny pak určit pro dané podmínky zatěžování mezní hodnoty vnějšího napětí σ_{crit} tak, že pro $\sigma_{appl} < \sigma_{crit}$ se trhlina na rozhraní zastaví a nebude se dále šířit do materiálu M2. Existuje celá řada modelů, které vysvětlují existenci prahových



Obrázek 3: Trhlina šířící se v bi-materiálovém prostředí s vrcholem na rozhraní dvou materiálů.

hodnot z různých aspektů. V rámci mechaniky kontinua jsou to především modely, které uvádějí do relace existenci a velikost prahových hodnot s kritickými veličinami popisujícími v oblasti okolí vrcholu trhliny např. energii, otevření trhliny, velikost plastických deformací, případně velikost plastické zóny, např. [19],[20].

V této části práce bude jako určující veličina použita velikost plastické zóny na čele únavové trhliny a jako její kritická hodnota je předpokládána její velikost odpovídající prahové hodnotě namáhání v homogenním materiálu. Takto byla autorem použita například v práci [18].

Velikost plastické zóny je dána Misesovou podmínkou:

$$\sigma_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6\sigma_{xy}^2}, \tag{7}$$

pro $\sigma_{eff} = \sigma_o$, kde σ_o je mez kluzu. Pro r_p (r_p je vzdálenost hranice plastické zóny od vrcholu trhliny, viz Obr. 4) vyjádřeno ze (7) platí:

$$r_p = \left(\frac{H_I}{\sigma_o}\right)^{\frac{1}{p}} \{ \frac{(-p+1)^2}{2\pi} [\, 6 g_R p(\sin(p\theta)\sin((-p-2)\theta) - \cos(p\theta)\cos((-p-2)\theta)) + 16\nu\cos(p\theta)^2\left(\nu+\frac{1}{4\nu}-1\right) + 3(g_R^2+p^2)\,]\, \}^{\frac{1}{2p}}, \tag{8}$$

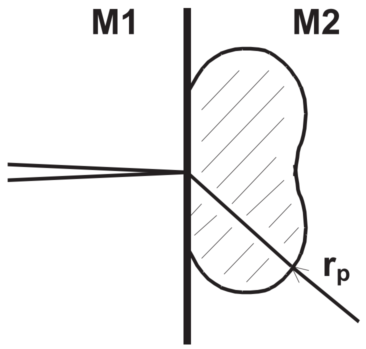
kde σ_o je mez kluzu materiálu M2, H_I zobecněný součinitel intensity napětí, p exponent singularity napětí a ν Poissonovo číslo materiálu M2. Funkce g_R je dána následujícím vztahem:

$$g_R = \lambda - \cos\lambda\pi - \frac{\beta[\alpha+2\lambda-(1+2\alpha-4\alpha\lambda^2)\cos\lambda\pi+(1+\alpha)\cos 2\lambda\pi]}{D(\lambda)}, \tag{9}$$

kde

$$D(\lambda) = 1+2\alpha+2\alpha^2-2(\alpha+\alpha^2)\cos\lambda\pi-4\alpha^2\lambda^2. \tag{10}$$

Velikost plastické zóny (plochy) $R_p(H_I)$, získáme numerickou integrací výrazu (8).



Obrázek 4: Plastická zóna v materiálu M2 v okolí vrcholu trhliny.

4.1.1 Výpočet prahové hodnoty H_{th}

Na základě uvedených úvah budeme předpokládat, že kritickou veličinou pro odhad prahových hodnot je velikost plastické zóny odpovídající zatížení na úrovni prahové hodnoty pro daný materiál. Plochu plastické zóny v homogenním materiálu (zde předpokládáme, že má elastické vlastnosti materiálu M2) můžeme vyjádřit následovně:

$$R_p = \left(\frac{K_{th}}{\sigma_o}\right)^4 f_{hom}(\nu), \tag{11}$$

kde

$$f_{hom}(\nu) = [\ \Big(64(12\nu^4\pi - 24\nu^3\pi + 21\nu^2\pi - 9\nu\pi + 32\nu^4 - 64\nu^3 + 52\nu^2 - \ldots$$
$$\ldots - 20\nu + 3) + 123\pi\ )/1024\pi^2\ ].$$

K_{th} je prahová hodnota součinitele intensity napětí materiálu M2.

V případě trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů lze pak velikost plastické zóny analogicky vyjádřit ve tvaru (vztah je uveden pro kritickou velikost odpovídající prahové hodnotě zobecněného součinitele intensity napětí $H_I = H_{th}$)

$$R_p = \left(\frac{H_{th}}{\sigma_o}\right)^{\frac{2}{p}} f(\alpha,\beta,\nu), \tag{12}$$

kde $f(\alpha,\beta,\nu)$ je známá funkce vzniklá integrací vztahu (8). Předpokládejme nyní, že pro $K_I = K_{th}$ a $H_I = H_{th}$, bude mít plocha plastické zóny R_p stejnou velikost v homogenním i nehomogenním případě: $R_p(H_I = H_{th}) = R_p(K_I = K_{th})$. Hodnotu H_{th} poté určíme porovnáním obou vztahů (11) a (12), tj.

$$H_{th} = K_{th}^{2p}\sigma_o^{1-2p}\left[\frac{f_{hom}(\nu)}{f(\alpha,\beta,\nu)}\right]^{\frac{p}{2}}. \tag{13}$$

Platí-li

$$H_I < H_{th}, \tag{14}$$

bude rychlost šíření únavové trhliny nulová, tj. únavová trhlina se nebude šířit do materiálu M2.

Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že k určení prahové hodnoty H_{th} není třeba žádných dalších měření na reálných vzorcích, ale vystačíme s hodnotou K_{th} určenou pro materiál M2.

Poznamenejme, že výše uvedeného postupu lze použít stejným způsobem i pro stanovení hodnot H_{IC}, při kterých dojde k nestabilnímu šíření trhliny, dosazením velikosti lomové houževnatosti K_{IC} materiálu M2 do vztahu (13).

4.1.2 Určení kritického napětí

Aplikace kritéria stability (14) umožňuje odhad kritického napětí σ_{crit}. Jestliže vnější aplikované napětí $\sigma_{appl} > \sigma_{crit}$ trhlina se bude šířit dále z rozhraní do druhého materiálu. Hodnota σ_{crit} závisí na geometrii a okrajových podmínkách, na kompozitních parametrech α,β a na prahové hodnotě K_{th} druhého materiálu.

Znalost σ_{crit} umožní rozhodnout, zda se trhlina na rozhraní zastaví, nebo se bude šířit dále do druhého materiálu.

Ze znalosti H_I (určeného numericky) a H_{th} (stanoveného pomocí vztahu (13)) určíme kritické napětí σ_{crit} následovně:

$$\sigma_{crit} = \frac{H_{th}}{H_I(1\text{MPa})} \cdot 1[\text{MPa}], \tag{15}$$

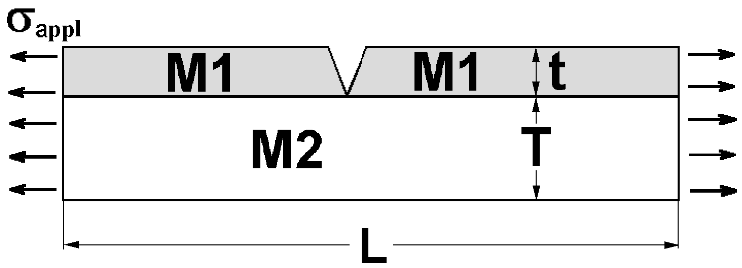
kde $H_I(1\text{MPa})$ je H_I určený pro $\sigma_{appl} = 1$ MPa a násobení 1 MPa je čistě formální.

Shrneme-li výše uvedený postup, tak ke stanovení kritického napětí σ_{crit} je zapotřebí:

1. Určit kompozitní parametry α,β a hodnotu exponentu singularity napětí p.
2. Za pomoci systému MKP určit velikost složky napětí σ_{yy}.
3. Stanovit hodnotu zobecněného součinitele intensity napětí H_I pro zadané aplikované napětí σ_{appl}.
4. Ze vztahu (13) určit prahovou hodnotu H_{th}.
5. Z podmínky stability (14) určit, zda se bude trhlina dále šířit.
6. Za pomoci vztahu (15) určit kritické napětí σ_{crit}, při kterém se trhlina začne šířit z rozhraní do sousedního materiálu.

4.2 Příklad aplikace

Mějme tahový vzorek, viz Obr. 5, zatížený σ_{appl} = 300 MPa. Materiál M2 má σ_o = 600 MPa, K_{th} = 5 MPa.m$^{1/2}$. Zvolme $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$. Hodnota K_I homogenního tělesa při aplikovaném zatížení 300 MPa je 18,83 MPa.m$^{1/2}$. Vypočítané hodnoty jsou obsaženy v tabulce Tab. 1.

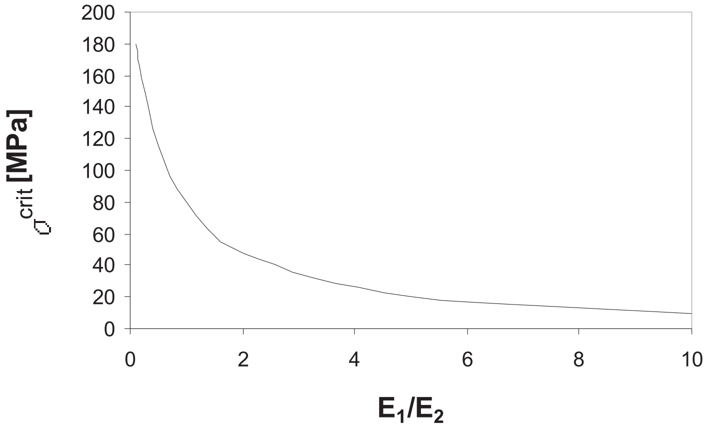


Obrázek 5: Model bi-materiálového tělesa. Pro výpočty bylo zvoleno: T = 15 mm, t = 1 mm, L = 60 mm .

E_1/E_2	α	β	p	H_I [MPa·m^p]	H_{th} [MPa·m^p]	σ_{crit} [MPa]
0,1	-0,321	0,1	0,33277	17,45e-2	31,45	180,3
0,2	-0,286	0,2	0,36621	13,90e-2	25,04	157,9
0,5	-0,179	0,5	0,43389	9,02e-2	10,48	116,2
1,0	0	1,0	0,50000	6,28e-2	5,00	79,7
2,0	0,357	2,0	0,57451	4,49e-2	2,14	47,6
5,0	1,429	5,0	0,67885	3,22e-2	0,66	20,4
10,0	3,214	10,0	0,75360	3,15e-2	0,30	9,5

Tabulka 1: Hodnoty p, H_I (přepočítané na zatížení 1 MPa), H_{th} a σ_{crit}.

V tabulce Tab. 1 jsou vidět hodnoty H_I určené pro aplikované zatížení 1 MPa přímou metodou. Dále příslušné prahové hodnoty H_{th} určené dle vztahu (13) (stejně tak je možné určit i hodnoty H_{IC}), odpovídající $\sigma_o = 600$ MPa a kritické napětí σ_{crit}, při kterém se trhlina začne šířit z rozhraní do materiálu M2 (substrátu). σ_{crit} je určeno dle (15) pro $\sigma_o = 600$ MPa.



Obrázek 6: Průběh prahového napětí σ_{crit} při němž dojde k šíření trhliny přes bi-materiálové rozhraní v závislosti na E_1/E_2.

5 Kriterium stability založené na koncepci zobecněného faktoru hustoty deformační energie [9]

5.1 Zobecněný faktor hustoty deformační energie

Faktor hustoty deformační energie S byl původně odvozen Sihem např. [21],[22],[23] pro trhliny v homogenních materiálech. V dalším uveďme modifikaci Sihova zobecněného faktoru hustoty deformační energie Σ pro trhlinu s vrcholem na materiálovém rozhraní, respektive pro obecný singulární koncentrátor napětí.

5.1.1 Hustota deformační energie

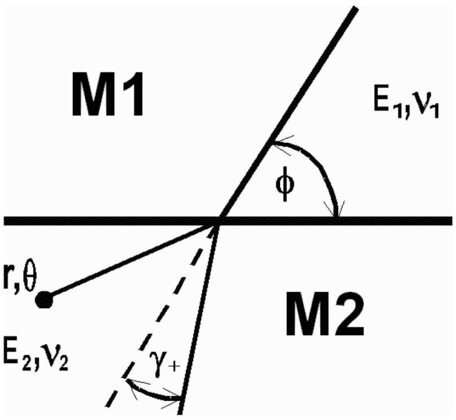
Hustota deformační energie w je dána výrazem

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij}, \tag{16}$$

kde σ_{ij} a ε_{ij} jsou odpovídající složky přetvoření a napětí, dV je objemový element.

Omezíme-li se na rovinnou úlohu, tak w můžeme vyjádřit následovně (uvažujeme pouze materiál M2)

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{16\mu_2}[k(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2], \tag{17}$$



Obrázek 7: Trhlina s vrcholem na rozhraní dvou materiálů, orientovaná pod úhlem ϕ vůči rozhraní. Směr dalšího šíření trhliny je dán úhlem γ.

kde pro stav rovinné deformace je $k = (1 - 2\nu_2)$, nebo $k = (1 - \nu_2)/(1 + \nu_2)$ pro stav rovinné napjatosti. Konstanta μ_2 je modul pružnosti ve smyku a ν_2 je Poissonovo číslo materiálu M2.

5.1.2 Rozdělení hustoty deformační energie

Výraz pro hustotu deformační energie v okolí vrcholu trhliny můžeme vyjádřit substitucí vztahů pro složky napětí do relace (17). Poté dostaneme

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{r}\left[A_{11}H_1^2 + 2A_{12}H_1H_2 + A_{22}H_2^2\right], \tag{18}$$

kde A_{11}, A_{12} a A_{22} jsou funkce polárního úhlu θ, kompozitních parametrů α,β úhlu ϕ mezi trhlinou a rozhraním a vzdálenost r od vrcholu trhliny. H_1 a H_2 jsou hodnoty zobecněných součinitelů intensity napětí (je použito značení arabskými číslicemi neboť oba dva součinitele intensity napětí v sobě zahrnují jak smykový, tak i normálový mód namáhání, které nejdou vzájemně odlišit a značení římskými číslicemi, jak je obvyklé u homogenních těles, by bylo v tomto případě zavádějící).

5.1.3 Faktor hustoty deformační energie

Výraz (18) můžeme napsat ve formě

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{\Sigma(\alpha,\beta,\theta,\phi,r)}{r}, \tag{19}$$

kde

$$\Sigma = A_{11}H_1^2 + 2A_{12}H_1H_2 + A_{22}H_2^2. \tag{20}$$

Veličina Σ je zobecněný faktor hustoty deformační energie a je v dalším použita pro formulaci kritéria stability. Na rozdíl od faktoru hustoty deformační energie pro homogenní tělesa S, je zobecněný faktor hustoty deformační energie Σ závislý na vzdálenosti r od vrcholu trhliny, viz dále vztah (25).

Poznamenejme, že v homogenním případě je $H_1 = K_I$ a $H_2 = K_{II}$ a

$$\Sigma = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 = S, \tag{21}$$

kde S je faktor hustoty deformační energie zavedený Sihem.

5.2 Formulace kriteria stability

Teorie založená na koncepci hustoty deformační energie pro trhliny v homogenním materiálu (tj. pro exponent singularity $p = 1/2$) vychází ze dvou základních hypotéz o šíření trhliny:

- Trhlina se bude šířit ve směru, kde je hustota deformační energie S minimální a
- kritická hodnota faktoru hustoty deformační energie $S = S_{cr}$ je určující pro její další šíření.

Poznamenejme, že S_{cr} je materiálová charakteristika a ve speciálních případech může být v relaci s K_{IC}, lomovou houževnatostí materiálu, respektive s prahovou hodnotou K_{th}.

Podobně jako pro trhlinu v homogenním tělese je za pomoci hustoty deformační energie definován zobecněný faktor hustoty deformační energie Σ pro trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní (tj. pro exponent singularity $p \neq 1/2$). Opětovně, z první hypotézy můžeme odhadnout směr šíření trhliny ve druhém materiálu (viz Obr. 7) a z druhé počátek jejího šíření. Mimoto, předpokládáme-li, že přítomnost rozhraní ovlivní šíření trhliny do druhého materiálu pouze kvantitativně, a že mechanismus šíření bude stejný, obdržíme

$$S_{cr} = \Sigma_{cr}(r), \tag{22}$$

kde r je neznámá vzdálenost od vrcholu trhliny, ve které kritérium aplikujeme. Podmínku stability potom můžeme zapsat ve formě

$$\Sigma < \Sigma_{cr}. \tag{23}$$

Aplikace kritéria stability (23) umožňuje odhad kritického napětí σ_{crit}, což bude učiněno dále v textu.

5.2.1 Kriterium stability pro normálový mód zatížení

Uvažujeme-li trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní s vrcholem na tomto rozhraní a zatížení rovnoběžné s rozhraním, viz Obr. 2, napětí v okolí vrcholu trhliny odpovídá normálovému módu zatížení a $H_2 = 0$. Trhlina se tedy bude dále šířit kolmo z rozhraní do druhého materiálu. V tomto případě pro exponent singularity p a danou kombinaci materiálů existuje v intervalu (0,1) pouze jedno reálné řešení. Potom lze výraz (20) zapsat ve formě

$$\Sigma = A_{11}H_1^2, \tag{24}$$

kde

$$\begin{aligned} A_{11} = {} & \frac{\lambda^2}{4\mu_2} r^{\frac{1}{2}-p} [\, 4k(\cos(\lambda-1)\theta)^2 + (g_R\cos(\lambda-1)\theta + (\lambda-1)\cos(\lambda-3)\theta)^2 + \ldots \\ & \ldots + (g_R\sin(\lambda-1)\theta + (\lambda-1)\sin(\lambda-3)\theta)^2 \,], \end{aligned} \tag{25}$$

a

$$\lambda = 1 - p.$$

Funkce g_R byla uvedena již dříve jako (9).

Ze vztahu (23) plyne, že trhlina se bude dále šířit jestliže

$$H_1 > H_{th}, \tag{26}$$

kde H_{th} je prahová hodnota zobecněného součinitele intensity napětí pro normálový mód namáhání. Porovnáním vztahu (24) s následujícím vztahem pro homogenní případ

$$S_{cr} = K_{th}^2 \frac{1 - 2\nu}{4\mu}, \tag{27}$$

a za předpokladu, že $\theta = 0$, získáme hledaný výraz pro H_{th}

$$H_{th} = \left(\frac{1 - 2\nu_2}{(1-p)^2(4(1 - 2\nu_2) + (g_R - p)^2)} \right)^{\frac{1}{2}} r^{p-\frac{1}{2}} K_{th}. \tag{28}$$

Poznamenejme, že ve vztazích (25) a (27) záměrně chybí člen $\sqrt{\pi}$ neboť tento při porovnání ve vztahu (28) vypadne. Již dříve popsaným postupem můžeme nyní určit i kritické napětí σ_{crit}:

$$\sigma_{crit} = \frac{\left(\frac{1-2\nu_2}{(1-p)^2(4(1-2\nu_2)+(g_R-p)^2)} \right)^{\frac{1}{2}}}{H_1(1\text{MPa})} r^{p-\frac{1}{2}} K_{th}. \tag{29}$$

Jestliže kritické napětí $\sigma_{crit} < \sigma_{appl}$, trhlina se bude šířit dále z rozhraní do druhého materiálu. Hodnota σ_{crit} závisí na geometrii a okrajových podmínkách, na kompozitních parametrech α,β, na úhlu ϕ, který svírá trhlina s rozhraním a na prahové hodnotě K_{th} materiálu M2. Na rozdíl od homogenního tělesa, je v tomto případě podmínka stability, a tudíž i velikost kritického napětí σ_{crit}, závislá na vzdálenosti r, ve které je podmínka aplikována.

Jak již bylo výše uvedeno, toto kriterium není nezávislé na vzdálenosti r ve které ho aplikujeme, proto je třeba tuto vzdálenost vhodným způsobem zvolit. Protože se pohybujeme v oblasti vysokocyklové únavy, ve které hraje významnou roli při šíření trhliny velikost plastické zóny před jejím vrcholem, zvolme tuto vzdálenost jako $r = r_p$. Tak také byla volena v následujícím numerickém příkladě.

5.2.2 Příklad aplikace

Uvažujme opět tahový bi-materiálový vzorek, viz Obr. 5, s trhlinou kolmou k bi-materiálovému rozhraní, zatížený stejně jako v předchozí kapitole. K výpočtu bylo použito zobecněného faktoru hustoty deformační energie a vztahu (29). Jako vzdálenost r, ve které bylo kriterium aplikováno, byla zvolena velikost plastické zóny před vrcholem trhliny, tedy $r = r_p$. Výsledné hodnoty kritického napětí, při kterém se trhlina začne šířit z rozhraní do materiálu M2 jsou uvedeny v tabulce Tab. 2.

E_1/E_2	σ_{crit} **[MPa]**
0,2	154
0,5	106
1,0	80
2,0	55
5,0	43

Tabulka 2: Kritická napětí pro trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní určená dle vztahu (29).

5.3 Kriterium stability obecného singulárního koncentrátoru napětí

Máme-li obecný singulární koncentrátor napětí (např. trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, V-vrub, V-vrub s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní), a uvažujeme-li obě singularity napětí, jež se v těchto případech obecně mohou vyskytnout, je rozdělení napětí v okolí takovéhoto koncentrátoru dáno vztahem (3). Pro případ existence dvou singularit napětí je výhodné použít kriteria stability popsaného v kapitole 5.2.

Ve vztahu (20) pro zobecněný faktor hustoty deformační energie potom bude:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{16\mu} r^{1-2p_1}[k(f_{rr1} + f_{\theta\theta 1})^2 + (f_{rr1} - f_{\theta\theta 1})^2 + 4f_{r\theta 1}^2] \\
A_{12} &= \frac{1}{16\mu} r^{1-p_1-p_2}[(k+1)(f_{rr1}f_{rr2} + f_{\theta\theta 1}f_{\theta\theta 2}) + \dots \\
&\dots + (k-1)(f_{rr1}f_{\theta\theta 2} + f_{\theta\theta 1}f_{rr2}) + 4f_{r\theta 1}f_{r\theta 2}] \\
A_{22} &= \frac{1}{16\mu} r^{1-2p_2}[k(f_{rr2} + f_{\theta\theta 2})^2 + (f_{rr2} - f_{\theta\theta 2})^2 + 4f_{r\theta 2}^2],
\end{aligned} \tag{30}$$

kde

$$\begin{aligned}
f_{rr_1} = -\lambda_1 \Big[& a^{(1)}(\lambda_1+1)\sin(\lambda_1+1)\theta + b^{(1)}(\lambda_1+1)\cos(\lambda_1+1)\theta + \dots \\
& \dots + c^{(1)}(\lambda_1-3)\sin(\lambda_1-1)\theta + d^{(1)}(\lambda_1-3)\cos(\lambda_1-1)\theta \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{rr_2} = -\lambda_2 \Big[& a^{(2)}(\lambda_2+1)\sin(\lambda_2+1)\theta + b^{(2)}(\lambda_2+1)\cos(\lambda_2+1)\theta + \dots \\
& \dots + c^{(2)}(\lambda_2-3)\sin(\lambda_2-1)\theta + d^{(2)}(\lambda_2-3)\cos(\lambda_2-1)\theta \Big]
\end{aligned}$$

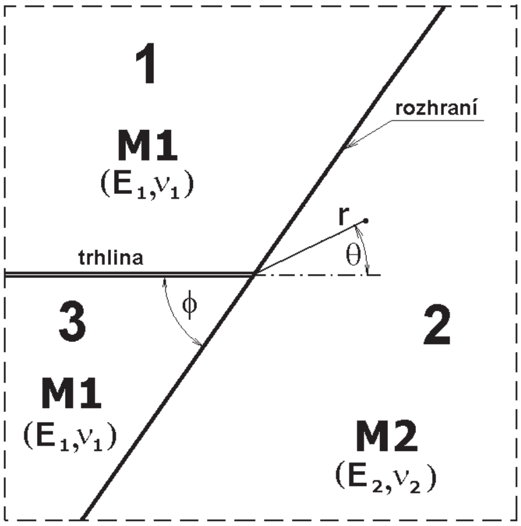
$$\begin{aligned}
f_{\theta\theta_1} = \lambda_1(\lambda_1+1) \Big[& a^{(1)}\sin(\lambda_1+1)\theta + b^{(1)}\cos(\lambda_1+1)\theta + \dots \\
& \dots + c^{(1)}\sin(\lambda_1-1)\theta + d^{(1)}\cos(\lambda_1-1)\theta \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\theta\theta_2} = \lambda_2(\lambda_2+1) \Big[& a^{(2)}\sin(\lambda_2+1)\theta + b^{(2)}\cos(\lambda_2+1)\theta + \dots \\
& \dots + c^{(2)}\sin(\lambda_2-1)\theta + d^{(2)}\cos(\lambda_2-1)\theta \Big]
\end{aligned}$$

$$f_{r\theta_1} = -\lambda_1 \Big[a^{(1)} (\lambda_1 + 1) \cos(\lambda_1 + 1)\theta - b^{(1)} (\lambda_1 + 1) \sin(\lambda_1 + 1)\theta + \ldots$$
$$\ldots + c^{(1)} (\lambda_1 - 1) \cos(\lambda_1 - 1)\theta - d^{(1)} (\lambda_1 - 1) \sin(\lambda_1 - 1)\theta\Big]$$

$$f_{r\theta_2} = -\lambda_2 \Big[a^{(2)} (\lambda_2 + 1) \cos(\lambda_2 + 1)\theta - b^{(2)} (\lambda_2 + 1) \sin(\lambda_2 + 1)\theta + \ldots$$
$$\ldots + c^{(2)} (\lambda_2 - 1) \cos(\lambda_2 - 1)\theta - d^{(2)} (\lambda_2 - 1) \sin(\lambda_2 - 1)\theta\Big],$$

kde λ_1,λ_2 jsou vlastní čísla problému (řešení charakteristické rovnice), přičemž $\lambda_1 < \lambda_2$. Poznamenejme, že $p_1 = 1 - \lambda_1$ a $p_2 = 1 - \lambda_2$. Konstanty a, b, c, d, náleží materiálu M2, tj. oblasti 2 (viz Obr. 8). Označení $^{(1)}$,$^{(2)}$ značí příslušnost k řešení λ_1 nebo λ_2.



Obrázek 8: Polární souřadný systém ve vrcholu trhliny. Těleso je tvořeno dvěma materiály M1 a M2. Oba materiály jsou odděleny rozhraním. Orientace bi-materiálového rozhraní vůči trhlině je dána úhlem ϕ.

5.3.1 Stanovení hodnoty σ_{crit}

Protože nemůžeme hodnotu Σ_{cr} stanovit přímo, budeme předpokládat, že trhlina se začne šířit z rozhraní v okamžiku, kdy zobecněný faktor hustoty deformační energie dosáhne hodnoty S_{cr}, určené pro homogenní případ (materiál M2), neboť mechanismus šíření trhliny předpokládáme v obou případech stejný, tedy $\Sigma_{cr} = S_{cr}$.

Kritické napětí poté určíme již z předchozích kapitol známým způsobem, tedy:

$$\sigma_{crit} = \frac{\Sigma_{cr}}{\Sigma(1\text{MPa})} \cdot 1[\text{MPa}], \tag{31}$$

kde Σ(1MPa) je Σ určený pro $\sigma_{appl} = 1$ MPa a násobení 1 [MPa] je čistě formální.

Poznamenejme, že takto formulované kriterium stability a určené kritické napětí, lze použít nejen pro případ trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, ale i pro případ jakéhokoliv singulárního koncentrátoru napětí, např. ostrý V-vrub.

Pro určení směru dalšího šíření trhliny se musí najít směr, ve kterém má Σ své minimum dle podmínky:

$$\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\right)_{\theta_m} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\theta^2}\right)_{\theta_m} > 0. \tag{32}$$

5.4 Shrnutí

V kapitole 5 bylo studováno chování trhliny s vrcholem na rozhraní dvou elastických materiálů v rámci jednoparametrové lineárně elastické lomové mechaniky a stanoveny podmínky, které určují, za jakých podmínek se trhlina bude šířit z rozhraní do druhého materiálu.

V případě konfigurace trhliny s vrcholem na rozhraní je pole napětí v okolí jejího vrcholu popsáno obecně pomocí dvou singulárních členů s exponenty singularity $0 < p2 \neq p1 < 1$. Konstanty úměrnosti u obou těchto singulárních členů jsou v tomto případě úměrné zobecněným součinitelům intensity napětí H_1 a H_2. Na rozdíl od trhliny v homogenním materiálu, nelze obecně v tomto případě jednotlivé módy namáhání explicitně odlišit. Existence dvou singularit napětí a skutečnost, že odpovídající exponenty singularity jsou různé od $1/2$ znemožňuje formulaci kriteria stability na základě postupů konvenční LELM.

Formulace kriteria stability trhliny na rozhraní dvou materiálů, navržená v této kapitole, vychází ze dvou předpokladů:

- pro popis napěťového pole v okolí vrcholu trhliny jsou postačující singulární členy v odpovídajícím rozvoji,
- mechanizmus šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu je stejný jako mechanizmus, kterým se trhlina šíří v homogenním prostředí odpovídajícímu druhému materiálu (tj. určující je hodnota lomové houževnatosti druhého materiálu, respektive prahová hodnota součinitele intensity napětí).

Lomově-mechanický popis trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů vyžaduje obecně výpočet pole napětí v okolí vrcholu trhliny s ohledem na orientaci trhliny vzhledem k rozhraní a formulaci podmínky stability pro singulární koncentrátor napětí s obecnou hodnotou exponentu singularity. Zde bylo pro formulaci kriteria stability použito Sihovo kriterium hustoty deformační energie.

Byl zobecněn Sihův faktor hustoty deformační energie pro studovanou konfiguraci. Na základě tohoto zobecnění byly formulovány podmínky určující směr šíření trhliny do druhého materiálu a podmínky její stability.

Poznamenejme závěrem, že presentované výsledky mohou být zobecněny a použity pro popis lomově-mechanického chování obecných singulárních koncentrátorů napětí, zejména pak pro formulaci kriteria jejich stability a tím rozšiřují platnost a použitelnost konvenční lineární elastické lomové mechaniky trhlin. Z praktického hlediska navržený postup poskytuje výsledky, které lze bezprostředně využít v lomové mechanice složených těles a kompozitů.

6 Diskuse

V rámci platnosti LELM byla v práci navržena obecná kriteria stability trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, určeno kritické napětí, při jehož dosažení se trhlina začne dále šířit z rozhraní do druhého materiálu.

Navržená kriteria stability byla založena na dvou základních principech určujících chování trhliny:

- parametru charakterizujícího plastickou zónu před čelem trhliny: velikosti plochy plastické zóny,
- energetickém: zobecněný faktor hustoty deformační energie.

Srovnání obou těchto přístupů pro trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní je uvedeno v tabulce Tab. 3.

Z tabulky Tab. 3 je vidět, že obě navržená kriteria poskytují podobné hodnoty kritického napětí σ_{crit}. K většímu rozdílu hodnot došlo až v případě velkého rozdílu poměru modulů pružnosti v tahu, tj. pro poměr $E_1/E_2 = 5$.

Obecně z tabulky Tab. 3 plyne, že šíří-li se trhlina z méně tuhého materiálu (E_1) do materiálu více tuhého (E_2), velikost napětí nutného pro její další šíření přes bi-materiálové rozhraní vzroste a poklesne rychlost šíření trhliny, za předpokladu vysokocyklové únavy. Toto je velmi významný fakt, neboť může dojít k situaci, že velikost vnějšího napětí bude nižší než napětí kritické $\sigma_{appl} < \sigma_{crit}$ a šířící se trhlina se na bi-materiálovém rozhraní zastaví a nebude se dále šířit do druhého materiálu. Tento jev by se dal s výhodou použít např. pro zlepšení odolnosti proti únavovému poškození kompozitních materiálů.

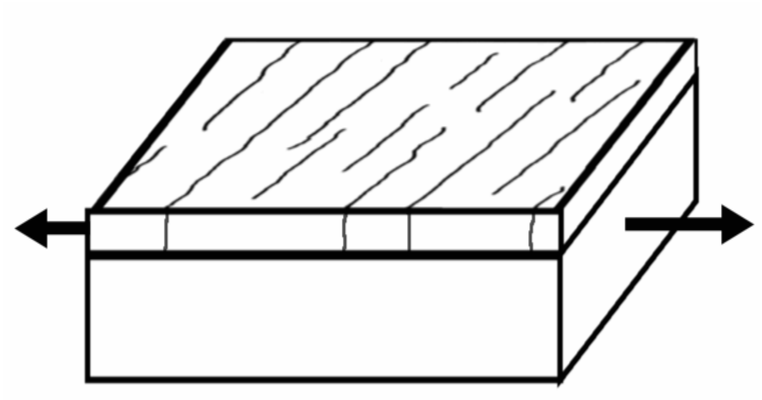
E_1/E_2	$\sigma_{crit}^{R_p}$ **[MPa]**	σ_{crit}^{Σ} **[MPa]**
0,2	158	154
0,5	116	106
1,0	80	80
2,0	48	55
5,0	20	43

Tabulka 3: Srovnání hodnot kritických napětí. $\sigma_{crit}^{R_p}$ je hodnota určená výpočtem přes velikost plochy plastické zóny před vrcholem trhliny dle vztahu (15) a σ_{crit}^{Σ} je napětí určené za pomoci zobecněného faktoru hustoty deformační energie dle vztahu (29).

Bude-li $E_1 > E_2$ poklesne hodnota σ_{crit} a zvýší se i rychlost šíření trhliny, což je kvalitativně v souladu s praxí.

V autorem publikovaných pracích, např. [24], byl studován i vliv Poissonových čísel na hodnoty H_I, resp. kritická napětí σ_{crit}. Jejich vliv je ovšem značně menší než vliv modulů pružnosti v tahu, proto bylo pro porovnání různých materiálových konfigurací využito zejména různých poměrů E_1/E_2.

Kriteria stability založeného na velikosti plochy plastické zóny R_p je vhodné použít zejména pro případ trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní a pro stanovení rychlosti šíření trhliny v takovémto případě (bylo tak učiněno např. v práci [18]). Výhodou je jeho nezávislost na místě použití, na rozdíl od kriteria založeného na zobecněném faktoru hustoty deformační energie. Nevýhodou pak jeho horší aplikovatelnost pro případ trhliny, jež svírá jiný než pravý úhel s rozhraním. Tato nevýhoda zcela zanikne u tenkých vrstev, např. ochranných povlaků, kde se trhliny (sítě trhlin viz, Obr. 9) šíří kolmo nebo téměř kolmo k bi-materiálovému rozhraní.



Obrázek 9: Síť trhlin v povrchové vrstvě tahově namáhaného tělesa.

Použití kriterií založených na parametrech plastické zóny před vrcholem trhliny, lze s výhodou použít v případě, že existuje, nebo uvažujeme, pouze jednu singularitu napětí a předpokládáme jako dominantní normálový mód namáhání. Uvažujeme-li dvě singularity napětí nebo smíšený mód zatížení, je třeba použít kriteria založeného na zobecněném faktoru hustoty deformační energie.

Kriterium založené na zobecněném faktoru hustoty deformační energie Σ je možné použít i v případech, kdy se trhliny více přiklání k bi-materiálovému rozhraní a pro zatížení smíšeným módem zatížení, tj. kombinací normálového (I) a smykového (II) módu. Další výhodou je možnost odhadu směru dalšího šíření trhliny po průchodu bi-materiálovým rozhraním a jeho použitelnost i pro jiné obecné singulární koncentrátory napětí než je trhlina s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, např. pro ostrý V-vrub. Nevýhodná je jeho závislost na vzdálenosti r od vrcholu trhliny (singulárního koncentrátoru napětí), ve které toto kriterium aplikujeme.

Volbu vhodné vzdálenosti r (stačí určit pouze řádově, neboť závislost na ní není nikterak výrazná), a potažmo i kvantitativní shodu obou kriterií stability, resp. hodnot kritických napětí, je nutno ověřit řadou časově a materiálově náročných cílených experimentů. Náročná je zejména příprava vhodných zkušebních vzorků, aby experiment mohl být dostatečně průkazný. Možnost provedení alespoň části potřebných experimentů a měření se v současné době rýsuje ve spolupráci s Ústavem materiálového inženýrství Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně.

V příkladech aplikací uvedených kriterií stability a výpočtech kritických napětí byl uvažován zejména výpočet prahových hodnot zobecněného součinitele intensity napětí, respektive napětí, při kterých se trhlina začne šířit z bi-materiálového rozhraní. Uvedené postupy lze ovšem stejným způsobem použít i pro odhad hodnot H_{IC}, tedy hodnot jakési zobecněné lomové houževnatosti.

Na závěr ještě poznamenejme, že obě uvedená kriteria přejdou pro hodnotu exponentu singularity $p = 1/2$, v kriterium stability pro homogenní tělesa, ve tvaru, v jakém jsou známa z klasické LELM.

V práci bylo navrženo kriterium stability trhliny (obecného singulárního koncentrátoru napětí), které bere v úvahu existenci dvou typů singularit napětí, respektive dvou zobecněných součinitelů intensity napětí, které se mohou v obecném případě vyskytnout. Většina publikovaných prací se omezuje pouze na konstatování, že v těchto případech existují dvě singularity, nicméně v dalším, autoři jednu (slabší) singularitu zanedbávají a dále se jí nevěnují. Cílem práce proto bylo vyplnit vzniklou mezeru a nevyhýbat se tomuto faktu. Proto bylo navrženo kriterium stability, jenž bere v potaz oba existující zobecněné součinitele intensity napětí a které umožňuje určit podmínky, za jakých se trhlina bude dále šířit z bi-materiálového rozhraní do druhého materiálu, respektive odhadnout směr jejího dalšího šíření ve druhém materiálu.

7 Závěr

Tato práce si kladla za cíl studovat chování trhliny s vrcholem na rozhraní dvou elastických materiálů v rámci jednoparametrové lineárně elastické lomové mechaniky a stanovit podmínky, které určují, zda se trhlina bude či nebude dále šířit z rozhraní do druhého materiálu.

Z lomově-mechanického hlediska představuje konfigurace trhliny s vrcholem na rozhraní singulární koncentrátor napětí. V klasické LELM je napěťové pole v okolí vrcholu trhliny v homogenním prostředí popsáno jediným singulárním členem typu $\sigma \sim K/r^{\frac{1}{2}}$, tj. exponent singularity napětí je roven 1/2. Konstanta úměrnosti K odpovídá součiniteli intensity napětí a v případě obecného (rovinného) namáhání lze napětí vyjádřit jako superpozici dvou členů odpovídajících normálovému (K_I) a smykovému (K_{II}) módu.

V případě konfigurace trhliny s vrcholem na rozhraní je pole napětí v okolí jejího vrcholu popsáno obecně pomocí dvou singulárních členů s exponenty singularity $0 < p2 \leq p1 < 1$. Konstanty úměrnosti u obou těchto singulárních členů jsou v tomto případě úměrné zobecněným součinitelům intensity napětí H_1 a H_2. Na rozdíl od trhliny v homogenním materiálu, nelze obecně v tomto případě jednotlivé módy namáhání explicitně odlišit. Existence obecně dvou singularit napětí a skutečnost, že odpovídající exponenty singularity jsou různé od 1/2 znemožňuje formulaci kriteria stability na základě postupů konvenční LELM.

Formulace kriterií stability trhliny na rozhraní dvou materiálů navržených v této práci vycházejí ze dvou předpokladů:

- pro popis napěťového pole v okolí vrcholu trhliny jsou postačující singulární členy v odpovídajícím rozvoji,
- mechanizmus šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu je stejný jako mechanizmus, kterým se trhlina šíří v homogenním prostředí odpovídajícímu druhému materiálu (tj. určující je hodnota lomové houževnatosti druhého materiálu, respektive prahová hodnota součinitele intensity napětí).

Lomově-mechanický popis trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů vyžaduje obecně výpočet pole napětí v okolí vrcholu trhliny s ohledem na orientaci trhliny vzhledem k rozhraní a formulaci podmínky stability pro singulární koncentrátor napětí s obecnou hodnotou exponentu singularity. V práci bylo pro formulaci kriteria stability použito Sihovo kriterium hustoty deformační energie a velikost plochy plastické zóny před vrcholem trhliny.

Hlavní získané výsledky práce lze shrnout takto:

- Byl modifikován obecný postup, který umožňuje formulovat kriteria stability pro obecné singulární koncentrátory napětí pro řešení studované problematiky. Tento postup byl aplikován na případ únavové trhliny šířící se přes rozhraní dvou materiálů, specielně pak na případ únavové trhliny s vrcholem na tomto rozhraní.
- Na základě obecného postupu byla zformulována dvě kriteria stability založená jednak na parametrech plastické zóny před vrcholem trhliny a na energetickém principu, konkrétně modifikaci Sihova faktoru hustoty deformační energie.
- Byl stanoven kvantitativně vliv kompozitních parametrů na prahové hodnoty pro šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu.
- Byl zobecněn Sihův faktor hustoty deformační energie pro studovanou konfiguraci. Na základě tohoto zobecnění byly formulovány podmínky určující směr šíření trhliny do druhého materiálu a podmínky její stability. Je diskutováno použití těchto podmínek ve studovaném případě pro odhad kritického napětí nutného pro šíření trhliny z jednoho materiálu přes rozhraní do materiálu druhého.

Významným rysem uvedených postupů, ať už pro určení prahových hodnot, či kritických napětí je, že nevyžadují zavedení a měření žádných nových materiálových charakteristik a jsou postaveny na známých charakteristikách (např. K_{th}, K_{IC}) určených pro homogenní materiál.

Poznamenejme závěrem, že presentované výsledky mohou být zobecněny a použity pro popis lomově-mechanického chování obecných singulárních koncentrátorů napětí, zejména pak pro formulaci kriteria jejich stability a tím rozšiřují platnost a použitelnost konvenční LELM trhlin. Z praktického hlediska představují navržené postupy výsledky, které lze bezprostředně využít v lomové mechanice složených těles a kompozitů.

Poděkování

Příspěvek byl vypracován za podpory grantu GA ČR č. 106/01/0381 a grantu GA AV K2076106.

Literatura

[1] Knésl, Z., Náhlík, L., Keršner, Z. Problematika trhlin s vrcholem na rozhraní dvou materiálů. Sborník semináře Únava a lomová mechanika 2002, Žinkovy 2002.

[2] Anderson, T.L. Fracture mechanics, Fundamentals and Applications, second edition. CRC Press, 1995.

[3] Bogy, D.B. On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface. Journal of Applied Mechanics, pp. 911-918, December 1971.

[4] Fenner, D.N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. International Journal of Fracture, Vol. 12, No. 5, pp. 705-721, October 1976.

[5] Meguid, S.A., Tan, M. Zhu, Z.H. Analysis of cracks perpendicular to bimaterial interfaces using a novel finite element. International Journal of Fracture 73, pp. 1-23, 1995.

[6] Lin, K.Y., Mar, J.W. Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at bi-material interface. International JOurnal of Fracture, Vol. 12, No. 4, pp. 521-531, August 1976.

[7] Rice, J.R. Fracture mechanics concept for interfacial cracks. Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 98-103, 1988.

[8] Dundurs, J. Elastic interaction of dislocation with inhomogeneities. Mathematical theory of dislocation, The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1969.

[9] Náhlík, L. Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů. Disertační práce, FSI VUT v Brně, 2002.

[10] Knésl, Z. A criterion of V-notch stability. International Journal of Fracture, vol. 48, R79-83, 1991.

[11] Klusák, J. Lineární elastická lomová mechanika V-vrubu.Disertační práce, FSI VUT v Brně, 2002.

[12] Knésl, Z., Knápek, A., Bednář, K. Evalution of the critical stress in bonded material with a crack perpendicular to the interface. Surface Modification Technologies XI, ed. T. S. Sudarshan, pp. 153-159. The Institute of Materials, London, 1998.

[13] Knésl, Z., Náhlík, L., Keršner, Z. Calcuation of the critical stress in two-phase materials. The International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, pp. 737-744, Cape Town, 2001.

[14] Knésl, Z., Klusák, J., Náhlík, L. Šíření únavových trhliny v okolí rozhraní dvou materiálů. Sborník konference Inženýrská mechanika 99, svazek 2, str. 367-372, Svratka, 1999.

[15] Duggan, T.V. A theory for fatique crack propagation. Engineering Fracture Mechanics, Vol. 9, pp. 335-342, 1997.

[16] Kang, T.S., Liu, H.W. Fatigue crack propagation and cyclic deformation at a crack tip. International Journal of Fracture, Vol. 10, No. 2, pp. 201-222, June 1974.

[17] Schwalbe, K.H. Approximate calculation of fatigue crack growth. International Journal of Fracture, Vol. 9, No. 4, pp. 381-395, December 1973.

[18] Náhlík, L., Knésl, Z., Vrbka, J. Propagation of a fatigue crack through a protectiva layer. Proceedings of Conference Surface Treatment 2001, Seville, 2001.

[19] Klesnil, M., Lukáš, P. Fatigue of Metallic Materials. Academia, Praha, 1992.

[20] Suresh, S. Fatigue of Materials. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[21] Sih, G.C. A special theory of crack propagation. In Mechanics of Fracture, ed. G.C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[22] Sih, G.C. Mechanics and physics of energy density theory. Theoretical and Applied Mechanics 4, pp. 157-173, 1985.

[23] Sih, G.C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. International Journal of Fracture, Vol. 10, No. 3, pp. 305-321, September 1974.

[24] Náhlík, L. Knésl, Z. Kritické napětí pro šíření trhlin v betonu. Sborník semináře problémy modelování. FAST VŠB-TU Ostrava, str. 65-71, 2002.

INTERAKCE DVOU TRHLIN OVLIVNĚNÁ EXISTENCÍ BI-MATERIÁLOVÉHO ROZHRANÍ

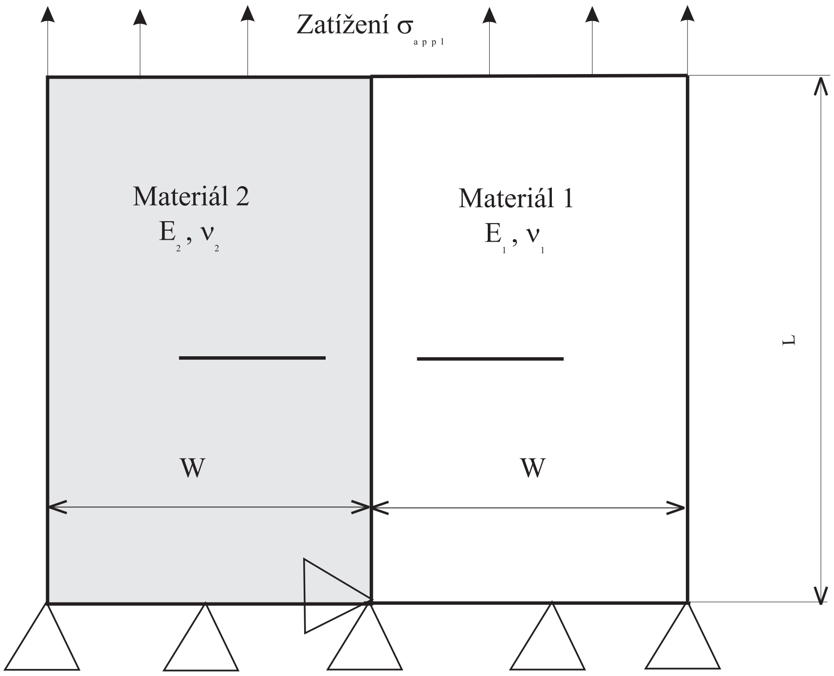
Stanislav Seitl [1]

Abstrakt: V příspěvku je prezentována problematika vlivu materiálového rozhraní na interakci dvou trhlin v rámci lineární elastické lomové mechaniky. Pro určení vlivu rozhraní byl navržen a testován numerický model tělesa, který je schopen zachytit vliv bi-materiálového rozhraní na interaci dvou trhlin v závislosti na studované konfiguraci a materiálových parametrech charakterizujících materiálové rozhraní. Tento vliv je zachycen přes normovanou hodnotu faktoru intensity napětí K. Popis analytické metody řešení, numerické výsledky a jejich srovnání jsou dále rozvedeny v příspěvku.

1 Úvod

Studium chování trhlin a následný odhad životnosti strojních součástí patří mezi nejvýznamnější aplikace lomové mechaniky při řešení problémů v technické praxi. Reálná tělesa často obsahují oblasti s různými materiálovými charakteristikami, které jsou od sebe odděleny materiálovým rozhraním. Typickým příkladem mohou být tělesa s povrchovými ochrannými vrstvami. V oblasti mikromechaniky lze považovat za takové materiálové nehomogenity i materiálová zrna v tělese. Existence rozhraní, kde se materiálové parametry mění skokem, podstatně ovlivňuje rozdělení napětí v tělese a tím i odolnost proti lomovému poškození. V důsledku specifických vlastností rozhraní může dojít ke zkrácení doby nutné pro iniciaci trhliny a následné chování trhliny je rovněž ovlivněno existencí rozhraní. Životnost takových materiálových systémů může tedy záviset na vlastnostech materiálového rozhraní a studium vlivu rozhraní na chování trhlin může být tedy klíčové pro řadu aplikací. Existence rozhraní dvou materiálů ovlivňuje vlastnosti složeného (nebo obecněji nehomogenního) tělesa v širokém rozmezí od úrovně efektů vyvolaných na úrovni mikrostruktury až po makroskopické jevy.
Cílem příspěvku je v rámci lineární elastické lomové mechaniky provést rozšiřující studii vlivu rozhraní dvou elastických materiálů na interakci dvou trhlin. Výpočtem hodnot lomově mechanických veličin pro jednu mikrostrukturně krátkou trhlinu v blízkosti materiálového rozhraní se zabývá práce [3]. V rámci mikrostruktury tělesa je existence trhliny ovliněna nejenom existencí rozhraní ale i trhlinou nacházející se v rámci sousedního materiálového zrna. Práce [2] se zabývá problematikou dvou kolmých planárních na materiálové

[1]Ing. Stanislav Seitl,
Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České Republiky, Žižkova 22, 616 62 Brno a
Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno,
(e-mail: seitl@ipm.cz, tel.: 05/32290 362)

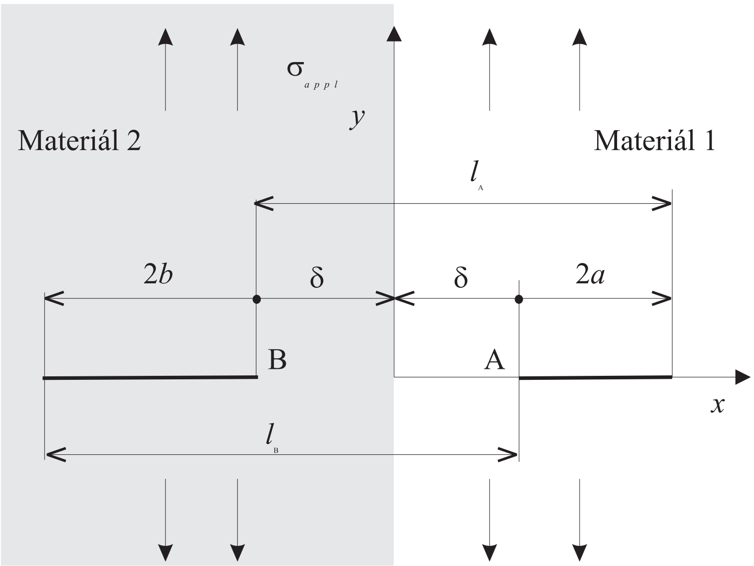


Obrázek 1: Schéma studovaného tělesa s okrajovými podmínkami, kde W=50mm a L=200 mm zatíženém vnějším jednotkovým namáháním $\sigma_{appl} = \sigma = 1$ MPa ve směru rozhraní.

rozhraní kolmých stejně dlouhých trhlin. V rámci tohoto příspěvku je pak pozornost zaměřena na vliv existence bimateriálového rozhrani na vzájemnou interakci dvou trhlin různých délek. Příspěvek obsahuje výpočtový model, který je schopen popsat interakci dvou planárních symetricky umístěných trhlin v blízkosti rozhraní dvou materiálů.

2 Výpočtový model

Studovaný model je uveden na obr. 1. s detailem na obr.2. V první části výsledků se budeme zabývat interakcí dvou trhlin v homogenním tělese v závislosti na změně délky trhlin a na změně jejich vzdálenosti. Délky trhlin 2a a 2b pak nabývaly hodnot 0.5; 1; 2; 4; 7 mm a vzdálenosti od materiálového rozhraní δ se měnily následovně: 0.01; 0.05; 0.25; 0.5 mm. Bi-materiálové rozhraní je modelováno jako hranice mezi dvěma různými elastickými materiály 1 a 2. Předpokládáme, že složky posuvu jsou na hranici spojité (dokonalá adhese). Každý z uvedených materiálů je charakterizován E, ν čili Youngovým modulem a Poissonovým číslem. Poměry $\frac{E_1}{E_2}$ použité pro výpočet nabývaly hodnot 0.25; 0.5; 1; 2; 4, přičemž hodnota E_1 byla volena pořád stejná 2.1e5 MPa. Poissonovo číslo bylo pro oba materiály ponechano stejné ν=0.33. V příspěvku je pro faktor intenzity napětí v kořeni A používá označení K_{IA}, pro faktor intenzity napětí v kořeni B, K_{IB} viz obr.2. Hodnoty faktorů K_{IA},K_{IB} jsou normovány hodnotou K_{IJ} což odpovídá hodnotě faktoru intenzity napětí pro samotnou trhlinu v nekonečném tělese viz 3.1.



Obrázek 2: Detail odpovídající studované konfigurace. Osa y odpovídá bi-materiálovému rozhraní.

3 Teoretický základ

Pokud vycházíme z teorie lineární elastické lomové mechaniky lze popis pole rozdělení napětí v tělese s trhlinou, zatíženou normálovým módem namáhání, charakterizovat pomocí faktoru intenzity napětí pro normálový mód K_I. Označíme-li (r,θ) polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, pak k popisu pole napětí lze užít následující vztah:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f^I_{ij}(\theta), \tag{1}$$

kde K_I je faktor intenizity napětí odpovídající normálovému módu namáhání a f^I_{ij} je známá funkce polárního úhlu θ. Jak plyne z kontextu v příspěvku se omezíme na trhliny zatížené pouze normálovým módem namáhání. Z uvedeného vztahu (1) je pak tedy vidět, že pomocí faktoru intenzity napětí pro normálový mód namáhaní K_I v rámci lineární elastické lomové mechaniky lze jednoznačně charakterizovat napětí v okolí kořene trhliny.

3.1 Analytické řešení pro homogenní materiál

Z literatury [4], [5] je známo analytické řešení pro danou trhlinovou konfiguraci pro homogenní materiál viz obr.2. Zde jsou uvedeny odpovídající výpočetní vztahy pro hodnoty faktoru intenzity napětí u sledovaných kořenů K_{IA} a K_{IB}:

$$K_{IA} = \sqrt{\pi b} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_A}} [1 - \frac{1}{\alpha_B} \{1 - \frac{E(k)}{K(k)}\}], \tag{2}$$

$$K_{IB} = \sqrt{\pi a} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_B}} [1 - \frac{1}{\alpha_A} \{1 - \frac{E(k)}{K(k)}\}], \tag{3}$$

kde

$$\alpha_A = \frac{2a}{l_A}, \alpha_B = \frac{2b}{l_B}, \tag{4}$$

$$k = \sqrt{\alpha_A \alpha_B}, \tag{5}$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \tag{6}$$

Pro srovnání vzájemného působení trhlin jsou hodnoty faktoru intenzity napětí v homogenním případě normovány hodnotou faktoru intenzity napětí pro jednu trhlinu v nekonečném tělese [1].

$$K_{IJ} = \sigma \sqrt{\pi a} \tag{7}$$

3.2 Numerické řešení

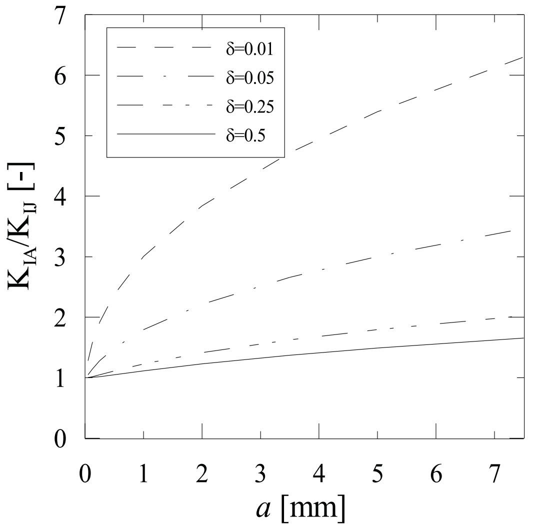
Numerické výpočty byly provedeny pomocí systému konečných prvků ANSYS 5.7. Úloha byla modelována jako rovinná za podmínek rovinné deformace s použitím prvků PLANE82 u kterých lze použít metodu posunutých středových uzlů. Singulární chování složek napětí v okolí kořene trhliny je u těchto prvků modelováno posunutím středových uzlových bodů do polohy odpovídající $\frac{1}{4}$ délky hrany elementu (měřeno od kořene trhliny). Použité okrajové podmínky při modelování plynou z obr.1. Velikost nejmenšího elementu (0.0001 mm) byla zvolena v závislosti na nejmenší studované vzdálenosti od rozhraní δ=0.01 mm. Samotný numerický výpočet hodnot faktorů intenzity napětí pak byl proveden pomocí příkazu KCALC, který je přímo implementovaný v systému ANSYS. Pro kontrolu byly hodnoty faktoru intenzity napětí pro normálový mód spočteny i s použitím J-integrálu.

4 Výsledky

Výsledky provedených výpočtů lze rozdělit do dvou částí. V první části je ukázáno jak se navzájem ovlivní dvě sousední trhliny v homogenním tělese (tedy bez vlivu materiálového rozhraní). V druhé části je pak tento vzájemný vliv eliminován normováním hodnot faktoru intenzity napětí pro trhlinu v homogenním tělese, ve snaze poukázat na skutečný čistý vliv bi-materiálového rozhraní na interakci dvou trhlin v jeho okolí.

4.1 Interakce dvou trhlin v homogenním tělese

Na obrázku 3 je znázorněn normovaný průběh hodnot faktorů intenzity napětí na délce trhliny pro trhliny o stejných délkách. Z grafu je vidět že pro nižší hodnoty vzdálenosti δ je vliv druhé trhliny větší. Pro malé delta a rostoucí velikost trhliny $2a$ hodnota faktoru intenzity napětí poměrně rychle roste.
Na obrázku 4 je znázorněn průběh normovaných hodnot faktorů intenzity napětí v jednotlivých kořenech A, B K_{IA}, K_{IB} pro případ, že velikost trhliny zůstává konstantní $2b$=1 mm. V levém grafu je vidět změna velikosti hodnoty K_{IA}. Při stejné vzdálenosti je vliv

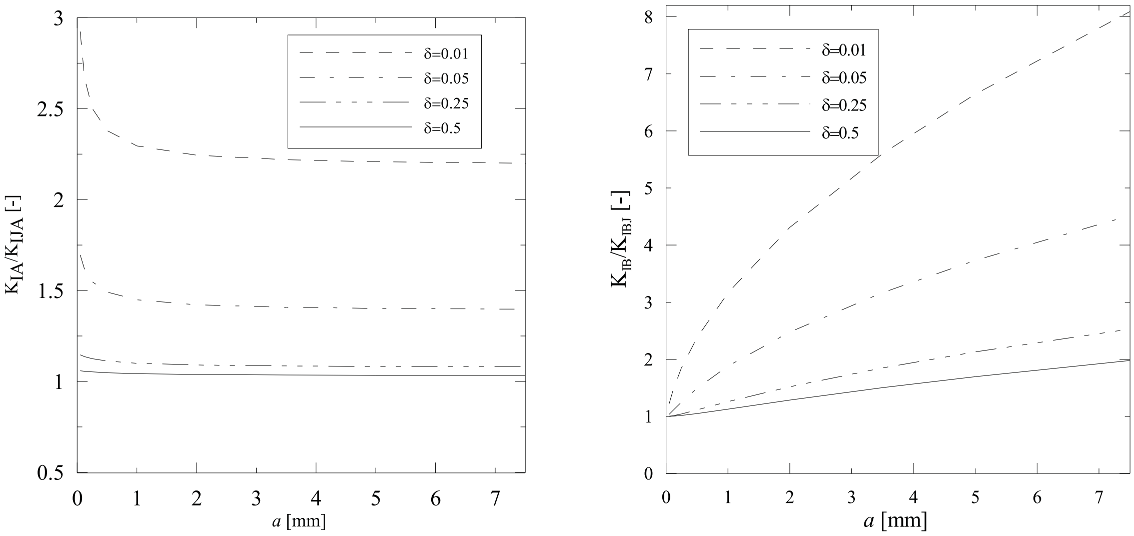


Obrázek 3: Vliv vzdálenosti sousedních trhlin v homogenním materiále při měnících se délce a na hodnotu faktoru intenzity napětí. Délka trhliny $2a$=$2b$.

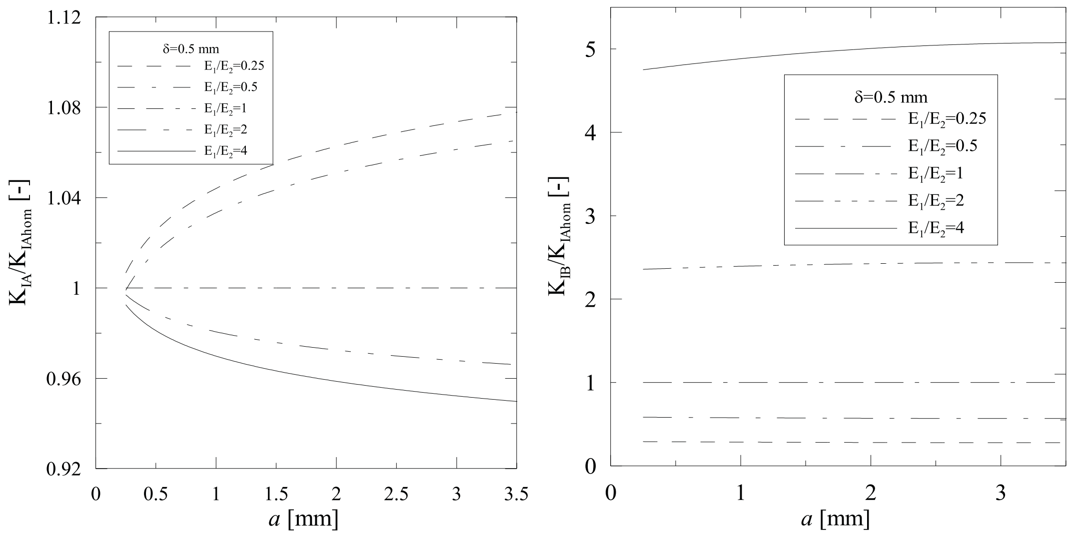
samotné existence sousední trhliny na průběh normovaných hodnot téměř konstantní, výrazné ovlivnění hodnoty na začátku grafu je způsobené tím, že trhlina délky *2b* je větší než *2a* a tím pádem přebírá dominantní roli sousední trhlina. V grafu umístěném vpravo je znázorněn průběh změny velikost K_{IB} čili hodnoty faktoru intenzity napětí pro trhlinu konstantní délky. S rostoucí délkou trhliny roste i hodnota K_{IB} a roste tím více čím menší je vzdálenost δ. Výsledky numerických výpočtů odpovídají analytickým vztahům (2-6). Tento fact dokumentuje, že můžeme použít numerický model k dalšímu studiu a to ke studiu vlivu materiálového rozhraní.

4.2 Vliv rozhraní na interakci dvou trhlin

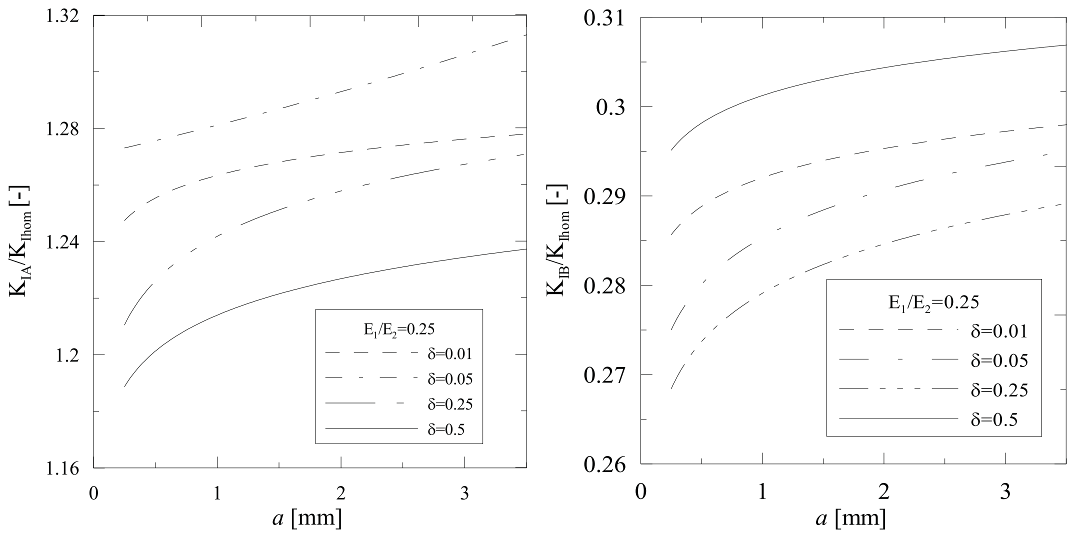
Výsledky rozsáhlých numerických výpočtů, které byly získány v rámci řešené problematiky jsou zobrazeny na obrázcích 5 a 6.
Na obrázku 5 vlevo je znázorněn průběh normované hodnoty faktoru intenzity napětí (normované hodnotou K_{Ihom}, což je hodnota faktoru odpovídající studované konfiguraci určené výpočtem pro homogenní těleso) v závislosti na délce trhliny, která se nachází stále ve stejném materiálu 1. V uvedeném grafu je patrné, že v důsledku samotné existence rozhraní vždy dochází k nárustu velikosti faktoru intenzity K_{IA}, pro poměry Youngových modulů menší než 1 a k poklesu hodnoty faktoru intenzity napětí pro poměry Youngových modulů větších než 1.
Zatím co v grafu 5 vpravo uvedená normovaná hodnota pro druhý sledovaný kořen B čili v materiálu 2 narůstá či klesá s převráceným poměrem Youngových modulů.
Vliv vzdálenosti rozhraní na velikost faktoru intenzity napětí je zobrazen na obrázku 6. Jako příklad jsou na obrázku uvedeny hodnoty pro poměr Youngových modulů $\frac{E_1}{E_2}$=0.25. Graf vlevo nám znázorňuje průběh hodnot faktoru v materiálu 1, z uvedeného grafu je



Obrázek 4: Vliv vzdálenosti sousedních trhlin v homogenním tělese při měnících se délce trhliny *2a* na hodnotu faktoru intenzity napětí. Délka sousední trhliny zůstává konstantní $2b$=1mm.



Obrázek 5: Vliv existence materiálového rozhraní pro δ=0.5mm. Pro stejné délky trhlin, $2a$=$2b$. Hodnota 1 odpovídá homogennímu případu.



Obrázek 6: Vliv vzdálenosti sousedních trhlin při měnících se délce a pro poměr E_1/E_2=0.25 na hodnotu faktoru intenzity napětí. Pro stejné délky trhlin, $2a$=$2b$.

patrné, že s rostoucí vzdáleností dochází k poklesu hodnoty faktoru intenzity napětí způsobené vlivem vzdálenosti od materiálového rozhraní. Obecně taktéž hodnoty klesají se zmenšující se velikostí trhliny $2a$.
Graf uvedený vpravo 6 znázorňující průběhy hodnot faktoru intenzity napětí v materiálu 2, zaznamenává převrácený trend závislosti hodnot faktoru intenzity napětí ve sledovaném kořeni B na vzdálenosti δ od materiálového rozhraní a stejný rostoucí trend se zvětšující délkou trhliny $2a$ a to, že roste hodnota normovaného faktoru intenzity napětí.

5 Závěr

Předmětem našeho zájmu je výpočet hodnoty faktoru intenzity napětí v závislosti na měnící se délce trhlin a vzdálenosti od materiálového rozhraní. V první části je uvedena samotná interakce trhlin v homogenním tělese s cílem ověřit správnost navrženého numerického modelu. V druhé části se pak příspěvek pro dané poměry Youngových modulů zaobírá vlivem materiálového rozhraní na hodnotu faktoru intenzity napětí ve sledovaných kořenech jednotlivých trhlin.
Do budoucna je třeba studiu rozšířit o trhliny orientované pod určitým úhlem vůči materiálovému rozhraní a to zejména pro úhel $\frac{\pi}{4}$.
Uvedené výsledky mohou přispět k vysvětlení chování trhlin v kompozitních materiálech, dále pak ke studiu vlivu mikrostruktury na chování trhlin a zejména jsou nezbytné při studiu chování krátkých únavových trhlin mikrostruturálního charakteru.

Poděkování

Výsledky práce uveřejněné v tomto příspěvku vznikly s podporou grantu AV ČR č. K 2076106 „Role rozhraní dvou materiálů v lomové mechanice“.
Zvláštní dík také patří pánům Hutařovi a Grögerovi, bez kterých bych příspěvek v LaTeXu nenapsal.

Literatura

[1] Anderson, T., L.: Fracture Mechanics Fundamentals and Alplcations, Second Edition, 1995, CRC Press

[2] Seitl, S.: Vliv rozhraní dvou materiálů na interakci trhlin, Únava a lomová mechanika 2002-Metodické a aplikační problémy, Žinkovy 2002.

[3] Seitl, S., Knésl, Z.: Analýza šíření trhliny v okolí rozhraní dvou materiálů z hlediska dvouparametrové lomové mechaniky, Konference s mezinárodní účastí "Engineering mechanics 2002", Svratka 2002, pp. 259

[4] Tada, H., Paris, P., C., Irwin, G., R.: The Stress Analysis of Cracks Handbook, Third Edition, ASME International Three Park Ave, New York 10016, 2000.

[5] Murakami, Y., et al.: Stress Intensity Factor Handbook I, II, III, Pergamon Press, 1987

[6] Suresh S.:Fatigue of Materials, Cambridge University Press, Cambridge 1998.

[7] Bednář, K.: Dvouparametrová lomová mechanika: výpočet parametrů a jejich význam při popisu chování únavových trhlin, Disertační práce VUT v Brně, 1999

Lomově-mechanické parametry betonu jako vzájemně korelovaná náhodná pole

Miroslav Vořechovský [1]

Abstrakt: Příspěvek přináší nové metody generace vzájemně korelovaných stochastických procesů. Navazuje tak plynule na příspěvek autora z minulého ročníku semináře a ukazuje přikročení k vývoji metod generace stochastických procesů jako prostředku k postižení statistické složky vlivu velikosti. Generace náhodného pole je založena na metodě typu Monte Carlo s využitím ortogonální transformace kovarianční matice. Generace skupiny procesů je pak nově nabídnuta ve dvou variantách s využitím speciálních vlastností níže nadefinovaných *blokových matic*.

1 Introduction

Stochastic finite element method (SFEM) had facilitated the use of random fields in computational mechanics. Many material and other parameters are uncertain in nature with random spatial variability. Efficient simulation of random fields for problems of stochastic continuum mechanics is in the focus of both researchers and engineers. Achievements in stochastic finite element approaches increased the need for accurate representation and simulation of random fields to model spatially distributed uncertain parameters.

The spatial variability of mechanical and geometrical properties of a system and intensity of load can be conveniently represented by means of random fields. Because of the discrete nature of the finite element formulation, the random field must also be discretized into random variables. This process is commonly known as random field discretization. In following we will deal with random fields simulation based on orthogonal transformation of covariance matrix in connection with different types of Monte Carlo simulation. Methodology is closely related to *Karhuen-Loève expansion.* These methods produce stationary (and ergodic) Gaussian processes, transformations (translations) can be carried out later.

It is desirable to use small number of random variables to represent a random field. Simulation of random field by a few random variables is especially suitable for problems where theoretical failure probability should be calculated. To achieve this goal, the transformation of the original random variables into a set of uncorrelated random variables can be performed through an eigenvalue orthogonalization procedure [3, 4]. It can be demonstrated that a few of these uncorrelated variables with largest eigenvalues are sufficient for the accurate representation of the random field.

[1] Miroslav Vořechovský Ing., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 95, 662 37 Brno, tel. 05/4114 7131, e-mail: vorechovsky.m@fce.vutbr.cz

1.1 Orthogonal transformation of covariance matrix

Suppose that a spatial variability of random parameter is described by the Gaussian random field $a(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x,y,z)$ is the vector coordinate which determines the position on the structure. Numerical analysis requires a discrete representation of random field. A continuous field $a(\mathbf{x})$ is described by discrete values $a(\mathbf{x}_i) = a(x_i,y_i,z_i)$.

As the randomness of the spatial variability in 3-*dimensional* nature is generally non-isotropic, the autocorrelation function of the spatial variability is supposed to be a function of the distances between two points $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ and $|\Delta z|$. The following commonly used exponential form of an autocorrelation function is considered:

$$R_{aa}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sigma^2 \cdot exp\left[-\left(\frac{|\Delta x|}{d_x}\right)^{pow} - \left(\frac{|\Delta y|}{d_y}\right)^{pow} - \left(\frac{|\Delta z|}{d_z}\right)^{pow}\right] \tag{1}$$

in which d_x, d_y and d_z are positive parameters called *correlation lengths* and σ is the standard deviation of the random field. With increasing d a stronger statistical correlation of a parameter in space is imposed and opposite. Of course, an isotropic autocorrelation function has all correlation lengths identical. The power *pow* is usually two which leads to well known *bell-shaped* autocorrelation function.

When the finite element method is used, the structure is divided into an appropriate number of finite elements of small sizes. The size of each finite element must be small enough from the material property variability (material and correlation length), as well as from the stress/strain gradient point of view. It must be small enough so that the values of random field can be considered approximately constant within each element. Thus, if there are N finite elements in total, then there are N values of material property associated with these N elements. Note, that if the ratio of correlation length and total dimension of the structure tends to infinity, a random field simplifies to a random variable. And opposite, if the ratio tends to zero, we are facing the problem of disintegration of random field to N independent random variables. Strength calculations than should be performed with smaller number of elements with the help of *extreme value theory* (computational problems with large structures and high number of finite elements). Consider the fluctuating components of the homogenous random field, which is assumed to model the material property variation around its expected value. Then these N values, $a_i = a(\mathbf{x}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$, are random with mean zero but correlated, where $\mathbf{x}_i$ is the location of the centroid of element i. Their correlation characteristics can be specified in term of the covariance matrix C_{aa}, whose ij-component is given by:

$$c_{ij} = Cov[a_i a_j] = R_{aa}(\Delta x_{i,j}, \Delta y_{i,j}, \Delta z_{i,j}) \tag{2}$$

Here exist different methods for discretization and representation of random field and finite element mesh for structural calculation could differ from mesh intended for random field discretization.

The random variables can be transformed to the uncorrelated normal form by solution of an eigenvalue problem [3, 4]. In order to reduce the computational effort, an eigenvalue orthogonalization procedure can be employed:

$$\mathbf{C_{XX}} = \mathbf{\Phi \Lambda \Phi}^T \tag{3}$$

where $\mathbf{C_{XX}}$ is covariance matrix (for unit variance, $\sigma^2 = 1$). The matrix $\mathbf{\Phi}$ represents the orthogonal transformation matrix (eigenvectors). The covariance matrix in the uncorrelated space $\mathbf{Y}$ is diagonal matrix $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{C_{YY}} = \mathbf{\Lambda} \tag{4}$$

where the elements of diagonal are the eigenvalues $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ of covariance matrix $\mathbf{C_{XX}}$.

Usually, not all eigenvalues have to be calculated and considered for next step (simulation) as the fluctuations can be described almost completely by a few random variables. Let the chosen number of important dominating random variables by eigenvalue analysis be N_V. Now, the eigenvector matrix $\mathbf{\Phi}$ denotes the reduced eigenvector matrix containing only the respective eigenvectors to the N_V most important eigenvalues. Then the vector of uncorrelated Gaussian random variables $\mathbf{Y}^T = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_V}]$ can be simulated by a traditional way (Monte Carlo simulation). The random variables of vector $\mathbf{Y}$ have mean zero and standard deviation $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_{N_V}}$. The transformation back into correlated space yields the random vector $\mathbf{X}$ by the relation:

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi Y} \tag{5}$$

As already mentioned, the procedure enables significant reduction of uncorrelated random variables for representation of random field especially for higher values of correlation length. These random variables can be simply generated by plain MCS, representation of random field is formed via formula (5). Note, that much more efficient is to generate random variables suing stratified sampling, as is shown in [2]. There are two major computational burdens associated with the method:

1. *Solution of eigenvalue problem.* This may seem as a serious drawback of the technique for large SFEM system. But such initial computational effort is rewarded later at the step of Monte Carlo simulation resulting in efficient and transparent technique.
2. *Simulation of uncorrelated random variables.* Answers to this problem can be found in [5, 6]. The need of stable, reliable and efficient generator of correlated random variables should not occur anymore.

2 A new efficient method for generation of cross-correlated random fields

Basically the method is based on Monte Carlo type simulation with orthogonal transformation described above. First it should be introduced several terms

Definition 2.1 (Cross-correlation matrix of random fields) *Let $\mathbf{C_c}$ be a square symmetric positive definite matrix of order N_F with members*

$$C_{i,j} \begin{cases} \in \langle -1; 1 \rangle & \text{for } i \neq j \\ = 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

Matrix $\mathbf{C_c}$ is cross-correlation matrix and defines correlation structure among N_F random fields.

Definition 2.2 (Unit matrix) *Let* $\mathbf{I}$ *be a square diagonal matrix of order* N_V *with members* $I_{i,j} = 0$ *for* $i \neq j$ *and* $I_{i,j} = 1$ *for* $i = j$. *Than* $\mathbf{I}$ *is unit matrix. If used as correlation matrix than implies* N_V *non-correlated items.*

Definition 2.3 (Block cross-correlation matrix) *Let be* $\mathbf{B_c}$ *a squared symmetric matrix of order* $N_F \star N_V$ *assembled as follows. Matrix* $\mathbf{B_c}$ *consist of* $N_F \star N_F$ *blocks (squared matrices)* $C_{i,j} \cdot \mathbf{I}$, *where* $\mathbf{I}$ *is unit matrix of order* N_V *and* $C_{i,j}$ *are members of cross-correlation matrix defined above. In following a matrix* $\mathbf{B_c}$ *will be called* Block cross-correlation matrix.

Definition 2.4 (Block sample matrix) *Let be* $\mathbf{Y_B}$ *a matrix of with* N_{Sim} *columns and* $(N_V \cdot N_F)$ *rows. If the matrix consists of* N_F *blocks (matrices)* $\mathbf{Y}_i$ *with* N_{Sim} *columns and* N_V *rows in this way:*

$$\mathbf{Y_B}^T = [\ \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \mathbf{Y}_3 \quad \dots \quad \mathbf{Y}_{NF}\ ]$$

where each $\mathbf{Y}_i$ *is sampling matrix of uncorrelated normalized Gaussian random variables (each row represents one random variable using* N_{Sim} *samples). We will call* $\mathbf{Y_B}$ Block sample matrix.

Theorem 2.5 (Eigenvalues of $\mathbf{B_c}$) *A matrix* $\mathbf{B_c}$ *has the same eigenvalues as matrix* $\mathbf{C_c}$ *(real and positive), but these are* N_V*-multiple.*

Remark 2.6 (Meaning of matrix $\mathbf{B_c}$) $\mathbf{B_c}$ *is correlation matrix. Matrix has generally nonzero members on sub-diagonals of partial square blocks. No cross-correlation is prescribed to non-parallel random variable (coordination delay).*

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{NF} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{NF} \end{array} &
\begin{pmatrix}
\mathbf{I} & C_{1,2}\cdot\mathbf{I} & C_{1,3}\cdot\mathbf{I} & \dots & C_{1,N_F}\cdot\mathbf{I} \\
\vdots & \mathbf{I} & C_{2,3}\cdot\mathbf{I} & \dots & C_{2,N_F}\cdot\mathbf{I} \\
\vdots & \vdots & \mathbf{I} & \dots & C_{3,N_F}\cdot\mathbf{I} \\
\vdots & sym. & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{I}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Corollary 2.7 (Positive definiteness) *Matrix* $\mathbf{B_c}$ *is positive definite.*

Theorem 2.8 ($\mathbf{C_c}$: trace) *If* $\mathbf{C_c}$ *is a correlation matrix of order* N_F *than* $tr(\mathbf{C_c}) = N_F$.

Theorem 2.9 ($\mathbf{B_c}$: trace) *If* $\mathbf{B_c}$ *is a corr. matrix of order* $N_F * N$ *than* $tr(\mathbf{B_c}) = N_F * N$.

Author proposes two methods for assemblage the block sample matrix $\mathbf{Y_B}$ with prescribed correlation according to block cross-correlation matrix $\mathbf{B_c}$:

- *Switching method* based on simulated annealing algorithm trashed out in [5, 6]. This technique imposes correlations between columns of $\mathbf{Y_B}$ directly using ranks manipulations. All N_{Sim} samples in each row of $\mathbf{Y_B}$ remain untouched. Technique was tested using many examples and could be proved (at least numerically) that works well.

- *Orthogonal transformation of covariance matrix of* $\mathbf{B_c}$. This methodology premises columns of $\mathbf{Y_B}$ to be independent. This can be done by random generation of realizations ranks and in case of need tune ordering with the *Switching method*. Note that in case of N_{Sim} comparable to $N_V * N_F$ (ie high number of realizations) is statistical dependency between columns of $\mathbf{Y_B}$ probably very low. After that every block $\mathbf{Y}_i$ is transformed (multiplied) by square root of eigenvalue of $\mathbf{B_c}$ ($\sqrt{\lambda_i}$), ie:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{B}}^T = [\quad \sqrt{\lambda_1} \cdot \mathbf{Y}_1 \qquad \sqrt{\lambda_2} \cdot \mathbf{Y}_2 \qquad \sqrt{\lambda_3} \cdot \mathbf{Y}_3 \qquad \ldots \qquad \sqrt{\lambda_{NF}} \cdot \mathbf{Y}_{NF} \quad] \tag{6}$$

  After that matrix $\widetilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{B}}$ has diagonal covariance matrix with eigenvalues λ_i on its diagonal (N_V-multiple). Now translation to the correlated space should be done. For this purpose we need eigenvectors $\mathbf{\Phi_{BC}}$ of (often huge) block cross-correlation matrix $\mathbf{B_c}$. At this moment it is very important the fact, that matrix with those eigenvectors can be easily "artificially" assembled. The only information needed for assembling is the knowledge of eigenvectors of (source, small) cross-correlation matrix $\mathbf{C_c}$. It is relatively easy to complete space of dimension $N_F * N_V$ with eigenvectors representing N_F-dimensional space. The matrix multiplication similar to (5) is carried out:

$$\mathbf{Y_B} = \mathbf{\Phi_{BC}} \cdot \widetilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{B}} \quad (= \mathbf{\Phi_{BC}} \cdot \mathbf{\Lambda_{BC}}^{1/2} \cdot \mathbf{Y_B}) \tag{7}$$

  and preparation of cross-correlated random variables is done.

The second technique is not tested so far. Methodology has been only intuitively derived. But testing is under intensive preparation now. Conclusions will be hopefully delivered in author's dissertation.

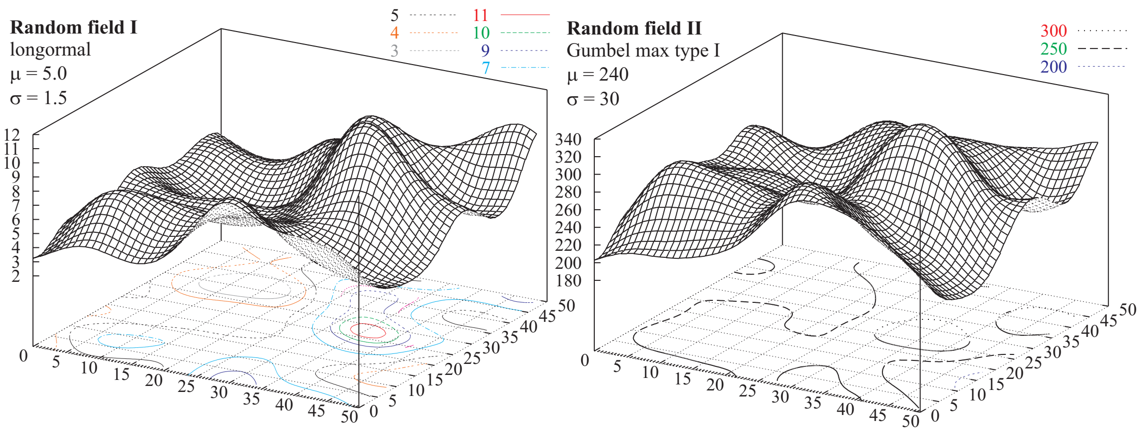
When matrix of cross-correlated random numbers $\mathbf{Y_B}$ is obtained once, all random fields $\mathbf{X_i}$ are derived using orthogonal transformation:

$$\mathbf{X_i} = \mathbf{\Phi Y_i} \tag{8}$$

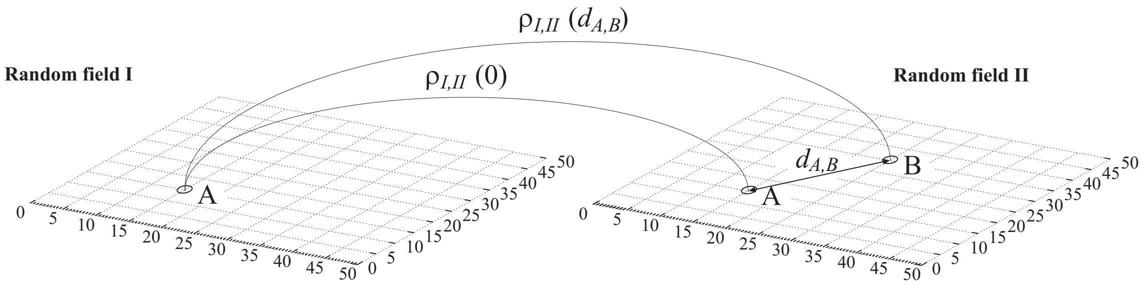
where meaning of $\mathbf{\Phi}$ remains as in (5).

The procedure of generation random fields can itemized as follows:

1. Assembling of autocorrelation matrix $\mathbf{\Phi}$ according to discretization, autocorrelation function and correlation lengths.
2. Determination of eigenvalues/vectors of $\mathbf{\Phi}$ (decomposition). Decision about the number of random variables N_V needed for accurate representation of random field (determination of the smallest eigenvalue taken into account).
3. Generation of sample set (N_{Sim} values) representing standard Gaussian PDF (Crude Monte Carlo or LHS). These values are copied to $N_V * N_F$ columns. Matrix $\mathbf{Y_B}$ is obtained.
4. Imposition of cross-correlation according to matrix $\mathbf{B_c}$. Two methods are proposed above.
5. Transformation of all random vectors $\mathbf{Y_i}$ to correlated space using (8).



Obrázek 1: Shape similarity of corresponding realizations of random fields **I** and **II** ($d_x = d_y = 1m$). Cross-correlation coefficient $\rho_{I,II}(0) = 0.65$



Obrázek 2: Illustration of cross-correlation for 2-*dimensional* random fields **I** and **II**

3 Error assessment of cross-correlated random processes

An error assessment of random fields is processed in [1]. Only special aspects of assessment of cross-correlated processes will be denoted here. Generally the quality of both estimated autocorrelation and cross-correlation depends on the quality of imposition of correlation among random variables. Cross-correlation is estimated using N_{Sim} realizations in N discretization points. Therefore one can obtain N point estimations of cross-correlation coefficient for each pair of random fields **I** and **II** $\rho_{I,II}(0)$. Of course, it should be estimated also cross-correlation with coordinate (time) delay $d_{A,B}$, i.e. cross-correlation of two different discretization points A, B for each pair of random fields $\rho_{I,II}(d_{A,B})$. Meaning of these terms is illustrated in figures 1 and 2. Both random fields **I** and **II** were obtained from standard Gaussian random field using translation, for details see [7].

4 Conclusions

Conclusions can be summarized as follows: Decomposition of autocovariance matrix (based on discretization points) is done only once as the fields are evaluated in the same points. The limitation is that all fields must have the same autocorrelation structure (correlation lengths). But for purpose in the randomness of material properties is expected that those fluctuate in similar manner (gradients). An advantage can be utilized: eigenvectors/values of block cross-correlation matrix can be easily determined based on knowledge of eigenvectors of cross-correlation matrix only. This leads to considerable reduction of computational effort for step 3.

Fracture-mechanics parameters of concrete simulated as random processes alow quantitatively higher level of structure modelling in terms of both reliability speculations and realistic modelling of fracture development. Such approach is able to capture statistical part of special phenomenon called *size effect*. Difficulties connected with task dimension at large structures should be solved by statistical methodologies closely related to *extreme value theory*.

Poděkování

The present research was founded under grant Nr. GAČR 103/02/1030 from the Grant Agency of the Czech Republic.

Literatura

[1] Novák, D., Stoyanoff, S., Herda, H. (1995). Error Assessment for Wind Histories Generated by Autoregressive Method. *Structural safety*, Vol.17, No. 1.

[2] Novák, D., Lawanwisut, W., Bucher, C. (2000) Simulation of Random Fields Based on Orthogonal Transformation of Covariance Matrix and Latin Hypercube Sampling. *Proceedings of International Conference on Monte Carlo Simulation MC 2000*, Monaco, Monte Carlo, June 2000, Balkema: Rotterdam, 129-136.

[3] Schuëller, G.I., C.G. Bucher, Pradlwarter H.J. (1990) Computational methods in stochastic structural dynamics. *Proc. EURODYN'90, Germany.*

[4] Liu, W. K., Belytschko, T., Lua, Y. J. (1995) Probabilistic Finite Element Method. In *Probabilistic Structural Mechanics Handbook: Theory and Industrial Applications*, Texas, USA, 70-105.

[5] Vořechovský, M., Novák, D. (2002) Correlated Random Variables in Probabilistic Simulation, *Proc. of 4^{th} International Ph.D. Symposium in Civil Engineering*, Munich, Germany, September (in print)

[6] Vořechovský, M., Novák, D., Rusina, R., (2002) A New Efficient Technique for Samples Correlation in Latin Hypercube Sampling, *Proc. of 7^{th} International Scientific Conference*, Košice, Slovakia, May, 102-108

[7] Vořechovský M. (2002) Stochastic fracture mechanics and size effect, *Dissertation thesis*, Brno

Editor:	Miroslav Stibor
Název:	PROBLÉMY LOMOVÉ MECHANIKY II.
Vydání:	první
Rok vydání:	2002
Vydavatel:	Vysoké učení technické v Brně

ISBN 80-214-2129-0