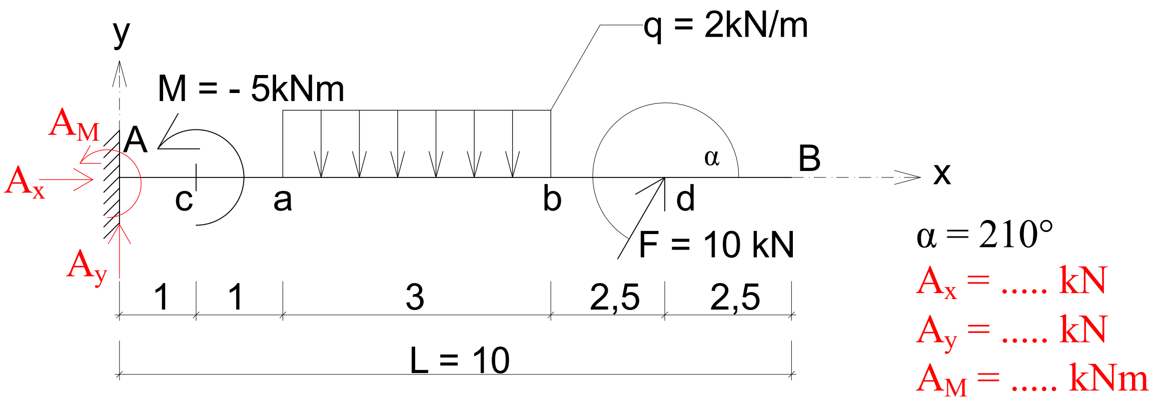
Vzorový příklad k 1. kontrolnímu testu
Konzola

Zadání:

Vypočtěte složky reakcí a vykreslete průběhy vnitřních sil.



Rozklad síly F

Sílu F rozložíme pomocí ostrého úhlu, který označíme jako β. $\beta = \alpha - 180^o = 30^o$

$$F_x = F \cdot cos\alpha = 10 \cdot cos\, 30^o = 8,66\,\mathrm{kN} \rightarrow \tag{1}$$

$$F_y = F \cdot sin\alpha = 10 \cdot cos\, 210^o = 5,0\,\mathrm{kN} \uparrow \tag{2}$$

Náhradní břemeno Q

Náhradní břemeno Q je rovno ploše dané velikostí spojitého zatížení q a jeho délce (v našem případě $q \in (a; b)$).

$$Q = q \cdot |ab| = 2 \cdot 3 = 6,0\,\mathrm{kN} \tag{3}$$

Poloha náhradního břemena Q leží vždy v těžišti spojitého zatížení (v našem případě rovnoměrného spojitého zatížení v polovině vzdálenosti mezi body a a b). Nyní máme vše potřebné pro výpočet složek reakcí.

Složky reakcí a podmínky rovnováhy

Vnější vazby zamezují v pohybu (posuvům, rotacím) konstrukce, odebírají stupně volnosti. Ve vnějších vazbách (podporách) vznikají reakce, které zajišťují rovnováhu se zatížením. Vzniká tedy rovnovážná soustava, pro kterou lze sestavit **podmínky rovnováhy**:

- Silová podmínka rovnováhy ve směru x $\Rightarrow \sum F_x = 0$
- Silová podmínka rovnováhy ve směru y $\Rightarrow \sum F_y = 0$

  Momentové podmínky rovnováhy je výhodné položit k bodům podepření, dojde ke snížení členů v rovnici

- Momentová podmínka rovnováhy k bodu A $\Rightarrow \sum M_i^A = 0$
- Momentová podmínka rovnováhy k bodu B $\Rightarrow \sum M_i^B = 0$

Výpočet složek reakcí

U konzoly je výhodné použít **silové podmínky rovnováhy ve směru x a y** a některou **momentovou podmínku rovnováhy k bodu A**, pro kontrolu využijeme momentovou podmínku k bodu B.

- Silová podmínka ve směru x, uvažovaný kladný směr $+\rightarrow$

$$\sum F_x = 0 : A_x + F_x = 0 \Rightarrow A_x = -F_x = -8,66\,\mathrm{kN} \rightarrow \tag{4}$$

- Silová podmínka ve směru y, uvažovaný kladný směr $+\uparrow$

$$\sum F_y = 0 : A_y - Q + F_y = 0 \Rightarrow A_y = Q - F_y = 6 - 5 = 1\,\mathrm{kN} \uparrow \tag{5}$$

- Momentová podmínka rovnováhy k bodu A, kladný smysl otáčení zvolíme $M^+ \circlearrowleft$

$$\begin{aligned} \sum M_i^A &= 0 : A_M + M - Q \cdot (3,5) + F_y \cdot (7,5) = 0 \Rightarrow \\ A_M &= -M + Q \cdot (3,5) - F_y \cdot (7,5) = -(-5) + 6 \cdot 3,5 - 5 \cdot 7,5 = -11,5\,\mathrm{kNm} \end{aligned} \tag{6}$$

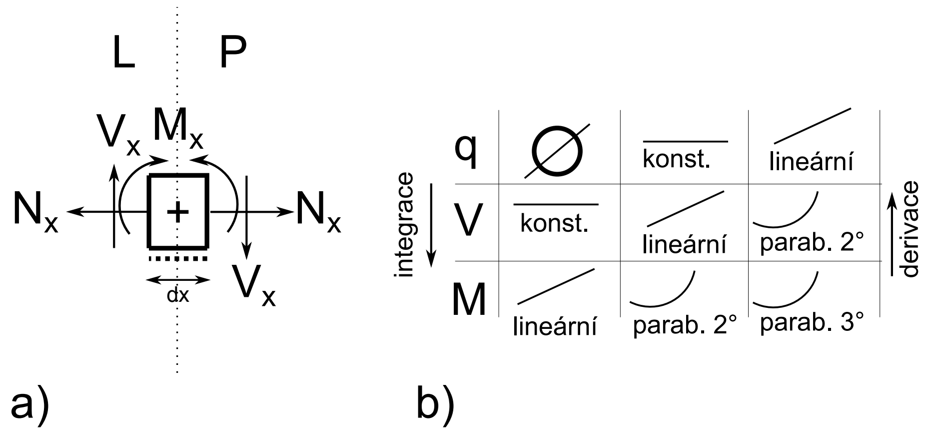
- Kontrolní momentová podmínka rovnováhy k bodu B, kladný smysl otáčení zvolíme $M^+ \circlearrowleft$

$$\begin{aligned} \sum M_i^B = 0 : -A_M + A_y \cdot L - M - Q \cdot (6,5) + F_y \cdot (2,5) &= 0 \\ -(-11,5) + 1 \cdot 10 - (-5) - 6 \cdot 6,5 + 5 \cdot 2,5 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Nyní známe všechny složky reakcí, které jsou v rovnováze s působícím zatížením. Než přejdeme k vykreslední složek vnitřních sil, připomínám kladnou konvenci složek vnitřních sil (obrázek 1) a tvar průběhu vnitřních sil, který plyne z derivačně-integračního schématu.

Průběhy vnitřních sil

Ve většině případů budeme postupovat zleva, za kladné uvažujeme vnitřní síly dle levé části obrázku 1a.



Obrázek 1: a) Kladný smysl vnitřních sil pro levou i pravou část nosníku. b) Tvar průběhu vnitřních sil - derivačně integrační schéma.

Normálové síly N_x

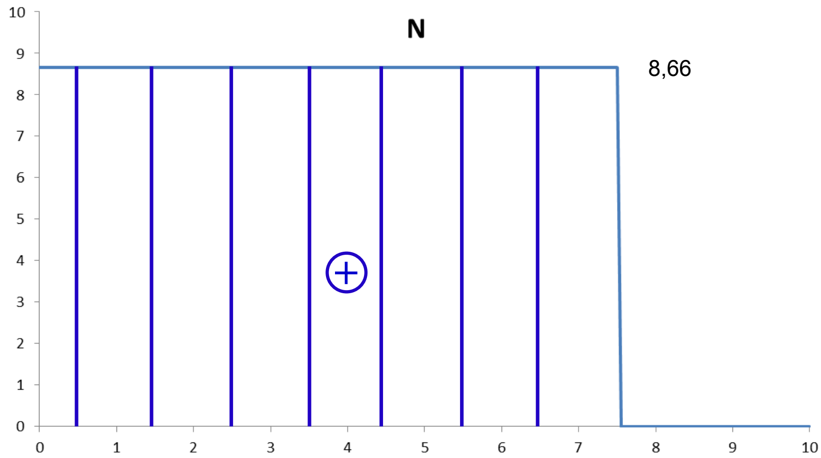
V bodě 0 působí reakce A_x v opačném smyslu než uvažovaný kladný směr (způsobuje tlak v nosníku). Pak:

$$N_{x,0} = -A_x = -(-8,66) = 8,66\,\mathrm{kN} \tag{8}$$

Postupujeme-li zleva narazíme na další sílu působící ve směru osy nosníku (osy x) až v bodě d. Po bod d zůstává normálová síla N_x konstantní a rovna $N_{x,0}$. V bodě d dojde vlivem F_x ke změně v průběhu normálové síly. Síla F_x působí v opačném směru jako je kladná konvence normálové síly při postupu zleva

$$N_{x,d} = -A_x + F_x = -(-8,66) - 8,66 = 0,0\,\mathrm{kN} \tag{9}$$

Na zbylé části nosníku již žádná síla ve směru x nepůsobí, průběh normálových sil se tedy nezmění.



Obrázek 2: Průběh normálových sil.

Posouvající síly V_x

V bodě 0 působí reakce A_y v shodném smyslu jako uvažovaný kladný směr. Pak:

$$V_{x,0} = A_y = 1,0\,\text{kN} \tag{10}$$

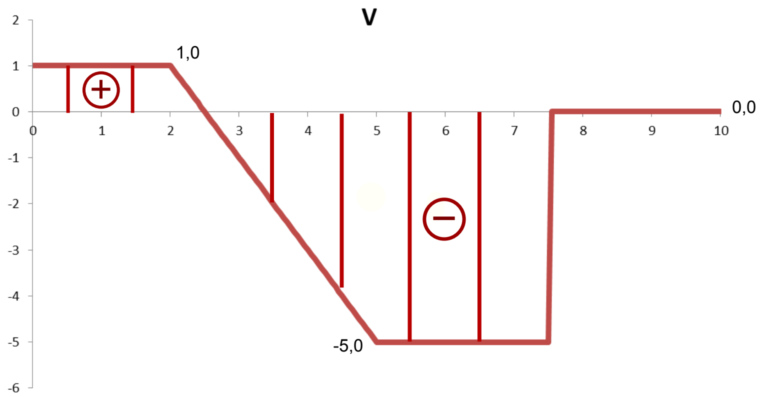
Postupujeme-li zleva narazíme na další sílu působící ve směru osy y až v bodě a. Po bod a zůstává posouvající síla V_x konstantní a rovna $V_{x,0}$. Od bodu a po bod b působí spojité zatížení o intenzitě 2 kN/m. Je-li spojité zatížení konstantní bude průběh posouvající síly V_x v tomto úseku lineární a bude klesat s intezitou q až do bodu b. V bodě b je tedy posouvající síla rovna

$$V_{x,b} = A_y - q \cdot |ab| = 1 - 2 \cdot 3 = -5\,\text{kN} \tag{11}$$

Od bodu b pod bod d zůstává posouvající síla opět konstantní a rovna $V_{x,b}$. V bodě d začne půsbit y-složka síly F, dojde ke skoku v průběhu posouvající síly.

$$V_{x,d} = A_y - q \cdot |ab| + F_y = 1,0 - 2 \cdot 3 + 5 = 0,0\,\text{kN} \tag{12}$$

Postupujeme-li dále po nosníku nenarazíme na další sílu ve směru y, síla zůstává konstantní o velikosti 0,0.



Obrázek 3: Průběh posouvajících sil.

Ohybový moment M_x

Postupujeme-li zleva uvažujeme za kladný smysl otáčení účinky působící ve směru hodinových ručiček. V bodě 0 působí reakce A_y v shodném smyslu jako uvažovaný kladný směr, ale na nulovém rameni r a také reakce A_M působící v záporném smyslu. Pak:

$$M_{x,0} = A_y \cdot 0 - A_M = -(-11,5) = 11,5\,\text{kNm} \tag{13}$$

Další bod, ve kterém určíme velikost momentu, bude bod c, v němž působí osamělý moment M. Nejprve určíme hodnotu těsně vlevo před bodem c. Mezi body A a c nepůsobí spojité zatížení, průběh ohybových momentů bude lineární (dle derivačně-integračního schématu).

$$M^L_{x,c} = A_y \cdot |0c| - A_M = 1,0 \cdot 1 - (-11,5) = 12,5\,\text{kNm} \tag{14}$$

V bodě c nastane skok vlivem osamoceného momentu M, jehož účinek je záporný.

$$M^P_{x,c} = A_y \cdot |0c| - A_M - M = 1,0 \cdot 1 - (-11,5) - (-5) = 17,5\,\text{kNm} \tag{15}$$

Další bodem ve výpočtu bude bod a, v něm určíme moment následujícím způsobem

$$M_{x,a} = A_y \cdot |0a| - A_M - M = 1,0 \cdot 2 - (-11,5) - (-5) = 18,5\,\text{kNm}. \tag{16}$$

Pokračujeme bodem b. Mezi body $|ab|$ působí spojité zatížení $\Rightarrow$ průběh momentů bude parabola 2^o.

$$M_{x,b} = A_y \cdot |0b| - A_M - M - Q \cdot \frac{|ab|}{2} = 1,0 \cdot 5 - (-11,5) - (-5) - 6 \cdot 1,5 = 12,5\,\text{kNm}. \tag{17}$$

Moment k bodu d si určíme postupem z levé i z pravé strany nosníku.

$$M^L_{x,d} = A_y \cdot |0d| - A_M - M - q \cdot |ab| \cdot (|0d| - \frac{a+b}{2}) = 1,0 \cdot 7,5 - (-11,5) - (-5) - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0,0\,\text{kNm}. \tag{18}$$

Z pravé strany nosníku nepůsobí žádné zatížení, síla v bodě b je rovna 0.

$$M^P_{x,d} = F_y \cdot 0 = 5,0 \cdot 0 = 0,0\,\text{kNm}. \tag{19}$$

Mezi body b a B je průběh ohybového momentu konstantní a je roven 0,0. Lokální maximum ohybového momentu se nachází v tzv. místě přechodového průřezu, tj. místo, v němž je posouvající síla rovna 0. Toto místo označme jako X. Polohu X určíme z následující rovnice

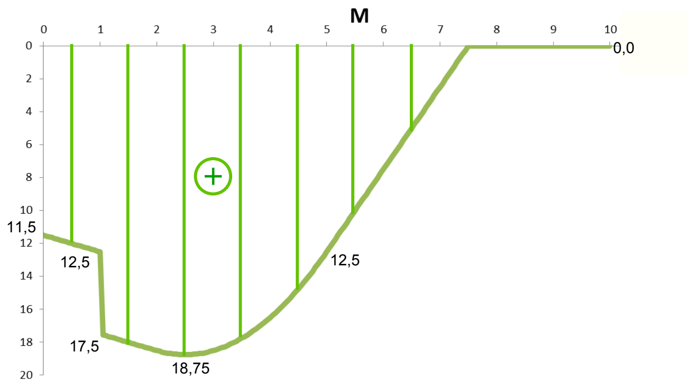
$$V_{x,a} - \int_a^X q\,dx = 0, \tag{20}$$

integrál $\int_a^X q\,dx$ je plocha spojitého zatížení mezi body a a $X \Rightarrow \int_a^X q\,dx = q \cdot |aX|$. Pak lze v tomto případně jednoduše určit vzdálenost $|aX|$ jako:

$$|aX| = \frac{V_{x,a}}{q} = \frac{1}{2} = 0,5\,\text{m}. \tag{21}$$

V tomto místě bude maximální ohybový moment, který vyjádříme například zleva takto:

$$M_{x,X} = A_y \cdot |0X| - A_M - M - q \cdot |aX| \cdot \frac{|aX|}{2} = 1,0 \cdot (2+0,5) - (-11,5) - (-5) - 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} = 18,75\,\text{kNm}. \tag{22}$$



Obrázek 4: Průběh ohybových momentů.

Shrnutí

Doufám, že vám následující příklad pomůže zvládnout bez problémů 1. kontrolní test, který vás čeká v 5. týdnu výuky.