

VZPĚR SLOŽENÉHO PRUTU A KŘÍŽOVÉHO PRUTU ZE DVOU ÚHELNÍKŮ

... řešení příklad pro BO004

Vypočítejte návrhovou vzpěrnou únosnost prutu délky 3842 milimetrů kloubově uloženého na obou koncích pro všechny směry vybočení s průřezem složený ze dvou rovnoramenných úhelníků L 100x100x10 z konstrukční oceli S235. Výpočet proveďte pro dva způsoby spojení úhelníků: a) složený prut; b) křížový prut.

Vstupní hodnoty

Návrhová osová tlaková síla v prutu

$$N_{Ed} = 480 \text{ kN}$$

Konstrukční ocel S235

$$f_y = 235 \text{ MPa}$$

Délka prutu

$$L = 3842 \text{ mm}$$

Vzpěrná délka prutu

$$L_{cr,y} = L_{cr,z} = 3842 \text{ mm}$$

Spojky jsou umístěny ve třetinách teoretické délky prutu

Průřezové charakteristiky L 100x100x10

$$A = 1915 \text{ mm}^2$$

průřezová plocha

$$I_y = 1,77 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

moment setrvačnosti k ose y

$$I_z = 1,77 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

moment setrvačnosti k ose z

$$I_u = 2,81 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

největší moment setrvačnosti k hlavní ose u

$$I_v = 7,32 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

nejmenší moment setrvačnosti k hlavní ose v

$$i_y = 30,4 \text{ mm}$$

poloměr setrvačnosti k ose y

$$i_z = 30,4 \text{ mm}$$

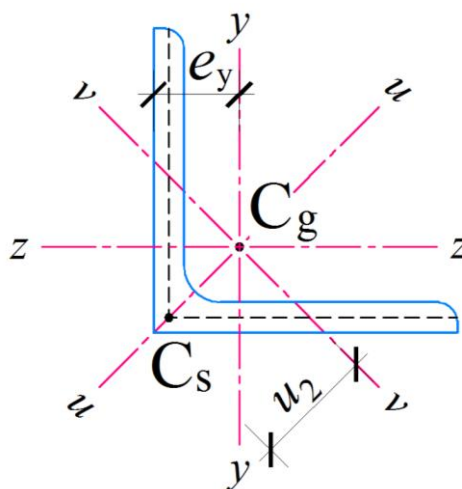
poloměr setrvačnosti k ose z

$$i_u = 38,3 \text{ mm}$$

poloměr setrvačnosti k hlavní ose u

$$i_v = 19,5 \text{ mm}$$

poloměr setrvačnosti k hlavní ose v



$e_y = 28,2 \text{ mm}$

vzdálenost těžiště od líce pásnice měřená ve směru osy y

$u_2 = 39,9 \text{ mm}$

vzdálenost těžiště od rohu úhelníku měřená ve směru osy u **Geometrie složeného členěného prutu**

$a = 1281 \text{ mm}$

vzdálenost spojek pro spojky ve třetinách délky prutu

$t_b = 10 \text{ mm}$

tloušťka spojek

$h_b = 80 \text{ mm}$

výška spojky (ve směru osy prutu)

$b_b = 80 \text{ mm}$

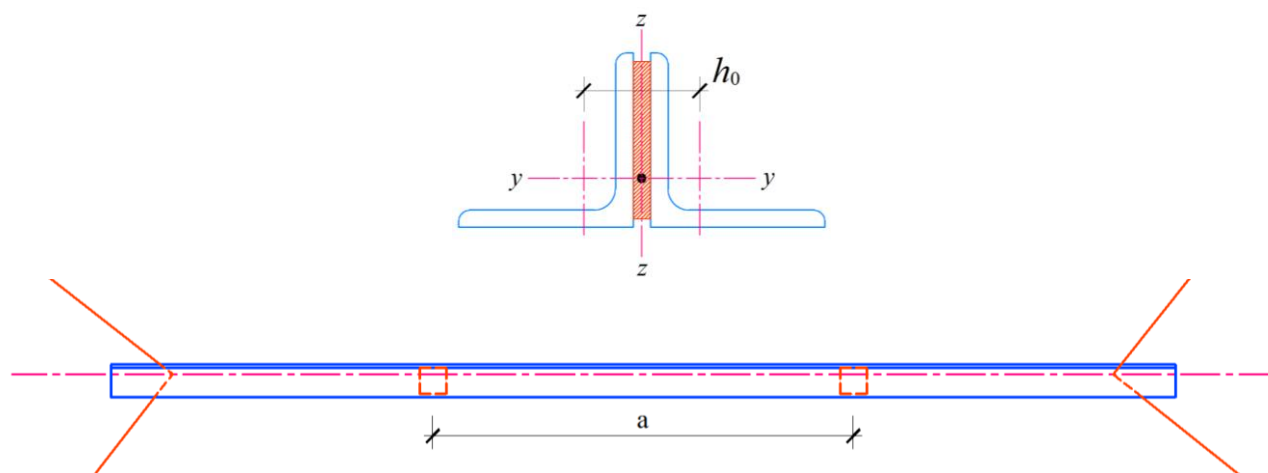
šířka spojky (kolmo na osu prutu)

Křížové členěné pruty mohou vybočit dvěma způsoby (směry):

- Vybočení kolmo k ose hmotné $\Rightarrow \chi_y$ (výpočet jako pro celistvý průřez)
- Vybočení kolmo k ose nehmotné $\Rightarrow \chi_z$ (pokud je splněna podmínka pro maximální vzdálenost spojek, lze počítat jako celistvý průřez, jinak se počítá jako členěný prut)

Složené pruty	$a \leq 15 \cdot i_{\min}$
Křížové pruty	$a \leq 70 \cdot i_{\min}$

Rozhodující směr vybočení je ten, pro který vyjde nejnižší hodnota součinitele vzpěrnosti.

A. SLOŽENÝ ČLENĚNÝ PRUT

$h_0 = 66,4 \text{ mm}$ vzdálenost těžišť pásů

Vybočení kolmo k ose y – kolmo k hmotné ose

Moment setrvačnosti

$$I_y = 2 \cdot I_y = 2 \cdot 1,77 \cdot 10^6 = 3,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Kritická síla

$$N_{cr,y} = \pi^2 \cdot \frac{EI_y}{L_{cr,y}^2} = \pi^2 \cdot \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 3,54 \cdot 10^6}{3842^2} = 497 \cdot 10^3 \text{ N} = 497 \text{ kN}$$

Poměrná štíhlost

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1915 \cdot 235}{497 \cdot 10^3}} = 1,346$$

Bezrozměrný parametr (křivka vzpěrné pevnosti b)

$$\Phi_y = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda}_y - 0,2) + \bar{\lambda}_y^2 \right] = 0,5 \cdot \left[1 + 0,34 \cdot (1,346 - 0,2) + 1,346^2 \right] = 1,601$$

Součinitel vzpěrnosti

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{1,601 + \sqrt{1,601^2 - 1,346^2}} = 0,405$$

Návrhová vzpěrná únosnost pro vybočení kolmo k ose hmotné

$$N_{b,Rd,y} = \frac{\chi_y \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,405 \cdot 2 \cdot 1915 \cdot 235}{1,0} = 365 \cdot 10^3 \text{ N} = 365 \text{ kN}$$

Jednotkový posudek

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd,y}} = \frac{480}{365} = 1,32 \geq 1,0 \quad \Rightarrow \text{nevyhovuje}$$

Vybočení kolmo k ose z – kolmo k neutrální ose

Patnáctinásobek nejmenšího poloměru setrvačnosti pásu

$$a = 1281 \text{ mm} \geq 15 \cdot i_{\min} = 15 \cdot 19,5 = 293 \text{ mm}$$

=> *nelze počítat jako celistvý průřez* → *výpočet členěného prutu*

Moment setrvačnosti

Ekvivalentní počáteční geometrická imperfekce

$$e_0 = \frac{L}{500} = \frac{3842}{500} = 7,7 \text{ mm}$$

Účinný moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti jakoby celistvého průřezu

$$I_z = 2 \cdot \left[I_z + A \cdot \left(\frac{h_0}{2} \right)^2 \right] = 2 \cdot \left[1,77 \cdot 10^5 + 1915 \cdot \left(\frac{66,4}{2} \right)^2 \right] = 7,77 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Poloměr setrvačnosti jakoby celistvého průřezu

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{7,77 \cdot 10^6}{2 \cdot 1915}} = 45,0 \text{ mm}$$

Štíhlost jakoby celistvého průřezu

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{3842}{45,0} = 85,3$$

Součinitel účinnosti

$$\mu = 2 - \frac{\lambda_z}{75} = 2 - \frac{85,3}{75} = 0,862$$

$$I_{z,\text{eff}} = 0,5 \cdot h_0^2 \cdot A_{\text{ch}} + \mu \cdot I_z = 0,5 \cdot 66,4^2 \cdot 1915 + 0,862 \cdot 1,77 = 7,28 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Kritická síla

$$N_{cr,z} = \pi^2 \cdot \frac{EI_{z,\text{eff}}}{L_{cr,z}^2} = \pi^2 \cdot \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 7,28 \cdot 10^6}{3842^2} = 1022 \cdot 10^3 \text{ N} = 1022 \text{ kN}$$

Smyková tuhost

Moment setrvačnosti spojky

$$I_b = \frac{1}{12} \cdot b_b \cdot h_b^3 = \frac{1}{12} \cdot 80 \cdot 80^3 = 3,41 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$S_v = \frac{24 \cdot E \cdot I_{\text{ch}}}{a^2 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot I_{\text{ch}} \cdot h_0}{n \cdot I_b \cdot a} \right]} = \frac{24 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 1,77 \cdot 10^6}{1281^2 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot 1,77 \cdot 10^6 \cdot 66,4}{1 \cdot 3,41 \cdot 10^6 \cdot 1281} \right]} = 5159 \cdot 10^3 \text{ N} = 5159 \text{ kN}$$

$$S_{v,max} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{ch}}{a^2} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 1,77 \cdot 10^6}{1281^2} = 4471 \cdot 10^3 \text{ N} = 4471 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow S_v = 4471 \text{ kN}$$

Ohybový moment uprostřed prutu s uvážením účinků II. řádu

$$M_{Ed} = \frac{N_{Ed} \cdot e_0 + M_{Ed}^1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}} = \frac{480 \cdot 0,0077 + 0}{1 - \frac{480}{1022} - \frac{480}{4471}} = 8,72 \text{ kNm}$$

Návrhová normálová síla v pásu

$$N_{ch,Ed} = \frac{N_{Ed}}{2} + \frac{M_{Ed} \cdot A_{ch} \cdot h_0}{I_{eff}} = \frac{480 \cdot 10^3}{2} + \frac{8,72 \cdot 10^6 \cdot 1915 \cdot 66,4}{7,28 \cdot 10^6} = 316 \cdot 10^3 \text{ N} = 316 \text{ kN}$$

Vzpěrná únosnost pásu

Kritická síla

$$N_{cr,ch} = \pi^2 \cdot \frac{EI_{ch}}{a^2} = \pi^2 \cdot \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 1,77 \cdot 10^6}{1281^2} = 2236 \cdot 10^3 \text{ N} = 2236 \text{ kN}$$

Poměrná štíhlost

$$\bar{\lambda}_{ch} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,ch}}} = \sqrt{\frac{1915 \cdot 235}{2236 \cdot 10^3}} = 0,449$$

Bezrozměrný parametr (křivka vzpěrné pevnosti $\underline{b}$)

$$\Phi_{ch} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda}_{ch} - 0,2) + \bar{\lambda}_{ch}^2 \right] = 0,5 \cdot \left[1 + 0,34 \cdot (0,449 - 0,2) + 0,449^2 \right] = 0,643$$

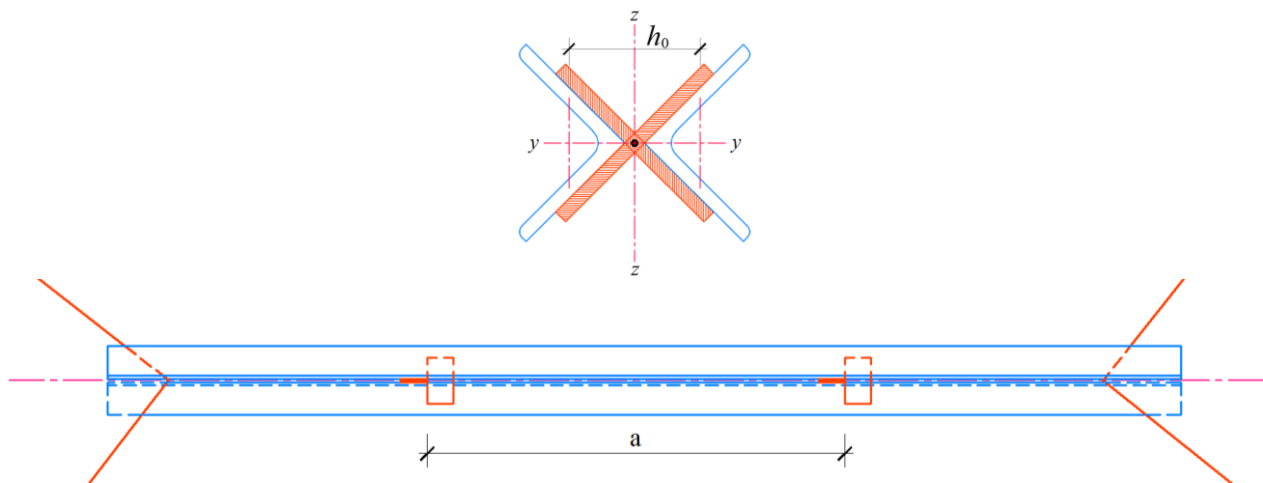
Součinitel vzpěrnosti

$$\chi_{ch} = \frac{1}{\Phi_{ch} + \sqrt{\Phi_{ch}^2 - \bar{\lambda}_{ch}^2}} = \frac{1}{0,643 + \sqrt{0,643^2 - 0,449^2}} = 0,906$$

$$N_{ch,b,Rd} = \frac{\chi_{ch} \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,906 \cdot 1915 \cdot 235}{1,0} = 408 \cdot 10^3 \text{ N} = 408 \text{ kN}$$

Jednotkový posudek

$$\frac{N_{ch,Ed}}{N_{ch,b,Rd}} = \frac{316}{408} = 0,77 \leq 1,0 \quad \Rightarrow \text{vyhovuje}$$

B. KŘÍŽOVÝ ČLENĚNÝ PRUT

$$h_0 = 93,97 \text{ mm}$$

vzdálenost těžišť pásů

Vybočení kolmo k ose y – kolmo k hmotné ose

Moment setrvačnosti

$$I_y = 2 \cdot I_u = 2 \cdot 2,81 \cdot 10^6 = 5,62 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Kritická síla

$$N_{cr,y} = \pi^2 \cdot \frac{EI_y}{L_{cr,y}^2} = \pi^2 \cdot \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 5,62 \cdot 10^6}{3842^2} = 788 \cdot 10^3 \text{ N} = 788 \text{ kN}$$

Poměrná štíhlost

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1915 \cdot 235}{788 \cdot 10^3}} = 1,069$$

Bezrozměrný parametr (křivka vzpěrné pevnosti $\underline{b}$)

$$\Phi_y = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda}_y - 0,2) + \bar{\lambda}_y^2 \right] = 0,5 \cdot \left[1 + 0,34 \cdot (1,069 - 0,2) + 1,069^2 \right] = 1,219$$

Součinitel vzpěrnosti

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y + \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{1,219 + \sqrt{1,219^2 - 1,069^2}} = 0,554$$

Návrhová vzpěrná únosnost pro vybočení kolmo k ose hmotné

$$N_{b,Rd,y} = \frac{\chi_y \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,554 \cdot 2 \cdot 1915 \cdot 235}{1,0} = 499 \cdot 10^3 \text{ N} = 499 \text{ kN}$$

Jednotkový posudek

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd,y}} = \frac{480}{499} = 0,96 \leq 1,0$$

=> vyhovuje

Vybočení kolmo k ose z – kolmo k nehmotné ose

Sedmdesátinásobek nejmenšího poloměru setrvačnosti pásu

$$a = 1281 \text{ mm} \leq 70 \cdot i_{\min} = 70 \cdot 19,5 = 1368 \text{ mm}$$

=> lze počítat jako celistvý průřez

Moment setrvačnosti

$$I_z = 2 \cdot \left[I_v + A \cdot \left(\frac{h_0}{2} \right)^2 \right] = 2 \cdot \left[7,32 \cdot 10^5 + 1915 \cdot \left(\frac{93,97}{2} \right)^2 \right] = 9,92 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Kritická síla

$$N_{cr,z} = \pi^2 \cdot \frac{EI_z}{L_{cr,z}^2} = \pi^2 \cdot \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 9,92 \cdot 10^6}{3842^2} = 1393 \cdot 10^3 \text{ N} = 1393 \text{ kN}$$

Poměrná štíhlost

$$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,z}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1915 \cdot 235}{1393 \cdot 10^3}} = 0,804$$

Bezrozměrný parametr (křivka vzpěrné pevnosti $\underline{b}$)

$$\Phi_z = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda}_z - 0,2) + \bar{\lambda}_z^2 \right] = 0,5 \cdot \left[1 + 0,34 \cdot (0,804 - 0,2) + 0,804^2 \right] = 0,926$$

Součinitel vzpěrnosti

$$\chi_z = \frac{1}{\Phi_z + \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{1}{0,926 + \sqrt{0,926^2 - 0,804^2}} = 0,722$$

Návrhová vzpěrná únosnost pro vybočení kolmo k ose nehmotné

$$N_{b,Rd,z} = \frac{\chi_z \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,722 \cdot 2 \cdot 1915 \cdot 235}{1,0} = 650 \cdot 10^3 \text{ N} = 650 \text{ kN}$$

Jednotkový posudek

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd,z}} = \frac{480}{650} = 0,74 \leq 1,0 \quad \Rightarrow \text{vyhovuje}$$

SHRNUTÍ

Typ prutu	Jednotkový posudek pro vybočení		Závěr
	kolmo k hmotné ose	kolmo k nehmotné ose	
Složený členěný prut	1,32	0,77	Nevyhovuje
Křížový členěný prut	0,96	0,74	Vyhovuje

V obou případech rozhoduje vybočení kolmo k hmotné ose, ale v případě křížového prutu jsou jednotkové posudky pro vybočení kolmo k hmotné a nehmotné ose značně vyrovnanější => efektivnější využití materiálu.