

1. Je dána rozdělovací funkce  $g(x)$  náhodné veličiny  $X$  předpisem

$$g(x) = \begin{cases} c(x-1)^2 & \text{pro } x \in (1, 4), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) Určete konstantu  $c$ , obor hodnot  $\Omega$  náhodné veličiny  $X$  a zdůvodněte, zda se jedná o náhodnou veličinu spojitou, nebo diskrétní.  
 b) Určete  $P(X = 2)$ ,  $P(X > 5)$ ,  $P(X \leq 2)$ ,  $P(X \in \langle 0, 3 \rangle)$ .  
 c) Najděte distribuční funkci  $G(x)$  náhodné veličiny  $X$  a pomocí ní vyjádřete pravděpodobnosti z b).  
 2. Určete střední hodnotu  $E(X)$  a rozptyl  $D(X)$  náhodné veličiny  $X \sim g(x) = \frac{x}{6}$  pro  $x = 1, 2, 3$ .  
 3. Určete 50%-ní kvantil (medián) náhodné veličiny  $X \sim f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .  
 4. Náhodný vektor  $(X, Y)$  má pravděpodobnostní funkci  $p(x, y)$  danou tabulkou

$x \backslash y$	1	2	3
0	0,04	0,06	0,1
1	0,16	0,24	0,4

Jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé? Dále určete hodnotu kovariance  $C(X, Y)$  veličin  $X$  a  $Y$ . Své odpovědi řádně zdůvodněte.

5. Náhodný vektor  $(X_1, X_2, X_3)$  má rozdělovací funkci

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{33}(x_1x_2 + 2x_3) \text{ pro } (x_1, x_2, x_3) \in (0, 1) \times (0, 2) \times (1, 4).$$

Najděte

- a) Rozdělovací funkci  $g_{1,2}(x_1, x_2)$  marginálního vektoru  $(X_1, X_2)$ .  
 b) Rozdělovací funkci  $g_3(x_3)$  marginální veličiny  $X_3$ .  
 c)  $P(0 < X_1 < 1, 0 < X_2 < 1, 0 < X_3 < 1)$ .  
 d) Je náhodný vektor  $(X_1, X_2, X_3)$  spojitý, nebo diskrétní?  
 6. Předpokládejme, že životnost určitého výrobku je náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti  $f(x) = e^{-x}$  pro  $x > 0$ . Označme  $X_1, X_2, X_3$  životnost tří různých výrobků v letech. Vypočítejte pravděpodobnost, že první výrobek dosáhne životnosti nejvýše 2 roky, životnost druhého bude dovršena mezi prvním a třetím rokem a třetí výrobek přežije 2 roky.  
 7. Náhodná veličina  $Y$  vznikla transformací

$$Y = e^X$$

náhodné veličiny  $X$ , která má hustotu pravděpodobnosti  $f(x) = 1$  pro  $x \in (0, 1)$ . Najděte hustotu pravděpodobnosti  $g(y)$  transformované náhodné veličiny  $Y$ .

8. V 1 litru vody bylo zjištěno průměrně 14 zrněk nečistot. Určete pravděpodobnost, že v 1/2 litru vody budou nejvýše 3 zrna nečistot.

Výsledky:

1. a)  $c = \frac{1}{9}$ ,  $\Omega = (1, 4)$ ,  $X$  je spojitá

b)  $0; 0; \frac{1}{27}; \frac{8}{27}$

c)  $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ \frac{1}{27}(x-1)^3 & \text{pro } x \in (1, 4), \\ 1 & \text{pro } x > 4. \end{cases}$

2.  $X \sim g(x) = \frac{x}{6}$ ,  $x = 1, 2, 3$ :  $E(X) = \frac{7}{3}$ ,  $D(X) = \frac{5}{9}$

3.  $x(0, 5) = 0$

4.  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé,  $C(X, Y) = 0$

5. a)  $g_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{1}{11}(x_1x_2 + 5)$  pro  $(x_1, x_2) \in (0, 1) \times (0, 2)$

b)  $g_3(x_3) = \frac{1}{33}(1 + 4x_3)$  pro  $x_3 \in (1, 4)$

c)  $\frac{5}{132}$

d) spojitý

6. vzhledem k nezávislosti veličin  $X_1$ ,  $X_2$  a  $X_3$

$$P(X_1 \leq 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2) = P(X_1 \leq 2)P(1 < X_2 < 3)P(X_3 > 2) \doteq 0,0372$$

7.  $Y \sim g(y) = \frac{1}{y}$  pro  $y \in (1, e)$

8.  $Po(7); 0,081$