

Posouzení únosnosti plošného základu – část 2 Ověření spolehlivosti návrhu plně pravděpodobnostní metodou

doc. Ing. Miroslav VOŘECHOVSKÝ, Ph.D.

doc. Ing. Lumír MIČA, Ph.D.

Ing. Jiří BOŠTÍK, Ph.D.

VUT v Brně – Fakulta stavební

Článek navazuje na porovnání návrhu plošného základu podle dřívější národní geotechnické normy ČSN 73 1001 a nově platného EC 7 [14]. Námětem této části je využití plně pravděpodobnostního výpočtu. Tento přístup je názorně ilustrován a rovněž je demonstrováno, jak lze využít informace z plně pravděpodobnostní analýzy pro citlivostní analýzu problému a jak lze tuto informaci použít pro rozhodnutí o případných detailních statistických rozbořech parametrů s cílem omezit neurčitost při navrhování, a provést tak hospodárnější návrh.

Assessment of the load-bearing capacity of a shallow foundation – Part II. Verification of design reliability using fully probabilistic method

This article is continuation of Part 1 [14], where juxtaposition design of a shallow foundation according to the ČSN 73 1001 Czech standard and the new Eurocode 7 was made. The subject of the second part is the usage of fully probabilistic design for this type of construction. This approach is clearly described in the article. Another aspect is the utilization of information from fully probabilistic design for sensitivity analysis and how this information may be used for decision-making about appropriate detailed statistical analysis parameters. It can help to reduce the level of uncertainty in design resulting in a more economical design performance.

Úvod

V první části [14] byl proveden návrh plošného základu dle nově platné evropské normy [15] a dříve používaného postupu definovaného v české normě [16] podle metody dílčích součinitelů resp. mezních stavů. Jak bylo poznamenáno v části I, i když využíváme teorie pravděpodobnosti při definování dílčích součinitelů, ve výsledku přistupujeme k návrhu deterministicky. S rozvojem výpočetní techniky však přichází stále častěji v úvahu i použití plně pravděpodobnostního výpočtu, kdy jsme buď schopni provést ve velmi krátké době rozsáhlý počet simulací, nebo lze provést aproximaci pokročilými metodami založenými na počtu pravděpodobnosti. Je však nutné poznamenat, že uplatnění plně pravděpodobnostních metod v technické praxi, obzvláště v geotechnické, je prozatím omezené, neboť projektanti nemají k dispozici dostatek dat (velké statistické soubory charakterizující nahodilost parametrů materiálu nebo zatížení). Tento trend se však postupně mění a v budoucnosti bude praxe stále častěji tento přístup aplikovat. Názorným příkladem v geotechnické praxi je využití numerických metod (nejčastěji metody konečných prvků). Donedávna bylo použití numerických metod doménou zejména vysokých škol, ale v poslední době došlo k jejich rozšíření i při navrhování v praxi.

Česká odborná komunita si začíná uvědomovat tuto skutečnost a stále častěji se setkáváme s publikacemi na toto téma [1], [9], [11] či aplikací počtu pravděpodobnosti výskytu události v kontextu geotechnických děl se zabývá též např. [8].

Námětem této části článku je studie ověření spolehlivosti návrhu plošného základu za využití plně pravděpodobnostní metody a názorně použití zvolených pravděpodobnostních metod.

Ověření spolehlivosti návrhu základu pomocí plně pravděpodobnostní metody

V tomto oddílu je prezentován výpočet pravděpodobnosti poruchy plošného základu, který byl navržen v části 1 podle uvedených norem, přesněji podle metody dílčích součinitelů spolehlivosti. Návrhy základu tam jsou tedy reprezentovány rovnicí (6), která je pro jednoduchost aproximována rovnicemi (7) a (8). Před uvedením výsledků pravděpodobnostní poruch je třeba předefinovat problém jako pravděpodobnostní úlohu.

Definice pravděpodobnostního modelu plošného základu

V analýze je uvažován následující vektor tří náhodných veličin

$$\mathbf{X} = \{\phi, V, H\}, \quad (1)$$

který sdružuje náhodný úhel vnitřního tření zeminy ϕ , náhodnou svislou V a vodorovnou H složku zatížení v základové spáře. Náhodný moment je (podobně jako v předchozí části) uvažován přímo závislý na vodorovné složce zatížení: $M = 4H$ (viz rovnice 1 – část 1). Proto je moment odvozenou náhodnou veličinou. Uvedená závislost determinuje další náhodnou veličinu – excentricitu výslednice zatížení v základové spáře.

Dále je definována funkce mezního stavu $g(\mathbf{X})$, tedy náhodná veličina Z , jako funkce základních náhodných veličin

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(\phi, V, H) = R - E. \quad (2)$$

Funkce mezního stavu je zde definována jednoduše jako rozdíl mezi náhodnou únosností základové spáry R a náhod-

ným účinkem zatížení (modelovým napětím E). Zadání je nyní stanovit pravděpodobnost, že zatížení překročí únosnost zeminy, tedy pravděpodobnost, že veličina $Z = g(\mathbf{X})$ je záporná. To lze vyjádřit jako integrál

$$p_f = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \iiint_{\mathbf{X} \in D_f} f(\mathbf{X}) d\phi dV dH, \quad (3)$$

kde D_f označuje oblast náhodných vstupů, pro které dojde k poruše (charakterizováno nerovností $g(\mathbf{X}) \leq 0$) a $f(\mathbf{X})$ je sdružená hustota pravděpodobnosti (PDF) náhodného vektoru \mathbf{X} . Odpor základové půdy je počítán analogicky jako v části 1, tedy postupem uvedeným v rovnici (4) – část 1, avšak místo návrhových hodnot získaných pomocí dílčích součinitelů spolehlivosti jsou použity přímo hodnoty náhodné veličiny. Odpor základové půdy je tedy dán vztahem

$$R = \gamma \left(1 - \frac{H}{V}\right)^2 \left\{ d \times N_d \times \left[1 + 0,1 \sqrt{\frac{d}{b_{ef}}} \sin(2\phi) \right] + \frac{b_{ef}}{2} [1,5(N_d - 1) \tan \phi] \right\}, \quad N_d = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) e^{\pi \tan \phi}. \quad (4)$$

Pro libovolný přípustný podíl náhodných složek zatížení H/V je šířka základu získána aproximací nejvýše ekonomického návrhu podle norem – rovnice (7), část 1.

Účinek zatížení je modelován jako (srovnej s rovnicí 2 – část 1)

$$E = \frac{V}{(B - 8H/V)} = \frac{V}{b_{ef}}. \quad (5)$$

Důležitou součástí pravděpodobnostního výpočtu je zvolená sdružená hustota náhodného vektoru (PDF). Asi ideální situací je odhad PDF statistickou analýzou velkého množství naměřených dat. Pro účely prezentované studie autoři provedli odhad tvaru hustoty na základě zkušeností. Tento přístup zvolili z toho důvodu, že není řešení konkrétní příklad, ale je pouze prováděna modelová analýza bez opory skutečných dat. Jsou zde studovány dvě alternativy volby PDF.

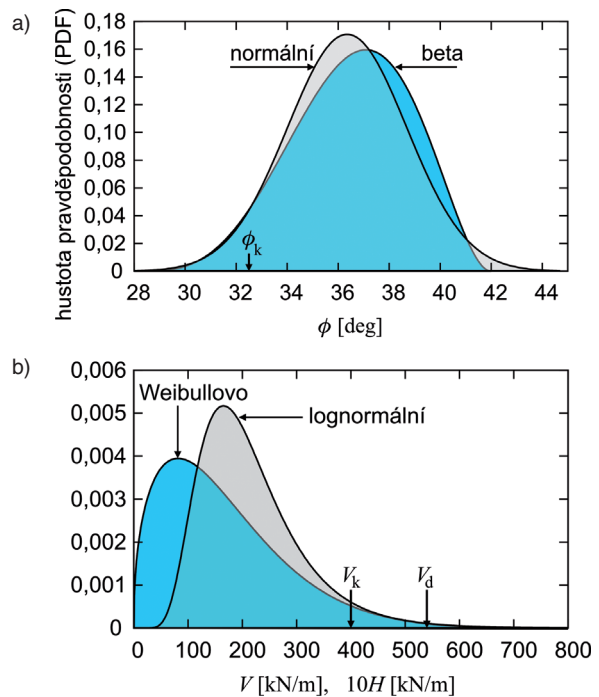
V první alternativě jsou marginální náhodné veličiny normálně a lognormálně rozdělené, viz první tři řádky v tab. 1. Úhel vnitřního tření je modelován jako normální (Gaussovská) náhodná veličina s parametry vyčíslenými v prvním řádku tabulky. Tyto parametry splňují následující podmínky: charakteristická hodnota použitá pro návrh pomocí metody dílčích součinitelů ($32,5^\circ$) zde tvoří 5% kvantil a variační koeficient (cov) je zvolen jako 6,43%, což odpovídá zkušenostem autorů a je rovněž v souladu s daty uváděnými v literatuře, např. [2]. Svislá i vodorovná složka síly je modelována jako lognormální veličina, viz řádky 2 a 3 tab. 1.

Tab. 1. Definice náhodných veličin*

alternativa	Název veličiny	Značka	Jedn.	hustota (PDF)	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	cov	Šikmost	Char. hodnota (5 nebo 95% kvantil)	Návrhová hodn. (1 nebo 99%)
N, L, G, L, G	Úhel vnitřního tření	ϕ	deg	normální	36,35	2,337	6,43%	0	32,5	30,9
	Svislá síla	V	kN/m	lognormální	217	97	44,70%	1,43	400	540
	Vodorovná síla	H	kN/m		21,7	9,7	44,70%		40	54
B, W, C, We	Úhel vnitřního tření	ϕ	deg	beta	36,545	2,315	6,33%	-0,275	32,5	31,1
	Svislá síla	V	kN/m	Weibullovo	169	119,290	70,59%	1,1479 ($m=1,438$)	400	540
	Vodorovná síla	H	kN/m		16,9	11,929	70,59%		40	54

* Síly V a H mohou být pouze nezáporné.

Svislá složka síly V má charakteristickou hodnotu (představující 95% kvantil) rovnou 400 kN/m a návrhovou hodnotu (představující 99% kvantil) rovnou hodnotě 540 kN/m. Lognormální rozdělení náhodných sil bylo zvoleno z následujících důvodů: jde o obvyklou volbu, a navíc dvouparametrické lognormální rozdělení je definováno pouze pro kladné hodnoty náhodné veličiny. Tím se eliminuje možnost uvažování se zápornými silami, které by nekorespondovaly s modelem pro posouzení spolehlivosti základu. Podíl mezi středními hodnotami sil V a H je zvolen 10 a tvary rozdělení jsou zvoleny jako shodné (obr. 1b).



Obr. 1. Marginální hustoty pravděpodobnosti základních náhodných veličin

a – normální a beta rozdělení úhlu vnitřního tření,
b – lognormální a Weibullovo rozdělení vodorovné a svislé síly
(Pro všechny veličiny jsou zvýrazněné sdílené charakteristické a návrhové hodnoty)

Dodejme jen, že vztahy mezi naměřenými hodnotami geotechnického parametru, mezi charakteristickou hodnotou, návrhovou hodnotou a rozdělením náhodného parametru nejsou jednoduché, viz např. [3], [10].

Abychom získali smysluplné hodnoty podílů mezi svislou a vodorovnou složkou zatížení, bylo uvažováno se silnou statistickou korelací mezi těmito náhodnými veličinami. Uvedené náhodné síly měly lineární Pearsonův korelační

koeficient 0,8. Tak vysoká hodnota korelace silně omezuje pravděpodobnost výskytu nízké hodnoty svislé síly v kombinaci s vysokou vodorovnou silou, což je kombinace, která by vyžadovala jiný model únosnosti základové spáry – smykové kritérium místo normálového napětí. S výše uvedenou korelací bylo dosaženo stavu, kdy nejjfrekventovanější poměr sil je přibližně roven výše uvedenému poměru 10 mezi středními hodnotami sil. Takový poměr odpovídá odklonu výslednice od svislého směru přibližně $5,7^\circ$, což se patrně blíží obvyklým praktickým situacím. Poznamenejme, že použití výše uvedených statistické korelace nevylučuje výskyt jiných poměrů sil. Ovšem v numerických analýzách byly vzorky veličin s nesmyslnými poměry přesahujícími hodnotu 0,577 (tedy odklon výslednice větší než 30°) automaticky vyřazeny. Úhel vnitřního tření je modelován jako nezávislý na silách V a H .

Sdružená hustota pravděpodobnosti je analyticky modelována pomocí Natafova modelu [6], [4], který umožňuje transformaci ze skutečného nenormálního rozdělení do standardizovaného normálního prostoru s nezávislými marginálními hustotami. Pro numerický odhad pravděpodobnosti poruchy pomocí metody Monte Carlo také byly realizace náhodného vektoru s danou sdruženou hustotou získávány numericky za pomoci optimalizačního algoritmu představeného v práci [12]. Pravděpodobnostní model byl definovaný a numericky řešený v programu FReET [7].

Metody řešení

Pravděpodobnost poruchy základu navrženého pomocí obou norem je zde vypočtena dvěma způsoby, a to přímým odhadem simulační metodou Monte Carlo a aproximací pomocí metody FORM.

V *simulačním přístupu* byla pravděpodobnost poruchy (3) odhadnuta pomocí generování realizací náhodného vektoru $\mathbf{X} = \{\phi, V, H\}$, tedy generování trojic čísel ze zadané sdružené hustoty pravděpodobnosti. Pro každou realizaci trojice čísel byla vyhodnocena funkce mezního stavu $g(\mathbf{X})$ a byl zaznamenán počet realizací N_f , který vedl k poruše modelového základu. Odhad pravděpodobnosti poruchy je pak proveden jako podíl

$$p_f \approx \frac{N_f}{N_{\text{sim}}}, \quad (6)$$

kde N_{sim} je celkový počet generovaných realizací. V podstatě tedy jde o odhad integrálu (3) s tím, že kvadrurní body mají stejnou váhu a jsou vybírány tak, že respektují váhy sdružené hustoty pravděpodobnosti. V praktických případech, kde je pravděpodobnost poruchy velmi malá, odhad v rovnici (6) vyžaduje velmi vysoký počet realizací, aby byl odhad statisticky významný. Přibližně lze říci, že k věrohodnému odhadu pravděpodobnosti poruchy je zapotřebí $N_{\text{sim}} = 10/p_f$. Výběr vzorků náhodného vektoru \mathbf{X} lze provádět např. pomocí obyčejné metody Monte Carlo (MC) nebo např. pomocí Latin Hypercube Sampling (LHS). V předloženém příspěvku byly použity obě simulační metody.

V aproximaci metodou FORM je pravděpodobnost poruchy odhadována za pomoci linearizace funkce poruchy $g(\mathbf{X}) = 0$ v blízkosti tzv. *návrhového bodu*. Za návrhový bod se považuje taková kombinace hodnot náhodného vektoru \mathbf{X} , která splňuje podmínku $g(\mathbf{X}) = 0$ a z množiny těchto bodů je to bod s nejvyšší pravděpodobností. Linearizace funkce poruchy je provedena v transformovaném prostoru, jmenovitě v prostoru \mathbf{U} nezávislých standardizovaných normálních veličin. Transformace (izopravděpodobnostní) z původního prostoru \mathbf{X} do prostoru \mathbf{U} je realizována pomocí

Natafovy transformace zmíněné výše. Jakmile je linearizace funkce poruchy provedena v prostoru \mathbf{U} , odhad pravděpodobnosti poruchy (tedy integrál z transformované hustoty přes oblast poruchy) je velice jednoduchý, viz např. [5]. Díky rotační symetrii sdružené standardizované normální hustoty s nekorelovanými marginálními lze odhad pravděpodobnosti poruchy provést jako

$$p_f \approx \Phi(-\beta), \quad (7)$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce standardní normální veličiny a β je Hasoferův-Lindův (HL) index spolehlivosti. Veličina β má jednoduchou geometrickou interpretaci: jde o nejkratší vzdálenost návrhového bodu (bodu ležícího na ploše poruchy $g(\mathbf{X}) = 0$) do počátku souřadného systému v prostoru \mathbf{U} . Pokud označíme návrhový bod v původních souřadnicích \mathbf{x}^* a jeho obraz v \mathbf{U} prostoru označíme symbolem \mathbf{u}^* , pak HL-index β lze spočítat prostě jako velikost vektoru

$$\beta = \sqrt{(\mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^*}. \quad (8)$$

Souřadnice návrhového bodu v prostoru \mathbf{U} lze také napsat jako funkci skaláru β a vektoru citlivostí $\boldsymbol{\alpha}$

$$\mathbf{u}^* = \beta \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \beta = (\mathbf{u}^*)^T \boldsymbol{\alpha} = \beta \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}. \quad (9)$$

Druhá rovnost je platná, neboť vektor citlivostí $\boldsymbol{\alpha}$ má jednotkovou Euklidovskou velikost $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}} = 1$. Geometrický význam v prostoru \mathbf{U} je rovněž jednoduchý – souřadnice vektoru představují směr od počátku souřadnic do návrhového bodu. Tento vektor je navíc kolmý k ploše poruchy $g(\mathbf{X}) = 0$. Připomeňme, že uvedená plocha poruchy je v návrhovém bodě prostoru \mathbf{U} nahrazena lineární funkcí, tedy tečnou nad rovinou. Jestliže je pak takový směrový vektor jednotkové velikosti vynásoben délkou β , pak vektor označuje návrhový bod, viz rovnice (9). Citlivosti jsou tedy získány pomocí gradientu

$$\nabla g(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \frac{\partial g}{\partial u_2}(\mathbf{u}), \frac{\partial g}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \right)^T \quad (10)$$

jako

$$\boldsymbol{\alpha} = - \frac{\nabla g(\mathbf{u})}{|\nabla g(\mathbf{u})|}. \quad (11)$$

Z definice indexu spolehlivosti β jako délky vektoru \mathbf{u}^* pak vyplývá

$$\frac{\partial \beta(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^2 \right)^{1/2} = \alpha_i. \quad (12)$$

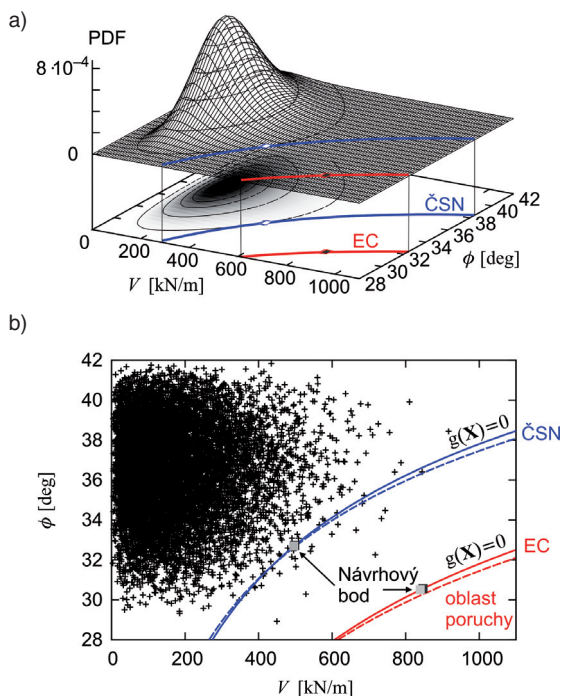
Slovně vyjádřeno, číselné hodnoty souřadnic vektoru $\boldsymbol{\alpha}$ měří citlivost indexu spolehlivosti na změny hodnot souřadnic u^i návrhového bodu \mathbf{u}^* (směrové kosiny).

Výsledky a diskuze

V předloženém případě je funkce poruchy velmi jednoduchá a v prostoru \mathbf{X} je téměř lineární. Navíc návrhový bod je pouze jeden, a proto je aproximace pravděpodobnosti poruchy metodou FORM velice přesná. Jak bude ukázáno, odhady pravděpodobnosti poruchy pomocí metody FORM a pomocí simulační metody Monte Carlo jsou porovnatelné, což

vede k závěru, že funkce poruchy je přibližně lineární rovněž v prostoru \mathbf{U} .

Obrázek 2 vizualizuje situaci pro pevnou hodnotu vodorovné síly H . V levé části obrázku je znázorněna dvourozměrná hustota pravděpodobnosti pro nezávislý úhel vnitřního



Obr. 2. Sdružená hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru a funkce poruchy $g(\mathbf{X}) = 0$ s vyznačeným návrhovým bodem
a – vizualizace PDF pro alternativy rozdělení N, Lg, Lg (první tři řádky v tab. 1), b – vzorky 10,000 simulovaných hodnot alternativy vstupních rozdělení B, We, We

(Plné čáry funkcí poruch znázorňují situaci pro poměr $H/V = 0,1$, čárkované čáry pak odpovídají poměru $H/V = 0,5$)

ho tření ϕ a svislou sílu V . Tabulka 2 shrnuje výsledky procedury hledání návrhového bodu. První řádek prezentuje souřadnice bodu pro případ návrhu šířky B podle EC 7 (DA3). Z numerických hodnot citlivostí (poslední tři sloupce) je patrné, že index spolehlivosti β , a tedy i pravděpodobnost poruchy, nejsou příliš citlivé na změny v hodnotě vodorovné síly H . Nejvyšší citlivost polohy návrhového bodu v prostoru \mathbf{U} se projevuje na svislé síle V a na úhlu vnitřního tření ϕ .

Samotné hodnoty indexu spolehlivosti β a jemu odpovídající pravděpodobnosti poruchy z metody FORM jsou prezentovány v levé části tab. 3. V pravé části jsou pro porovnání uvedeny odhady stejných veličin získané simulacemi metodou Monte Carlo (100 milionů simulací) a metodou LHS (15 milionů simulací).

Z předložených výsledků je patrné, že základní varianta návrhu základu pomocí EC 7 (DA3) vede v případě použité sady náhodných vstupů (označíme tuto sadu jako N, Lg, Lg) k pravděpodobnosti poruchy přibližně $p_f = 1,3 \times 10^{-5}$. Takové

hodnotě odpovídá index spolehlivosti okolo $\beta = 4,2$. Tyto výsledky výtečně odpovídají cílovým hodnotám spolehlivosti pro tento typ konstrukcí. Požadované hodnoty indexu spolehlivosti byly získány např. analýzou pozorovaných četností poruch a výsledky rozborů nákladů a výnosů (cost-benefit analýzy) autorem [13]. Podle tohoto pramene by centrální hodnota indexu spolehlivosti ($\beta = 4,2$) měla být považována za nejméně konzervativní návrhovou situaci. Takový výsledek je sice méně konzervativní než běžně uváděná směrná hodnota, ale rozdíl není velký. Například v Eurokódu je hodnota $\beta = 3,8$ ($p_f \approx 0,7 \times 10^{-5}$) zmiňována pro referenční údobí 50 let. Jestliže jsou pak události poruchy v různých letech považovány za vzájemně nezávislé, odpovídalo by to nominální roční frekvenci $1,3 \times 10^{-6}$ ($\beta = 4,7$). Vzhledem k tomu, že úplná nezávislost únosnosti a zatížení konstrukce není reálná, cílová hodnota v Eurokódu pro jeden rok by měla být $\beta = 4,5$.

Na základě uvedených výsledků se lze domnívat, že návrh šířky základu podle EC 7 (DA3) je vyvážený vzhledem k požadavkům bezpečnosti i hospodárnosti. Ovšem je třeba vzít v potaz skutečnost, že inženýři mají (z různých důvodů) tendenci mírně předdimenzovat šířku základu B (např. kvůli zakrouhlování na celočíselné rozměry nebo z psychologických důvodů). V praktických případech tedy může nastat, že navržená šířka je o něco větší než ta, která odpovídá nejehospodárnějšímu návrhu podle normy, kde se právě vyrovnají návrhové účinky zatížení s návrhovou odolností $E_d = R_d$ (viz rovnice 6 – část 1). Důsledkem je, že skutečné pravděpodobnosti poruchy mohou být ještě menší. Tyto úvahy se opírají o předpoklad, že představený model zatížení a odolnosti je věrným obrazem skutečnosti. Pravdou však je, že model sám je patrně pouze hrubou aproximací skutečného působení.

Porovnejme nyní spolehlivost plošného základu navrženého podle EC 7 (DA3) se základem, kde je šířka navržena podle ČSN. V části 1 bylo ukázáno, že minimální šířka základu v naší úloze navržena podle ČSN je významně menší než šířka navržena podle EC 7. To musí mít důsledek v podobě menší spolehlivosti základu navrženého podle ČSN proti EC 7 v okamžiku, kdy jsou uvažovány stejné rozdělené náhodné vstupy. Skutečně, pravděpodobnost poruchy základu navrženého podle ČSN je asi o tři řády vyšší! To je patrné z hodnot uvedených v tab. 3 (řádky s podbarveným pozadím). Závěr, že pravděpodobnost poruchy je v případě ČSN výrazně vyšší, lze vyvodit již z porovnání návrhových bodů v tab. 2. Zatímco souřadnice úhlu vnitřního tření ϕ a vodorovné síly H jsou téměř totožné, souřadnice svislé síly V jsou výrazně odlišné. Situace je názorně ilustrována na obr. 2, kde funkce poruchy pro návrh pomocí ČSN je výrazně blíže středním hodnotám veličin než stejná křivka pro návrh pomocí EC 7. To má za následek, že překročení tohoto limitu je daleko čtenější v případě ČSN.

Je možné pochybovat o vlivu korelace mezi náhodnými složkami zatěžující síly. Odpovědi na tuto otázku poskytují numerické simulace, ve kterých byla uvedena korelace variována v mezích 0-1 a výsledky (pravděpodobnosti poruchy a návrhové body) se v podstatě neměnily.

Tab. 2. Výsledky analýzy metodou FORM – souřadnice návrhového bodu

B navržena pomocí	alternativa PDF	návrhový bod \mathbf{x}^*				návrhový bod \mathbf{u}^*			citlivosti α		
		$x_1 = \phi$	$x_2 = V$	$x_3 = H$	H/V	u_1 (ϕ)	u_2 (V)	u_3 (H)	α_1 (ϕ)	α_2 (V)	α_3 (H)
EC	N,Lg,Lg	30,57	846,92	64,76	0,08	-2,474	3,404	0,007	-0,588	0,809	0,002
EC	B,We,We	30,50	839,71	67,34	0,08	-2,630	3,595	0,004	-0,590	0,807	0,001
ČSN	N,Lg,Lg	32,72	498,09	42,02	0,08	-1,553	2,160	0,005	-0,584	0,812	0,002
ČSN	B,We,We	32,69	496,00	41,59	0,08	-1,564	2,128	0,006	-0,592	0,806	0,002

Tab. 3. Právěpodobnosti poruchy a indexy spolehlivosti získané metodou FORM a simulacemi Monte Carlo

B navržena pomocí	alternativa PDF	analýza FORM		MC simulace		LHS simulace	
		β	$p_f = \Phi(-\beta)$	$p_f = N_f / N_{sim}$	β	$p_f = N_f / N_{sim}$	β
EC	N,Lg,Lg	4,208	1,29E-05	1,04E-05	4,256	1,08E-05	4,248
EC	B,We,We	4,455	4,20E-06	1,80E-06	4,633	2,00E-06	4,611
ČSN	N,Lg,Lg	2,660	3,91E-03	3,55E-03	2,692	3,79E-03	2,671
ČSN	B,We,We	2,641	4,14E-03	3,05E-03	2,743	3,31E-03	2,715

Dále může vyvstat otázka, zda se výsledky analýz změní, pokud jsou uváženy jiné tvary rozdělovacích funkcí vstupních veličin $\mathbf{X} = \{\phi, V, H\}$. Proto byly provedeny analýzy současně také pro druhou sadu vstupních rozdělení, které jsou sumarizovány v tab. 1, řádky 4-6. Jmenovitě, úhel vnitřního tření byl modelován pomocí beta rozdělení v rozmezí 28°-42° (parametry tvaru beta rozdělení jsou 4,6988 a 3, viz obr. 1a). Charakteristická hodnota 32,5° odpovídající 5% kvantilu byla ponechána. Svislá a vodorovná složka zatěžující síly byla modelována pomocí Weibullova rozdělení s tvarovým parametrem $m = 1,438$ (viz tab. 1 a obr. 1). Stejně jako v případě úhlu vnitřního tření byly parametry rozdělení zvoleny tak, aby hodnoty charakteristické a návrhové síly (400 a 540 kN/m) byly stejné jako v předchozích analýzách. Tím bylo dosaženo jisté kompatibility porovnávaných alternativ. Přestože souřadnice návrhového bodu se přechodem k variantě rozdělení B, We, We téměř nezměnily (tab. 3, druhý řádek), hodnota pravděpodobnosti poruchy se změnila téměř o řád. Důvodem je, že Weibullovo a lognormální rozdělení mají výrazně jiné tvary chvostů rozdělení. Weibullovo rozdělení má výrazně nižší modus než lognormální rozdělení, a proto hodnoty nejfrekventovanějších sil jsou ve druhé variantě výrazně menší. Lognormální roz-

dělení má však výrazně těžší pravý chvost, a proto je zde vyšší pravděpodobnost výskytu velké síly. Současně lze pozorovat, že rozdělení beta úhlu vnitřního tření způsobuje poněkud četnější výskyt vyšších hodnot, zatímco úhel nemůže klesnout pod dolní mez 28° (viz obr. 1a). Všechny tyto aspekty jsou důvodem toho, že varianta rozdělení B, We, We vede k výrazně nižším pravděpodobnostem poruchy i přes to, že charakteristické hodnoty a výpočtové hodnoty jsou stejné jako ve variantě N, Lg, Lg (tab. 3).

Připomeňme, že citlivosti α , získané jako vedlejší produkt algoritmu pro hledání návrhového bodu v proceduře metody FORM, reprezentují citlivosti indexu spolehlivosti β na náhodné vstupní veličiny. Jiným měřítkem citlivosti jsou statistické korelační koeficienty mezi vzorky náhodných veličin a vzorky funkce $Z = g(\mathbf{X})$ v analýze metodou Monte Carlo. Takové korelace kvantifikují citlivosti výstupní veličiny Z na vstupních veličinách především v oblasti okolo středních hodnot. Tabulka 4 prezentuje uvedené korelace a je patrné, že v obou případech studovaných postupů návrhu (EC a ČSN) a současně v obou alternativách rozdělení jsou výsledky takřka totožné – hlavní vliv má úhel vnitřního tření, neboť absolutní hodnota korelace je blízká jedné. Ostatní náhodné veličiny mají zápornou korelaci (jejich nárůst je doprovázen poklesem výsledku) a jsou absolutně korelovány s veličinou Z málo.

Tab. 4. Citlivosti (korelační koeficienty mezi náhodnými vstupy a funkcí $g(\mathbf{X})$) pro plošný základ navržený pomocí EC a ČSN a rovněž pro obě studované alternativy rozdělovacích hustot náhodného vektoru

B navržena pomocí	N,Lg,Lg			B,We,We		
	$x_1 = \phi$	$x_2 = V$	$x_3 = H$	$x_1 = \phi$	$x_2 = V$	$x_3 = H$
EC	0,99	-0,12	-0,14	0,95	-0,11	-0,17
ČSN	0,94	-0,29	-0,29	0,89	-0,30	-0,34

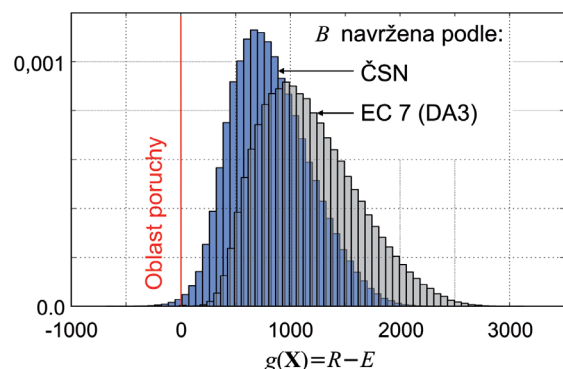
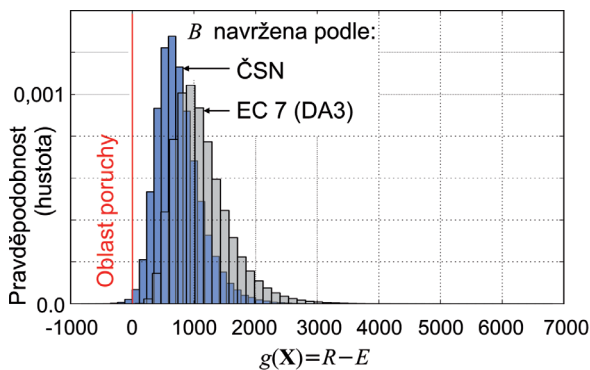
Na závěr jsou prezentovány empirické histogramy funkce $Z = g(\mathbf{X})$, viz obr. 3. Je vidět, že pro všechny čtyři studované kombinace návrhů podle normy a alternativ rozdělení je šikmost transformované veličiny Z výrazně odlišná od nuly a rozdělení veličiny Z se nepodobá normálnímu rozdělení. To vysvětluje proč Rjantizyne-Cornellův index spolehlivosti, vypočtený jako podíl střední hodnoty a směrodatné odchylky veličiny Z

$$\beta_{RC} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{1}{\text{cov}_Z}, \quad (13)$$

je ve studovaném případě zcela nevhodnou mírou indexu spolehlivosti.

Závěry

Ve druhé části předkládané tematiky bylo přistoupeno k verifikaci úrovně spolehlivosti návrhů dle EC7 a ČSN 73 1001 (viz část I) za pomoci plně pravděpodobnostního přístupu s uvážením dvou různých alternativ vstupních sdružených hustot náhodného vektoru. Ze studie lze vyvodit následující závěry:



Obr. 3. Empirické histogramy funkce $g(\mathbf{X})$
a – vstupní parametry v alternativě NLgLg;
b – alternativa BWeWe

- Návrh šířky plošného základu pomocí metody dílčích součinitelů spolehlivosti v EC 7 (DA3) vede ke stejné šířce, které by bylo dosaženo za použití plně pravděpodobnostní metody. K tomuto závěru jsme došli pro variantu rozdělení vstupů označenou jako N, Lg, Lg na základě porovnání pravděpodobností poruchy. Též z hlediska vhodnosti návrhového přístupu dle EC 7 nelze tento závěr považovat za obecně platný vzhledem ke skutečnosti, že další návrhové přístupy nebyly analyzovány a řešení je omezeno na jednoduchou úlohu.
- Vypočtené pravděpodobnosti poruchy základu navrženého pomocí EC 7 nebo ČSN reprezentují horní mez pravděpodobnosti poruchy, neboť navržená šířka základu B podle normy nemůže být podkročena. Analýzy byly prováděny s neekonomičtějším návrhem.
- Výsledky analýz pomocí simulačních metod (MC, LHS) a aproximací metodou FORM ukazují, že pravděpodobnosti poruchy nejsou příliš ovlivněny proporcí (korelací) mezi svíslou a vodorovnou složkou zatížení. Z tohoto pohledu se návrh podle EC 7 jeví jako návrh s dobře vyváženou úrovní spolehlivosti pro širokou škálu vstupních veličin.

Abychom získali představu o vlivu volby vstupních rozdělovacích hustot, byly provedeny analýzy s tvarově rozdílnými rozdělovacími funkcemi jak pro zatěžovací síly, tak pro úhel vnitřního tření zeminy. Výsledné pravděpodobnosti poruchy se liší přibližně o řád. K takovému závěru lze však dospět jedině za použití plně pravděpodobnostního výpočtu. V metodě dílčích součinitelů není žádná možnost, jak takto využít případnou detailní znalost rozdělovací hustoty nějakého parametru. Provedené analýzy ukazují, že výsledkem plně pravděpodobnostního výpočtu jsou také citlivosti, které mohou inženýrům prozradit, na které parametry je model citlivý. Takové informace lze využít například pro volbu parametrů, u kterých je dobré zaměřit případné testy *in-situ* tak, aby bylo možné snížit nejistoty o variabilitě vstupních veličin, a provést tak ekonomičtější a spolehlivý návrh.

Skutečností je, že v geotechnické inženýrské praxi je přístup k velkému množství laboratorních dat velmi problematický. Obvykle je k dispozici omezený statistický vzorek a v rutinní praxi často nejsou vůbec žádná data. Autoři hodlají nadále usilovně pracovat na vytvoření datové podpory pro určení statistických parametrů geomateriálů. V současné době jsou zpracovávána např. data získaná z archivních dat pro brněnský region (neogenní jíly). Tato data jsou podrobená statistické analýze v programu FREET s cílem získat nejvhodnější funkci pravděpodobnosti rozdělení a její statistické parametry.

Závěrem poznamenejme, že předložená studie neuvažuje kombinace různých druhů zatížení (stálé, užité apod.), neboť cílem bylo zřetelně ilustrovat rozdíly mezi metodou dílčích součinitelů a plně pravděpodobnostním výpočtem pro geotechnickou aplikaci. Dosažené výsledky jsou spíše kvalitativní výpovědi pro jednoduché případy.

Přítom je třeba zdůraznit, že statistické zhodnocení vstupních parametrů (zejména základové půdy) nevychází ze sta-

tistické analýzy souboru výsledků příslušných zkoušek. Charakteristická hodnota dle EC 7 byla převzata z [8], citované v části 1. Charakteristická hodnota dle ČSN 73 1001 byla statisticky vyhodnocena z intervalu směrných normových charakteristik pro písek uvedených v předmětné normě.

Článek vznikl za podpory projektu MSM0021630519 MŠMT ČR a projektu KJB201720902 GA AV ČR.

Literatura

- [1] Barták, J. – Hilar, M. – Pruška, J.: Statistical Analysis of Input Parameters Influence to the Tunnel Deformations Modelling In: Fourth International Conference on Computational Stochastic Mechanics [CD-ROM]. Corfu, 2002, pp. 280-292.
- [2] Kádár, I. – Nagy, L.: Determination of the statistical analysis of shear strength and shear strength parameters. In: Frankovská a kol. (eds.), [Proc.], XIV. Danube-European Conference on Geotechnical Design – From research to Design in European Practise, Bratislava, 2010, p. 141.
- [3] Lamboj, L.: Několik poznámek ke stanovení charakteristické hodnoty geotechnického parametru základové půdy a návrhové hodnoty odolnosti základové půdy podle EC 7-1 (ČSN EN 1997-1:), Stavební obzor, **10**, 2001, č. 2, s. 61-62.
- [4] Liu, P. L. – Der Kiureghian, A.: Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. Probabilistic Engineering Mechanics, **1**(2):1986, pp. 105-112.
- [5] Madsen, H. O. – Krenk, S. – Lind, N. C.: Methods of Structural Safety. New Jersey, Prentice-Hall/Englewood Cliffs 1986.
- [6] Nataf, A.: Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont donnés. Paris, CR Academy of Science, 225:1962, pp. 42-43.
- [7] Novák, D. – Vořechovský, M. – Rusina, M.: FREET version 1.5 – program documentation. User's and Theory Guides, Brno, Červenka Consulting 2008.
- [8] Novotná, E. – Špačková, O. – Jarušková, D. – Šejnoha, J.: Predikce nepříznivých geotechnických podmínek s využitím pravděpodobnostních modelů. Stavební obzor, **9**, 2010, č. 4, s. 106-110.
- [9] Parák, T.: Posouzení svíslé únosnosti základové půdy metodou Monte Carlo a porovnání s výpočtem podle ČSN 73 1001, Stavební obzor, **5**, 2006, č. 2, s. 50-53.
- [10] Schneider, H.: Characteristic soil properties for EC7, influence of quality of test resets and soil volume involved. In: Frankovská a kol. (eds), [Proc.], XIV. Danube-European Conference on Geotechnical Design – From research to Design in European Practise, Bratislava, 2010.
- [11] Šejnoha, M. – Kalousková, M. – Kos, J.: Vliv doby výstavby konstrukce na pravděpodobnost poruchy zemního svahu. Stavební obzor, **9**, 2010, č. 4, s. 101-105.
- [12] Vořechovský, M. – Novák, D. Correlation control in small sample Monte Carlo type simulations I: A Simulated Annealing approach. Probabilistic Engineering Mechanics Elsevier, **24**(3):2009, pp. 452-462.
- [13] Vrouwenvelder, A. C. W. M.: Developments towards full probabilistic design codes. Structural Safety, **24**(2-4), 2002, pp. 417-432.
- [14] Boštík, J. – Miča, L. – Vořechovský, M.: Posouzení únosnosti plošného základu – část 1: Návrh pomocí metody dílčích součinitelů. Stavební obzor, **21**, 2012, č. 1, s. 1-3.
- [15] ČSN EN 1997-1 (2006): Eurokód 7: Navrhování geotechnických konstrukcí – Část 1: Obecná pravidla.
- [16] ČSN 731001 (1987): Zakládání staveb: Základová půda pod plošnými základy.