3. Křivkový integrál ve skalárním poli

Vypočtěte:

3.1 Hmotnost křivky $\gamma: \vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, je-li dána hustota křivky $\sigma(x,y,z) = 2z - \sqrt{x^2+y^2}$.

[*integrací polynomu ihned vyjde* $2\sqrt{2}\pi(2\pi - 1)$]

3.2 $\int_\gamma xy\, ds$, kde $\gamma = \{[x,y] \in R^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, kde $a > 0, b > 0$ jsou konstanty.

[*obvyklá parametrizace elipsy (viz Integrální počet II, str. 37), "odmocninová substituce",* $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ *; vyjde* $\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}$]

3.3 Hmotnost šroubovice $\gamma: \vec{r}(t) = t\cos t \cdot \vec{i} + t \sin t \cdot \vec{j} + 3t \cdot \vec{k},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, je-li dána hustota křivky $\sigma(x,y,z) = z$.

[*obvyklá substituce, snadno vyjde* $\sqrt{(4\pi^2+10)^3} - \sqrt{10^3}$]

3.4 Obsah části válcové plochy s řídící křivkou $\gamma = \{[x,y,z] \in R^3; x^2+y^2 = 1, z = 0\}$, je-li tato válcová plocha vymezena plochami $z = x^2,\ z = 2 + y^2$.

[*parametrizace kružnice ; vyjde* 4π *(zkuste i obrázek)*]

3.5 Obsah části válcové plochy s řídící křivkou $\gamma = \{[x,y,z]; 4x^2 + 9y^2 = 36, y \geq 0, z = 0\}$, je-li tato válcová plocha vymezena plochami $z = 0,\ z = -xy$.

[*parametrizace elipsy, nutno integrovat v 1. a2. kvadrantu zvlášť, v obou integrálech obvyklá substituce* $\sqrt{\cdots} = u$*; snadno vyjde:* $\frac{76}{5}$]

3.6 Hmotnost křivky $\gamma = \{[x,y,z]; x^2+y^2 = 2y, z = x^2+y^2, x \geq 0, y \geq 1\}$, je-li dána hustota křivky $\sigma(x,y,z) = x\,(y-1)$.

[*parametrizace kružnice* $x^2+y^2 = 2y$ *pro* $x \geq 0, y \geq 1$, $\sqrt{\cdots} = u$; $\frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)$]

3.7 $\int_\gamma (z-x)^2\, ds$, kde $\gamma: \vec{r}(t) = (\cos t - \sin t) \cdot \vec{i} + 3t \cdot \vec{j} + (\cos t + \sin t) \cdot \vec{k},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

[*snadno vyjde* $4\sqrt{11}\pi$]

3.8 $\int_\gamma \frac{\sqrt{2+x^2+y^2}}{z+1}\, ds$, kde $\gamma: \vec{r}(t) = t\cos t \cdot \vec{i} + t \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

[*po správném dosazení do integrálu a úpravě integrandu vyjde lehce:* $2\pi^2 - 2\pi + 3\ln(2\pi+1)$]

3.9 Hmotnost oblouku šroubovice $\gamma: \vec{r}(t) = 3\cos t \cdot \vec{i} + 3 \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, je-li dána hustota křivky $\sigma(x,y,z) = 2 + \frac{x^2-y^2}{10}$.

[*snadno vyjde* $4\sqrt{10}\pi$]

3.10 Těžiště homogenního oblouku $\gamma: \vec{r}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k},\ t \in \langle 0, \pi \rangle$, kde $a > 0, b > 0$ jsou konstanty.

[*přesně podle vzorcu pro výpočet těžiště vyjde bez problémů* $T = \left[0, \frac{2a}{\pi}, \frac{\pi b}{2}\right]$]

3.11 Hmotnost oblouku šroubovice $\gamma\ :\ \vec{r}(t) = 2\cos t\cdot\vec{i} + 2\sin t\cdot\vec{j} + 3t\cdot\vec{k},\ t\in\langle 0, \frac{2}{3}\rangle$, je-li dána hustota křivky $\sigma(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

[*při integraci užijte vzorec* $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}$*; vyjde* $\frac{\sqrt{13}\pi}{24}$]

3.12 $\int_\gamma xy\,ds$, kde $\gamma\ :\ \vec{r}(t) = \sin t^2\cdot\vec{i} + \sin t\cos t\cdot\vec{j} + \cos t\cdot\vec{k},\ t\in\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

[$ds = \sqrt{1+\sin^2 t}dt$*, obvyklá substituce,* $\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$]

3.13 $\int_\gamma |xy|\,ds$, kde $\gamma = \{[x,y]\in R^2; x^2+y^2=4\}$.

[*parametrizace kružnice s restrikcí* $4x$ *snadno vyjde* 16]

3.14 $\int_\gamma \sqrt{y}\,ds$, kde $\gamma\ :\ \vec{r}(t) = a(t-\sin t)\cdot\vec{i} + a(1-\cos t)\cdot\vec{j},\ t\in\langle 0, 2\pi\rangle$ (první oblouk tzv. cykloidy).

[*po správném zderivování a dosazení do integrálu ihned vyjde* $2\sqrt{2}\pi a^{3/2}$]

3.15 $\int_\gamma \sqrt{16x^2+y^2}\,ds$, kde $\gamma = \{[x,y]\in R^2; x^2+\frac{y^2}{4}=1\}$.

[*parametrizace elipsy, integrand je po úpravě jednoduchý (odmocnina zmizí), vyjde* 10π]

3.16 Moment setrvačnosti I_y homogenního oblouku $\widehat{AB}$ křivky $\gamma\ :\ y=\ln x,\ A=[1,0], B=[2,\ln 2]$.

[*přesně podle vzorce pro* I_y *a parametrizaci* $x=t, y=\ln t$ *vyjde:* $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$]

3.17 $\int_\gamma xy\,ds$, kde křivka γ je dána jako obvod obdélníka ABCD s vrcholy na přímkách $x=0, x=4, y=0, y=2$.

[$\gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$*, snadná parametrizace, vyjde* 24]

3.18 $\int_\gamma xyz\,ds$, kde γ je dána jako oblouk křivky $x=t, y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z=\frac{1}{2}t^2$ mezi body určenými hodnotami parametru $t=0, t=1$.

[*integrací polynomu snadno vyjde* $\frac{16\sqrt{2}}{143}$]

3.19 $\int_\gamma z\,ds,\ \gamma\ :\ \vec{r}(t) = t\cos t\cdot\vec{i} + t\sin t\cdot\vec{j} + t\cdot\vec{k},\ t\in\langle 0,\sqrt{2}\rangle$.

[*také jednoduchý příklad, vyjde* $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$]