

Termomechanika cvičení cv. 3 – Zadání a vstupní data příkladů

Cv. 3 – 8.10.2015

Téma: Nestacionární vedení tepla – analytické řešení

Př. 76. Vyřešte rozložení teplot v cihelné stěně o tloušťce s změnila-li se teplota okolního prostředí z hodnoty t_1 na t_2 pro součinitel přestupu tepla α . Předpokládá se, že stěna je homogenní z materiálu vlastností ρ , c , λ s totožnou teplotou okolí. Úlohu řešte analyticky pro povrch a střed stěny v čase τ od počátku změny (ohřev či chladnutí).

Vstupní data

PC kontrola - FY76

Veličina		Sk. 1 – 8 h	Sk. 2 – 10 h
1	Měrná hmotnost zdiva ρ [kg/m ³]	1050+5x	1150+5x
2	Měrná tepelná kapacita zdiva c [J/kgK]	830+5x	840+3x
3	Tloušťka stěny s [m]	0,9	0,75
4	Součinitel přestupu tepla α [W/m ² K]	7,8+0,1x	7,2+0,15x
5	Tep. vodivost zdiva stěny λ [W/mK]	0,75+0,03x	0,72+0,05x
6	Počáteční teplota okolí t_1 [°C]	-12	21
7	Konečná (změněná) teplota okolí t_2 [°C]	21	-12
8	Čas výpočtu teplotního stavu τ [h]	10	9
9	Charakter změny teplot	ohřev	chladnutí

Kontrolní hodnoty

- Poměr teplot X pro povrch
- Teplota na povrchu stěny
- Teplota v ose stěny

Předpoklad řešení: Totožné teploty okolí po obou stranách stěny umožňují využití symetrie a výpočet s její poloviční tloušťkou.

Nástin řešení: Úloha vyžaduje vyčíslení diferenciální rovnice jednorozměrného vedení tepla v rovinné stěně. Řešení má pro teplotu T v čase τ tvar:

$$\frac{T_{s\tau} - T_o}{T_a - T_o} = \frac{\theta_{s\tau}}{\theta_a} = \sum \frac{2 \cdot \sin \delta_i}{\delta_i + \sin \delta_i \cdot \cos \delta_i} \cdot \cos \left(\delta_i \frac{x}{0,5s} \right) e^{-\delta_i^2 \cdot Fo}$$

- součinitel teplotní vodivosti $a = \lambda / c \cdot \rho$
- Biotovo číslo $Bi = \alpha \cdot s / \lambda$
- kořeny transcendentní rovnice $\delta_i \cdot \text{tg} \delta_i = Bi$

Kořeny rovnice lze vyčísřit pomocí tabulek, manuálním výpočtem či programem (např. **Bio.exe**). Pro řešení úlohy mají zásadní vliv jen první čtyři kořeny.

Př. 81. Určete rozložení teplot v betonovém sloupu o průměru D , změnila-li se náhle teplota okolního vzduchu z teploty t_a na t_o . Předpokládá se homogenní materiál sloupu o fyzikálních vlastnostech ρ , c , λ a součinitel přestupu tepla α . Úlohu řešte analyticky pro povrch válce v čase τ .

Vstupní data

PC kontrola – FY81

Veličina		Sk. 1 – 8 h	Sk. 2 – 10 h
1	Průměr sloupu D [m]	0,75 + 0,05x	0,8 + 0,03x
2	Měrná hmotnost ρ [kg/m ³]	1800 + 10x	1900 + 5x
3	Měrná tepelná kapacita c [J/kgK]	710 + 5x	750 + 3x
4	Součinitel tepelné vodivosti λ [W/mK]	1,15	1,25
5	Součinitel přestupu tepla α_e [W/m ² K]	8 + 0,1x	7,5 + 0,15x
6	Teplota počáteční t_a [°C]	28	2
7	Teplota okolí t_o [°C]	4	25
8	Čas výpočtu τ [h]	11	10
9	Charakter změny teplot	chladnutí	ohřev

Kontrolní hodnoty

- Poměr teplot X pro povrch
- Teplota na povrchu válce

Nástin řešení: Řešení úlohy vychází z Fourierovy diferenciální rovnice vedení tepla válcem neohraničené délky o průměru d . Rovnice má v cylindrických souřadnicích pro teplotu T v čase τ tvar:

$$\frac{T_{i\tau} - T_o}{T_a - T_o} = \sum \frac{2 \cdot J_1(m_i)}{m_i \cdot [J_0^2(m_i) + J_1^2(m_i)]} \cdot J_0\left(m_i \cdot \frac{r}{0,5 \cdot d}\right) \cdot e^{-m_i^2 \cdot Fo}$$

Pro válec platí $Bi = \frac{\alpha \cdot d}{2 \cdot \lambda}$ $Fo = \frac{a \cdot \tau}{(0,5 \cdot d)^2}$

$J_0(m_i)$, $J_1(m_i)$ jsou kořeny transcendentní rovnice $m_i \frac{J_1(m_i)}{J_0(m_i)} = Bi$

Teplota v ose válce se určí dle uvedené rovnice pro $r = 0$ a teplota na povrchu válce se vypočte pro $r = 0,5 \cdot d$.

Poznámka: Transcendentní rovnice má nekonečný počet kořenů m_i . Lze ji řešit pomocí Besselových funkcí nultého $J_0(x)$ a prvního $J_1(x)$ řádu optimálně výpočetní technikou programy např. **BESS.exe** či **Exel**. Pro řešení úlohy mají zásadní vliv jen první čtyři kořeny.

7.10.2015