MATEMATIKA BA001 - Test 2

I. ročník kombinovaného studia

Příklad 1. Určete derivaci f' a definiční obory $D(f)$ a $D(f')$ funkce

a)

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

(Návod: Před derivováním je výhodné nejpre funkci upravit pomocí pravidel pro počítání s logaritmy.)

b)

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}};$$

(Návod: při algebraických úpravách derivace využijte vzorec $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$)

c)

$$f(x) = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

Příklad 2. Vypočítejte f'', je-li $f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{x+1}{x-1}$.

Příklad 3. Vyšetřete průběh funkce:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$; b) $f(x) = \frac{3x-2}{2x^2}$;

c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; d) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Příklad 4. Určete Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v okolí bodu x_0:

$f(x) = \ln(1+2x)$, $x_0 = 1$, $n = 4$.

Příklad 5. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos 2x$ v bodě $T = [0, ?]$ ležícím na grafu.

Příklad	1a	1b	1c	2	3a	3b	3c	3d	4	5	součet
Body	5	5	10	10	20	20	20	20	10	10	130

Výsledky:

Označení:

$N = [*, *]$	nulové body funkce
$E = [*, *]$	extrémní body funkce
$I = [*, *]$	inflexní body funkce

1. a) $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $D(f) = D(f') = (-1, 1)$ b) $f'(x) = \frac{1}{x^3+1}$, $D(f) = D(f') = (-1, \infty)$ c) $f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $D(f) = \langle 0, \infty)$, $D(f') = (0, \infty)$

2. $f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

3. a)

1. $D(f) = R$, N neexistují, znam$f(x)$ je stále $+$,
2. $f' = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $D(f') = R$, znam$f'(x)$ je v intervalu $(-\infty, 0)$ $+$, $E = [0, 1]$,
3. $f'' = -2x^2(1 - 2x^2)$, $D(f'') = D(f)$, znam$f''(x)$ je v intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ $+$, $I_1 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}]$, $I_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}]$,
4. asymptoty bez směrnice neexistují, $y = 0$ je asymptota se směrnicí pro x jdoucí k $\pm\infty$,

b)

1. $D(f) = R - \{0\}$, N neexistují, znam$f(x)$ je v intervalu $(\frac{2}{3}, \infty)$ $+$,
2. $f' = \frac{1}{2}\frac{-3x+4}{x^3}$, $D(f') = D(f)$, znam$f'(x)$ je v intervalu $(0, \frac{4}{3})$ $+$, $E = [\frac{4}{3}, \frac{9}{16}]$,
3. $f'' = 3\frac{x-2}{x^4}$, $D(f'') =, D(f)$, znam$f''(x)$ je v intervalu $(2, \infty)$ $+$, $I = [2, \frac{1}{2}]$,
4. asymptota bez směrnice je $x = 0\,(\lim_{x\to 0^+} = -\infty, \lim_{x\to 0^-} = -\infty)$, $y = 0$ je asymptota se směrnicí je pro x jdoucí k $\pm\infty$

c)

1. $D(f) = R - \{1\}$, $N = [0, 0]$, znam$f(x)$ je v intervalu $(1, \infty)+$,
2. $f' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $D(f') = D(f)$, znam$f'(x)$ je v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ $+$, $E_1 = [0, 0], E_2 = [2, 4]$,
3. $f'' = \frac{2}{(x-1)^3}$, $D(f'') = D(f)$, znam$f''(x)$ je v intervalu $(1, -\infty)$ $+$, I neexistují,
4. asymptota bez směrnice je $x = 1\,(\lim_{x\to 1^+} = \infty, \lim_{x\to 1^-} = \infty))$, $y = x + 1$ je asymptota se směrnicí pro x jdoucí k $\pm\infty$

d)

1. $D(f) = R - \{0\}$, N neexistují, znam$f(x)$ je v intervalu $(0, \infty)$ $+$,
2. $f' = -\frac{1}{x^2+1}$, $D(f') = D(f)$, znam$f'(x)$ je stále $-$, E neexistují,
3. $f'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $D(f'') = D(f)$, znam$f''(x)$ je v intervalu $(0, \infty)$ $+$, I neexistují,
4. asymptoty bez směrnice neexistují $x = 0\,(\lim_{x\to 0^+} = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to 0^-} = -\frac{\pi}{2})$, $y = 0$ je asymptota se směrnicí pro x jdoucí k $\pm\infty$

4 $f(x) \doteq T_4(x) = \ln 3 + \frac{2}{3}(1 - x) - (\frac{2}{3})^2\frac{1}{2}(x - 1)^2 + (\frac{2}{3})^3\frac{1}{3}(x - 1)^3 - (\frac{2}{3})^4\frac{1}{4}(x - 1)^4$

5. $t : y = 1 - x$, $n : y = 1 + x$**.**