

# Prvky betonových konstrukcí

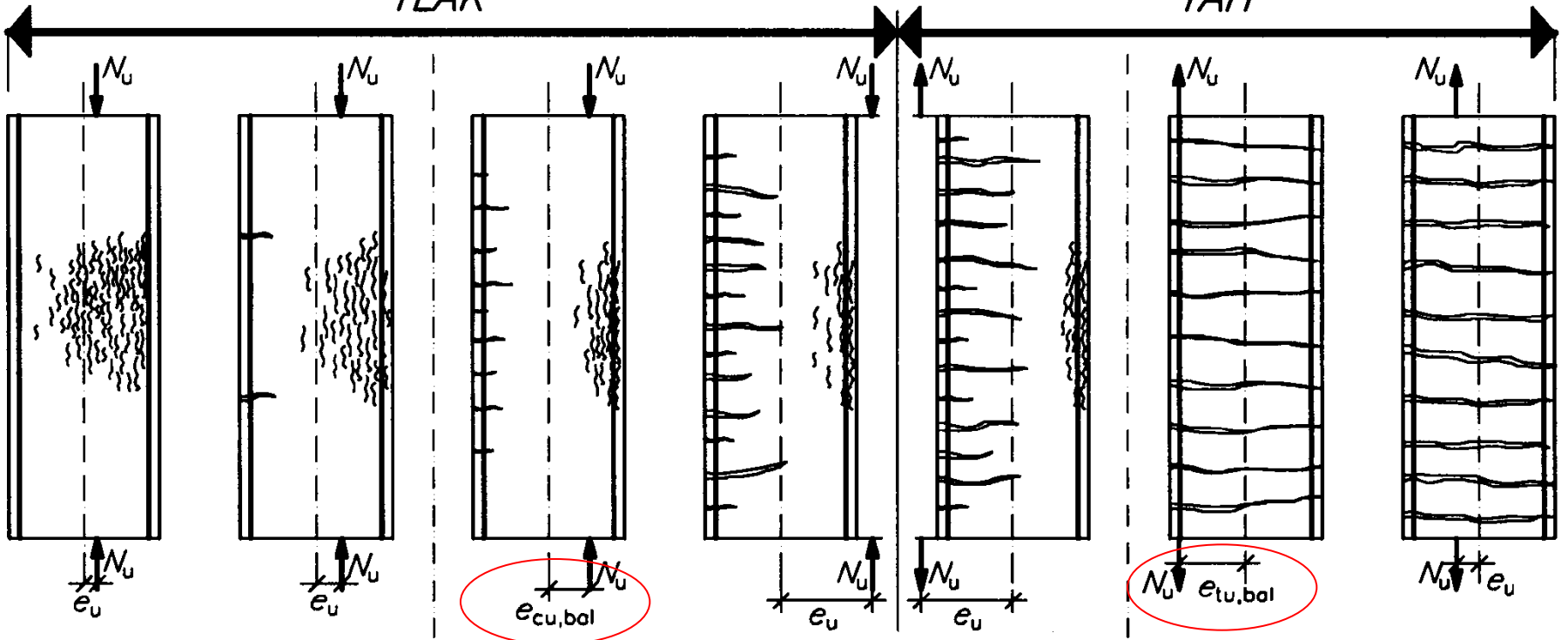
## BL01 – 9. přednáška

- Prvky namáhané momentem a normálovou silou
  - základní předpoklady
  - interakční diagram
  - posouzení, návrh
  - namáhání mimo osy souměrnosti
  - konstrukční zásady

# Způsoby porušení železobetonového prvku namáhaného N,M

TLAK

TAH



**tlakové porušení**

tlak s malou  
výstředností

**tahové porušení s působícím  
tlačeným betonem**

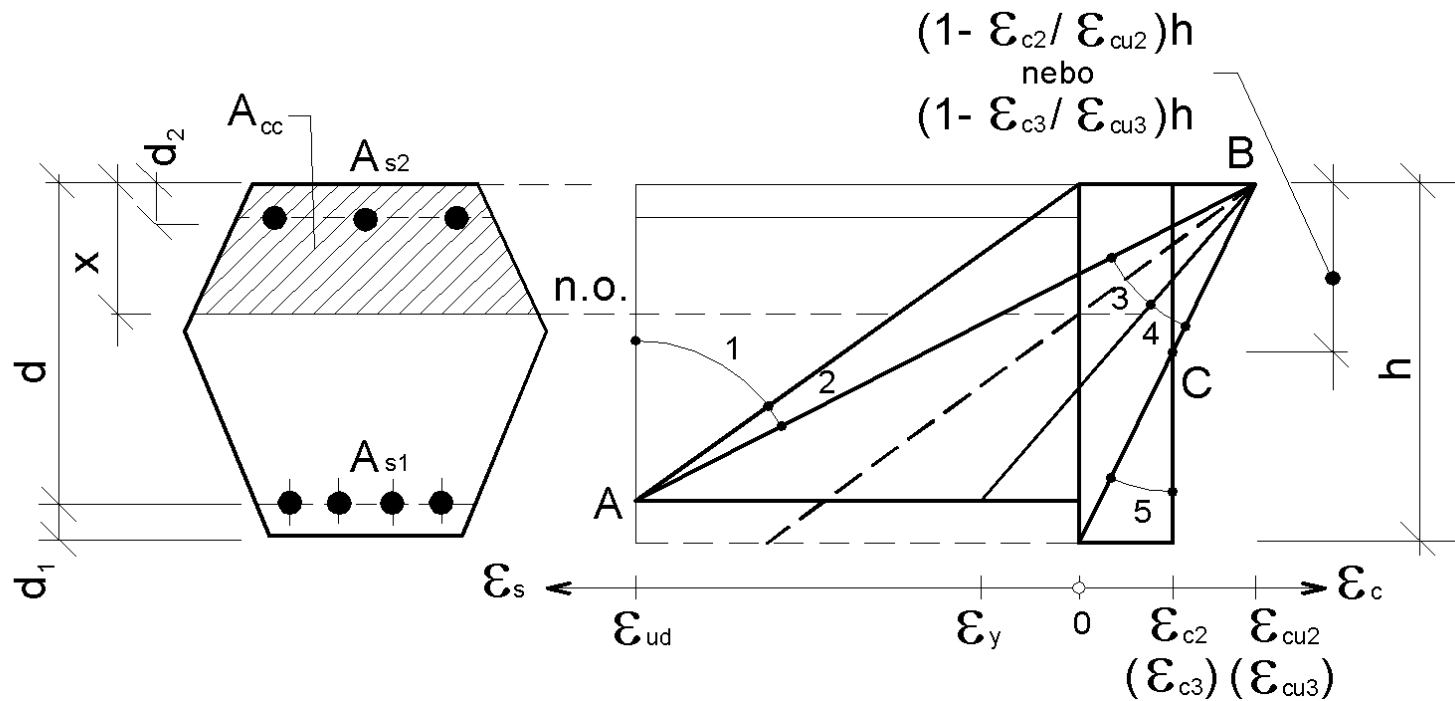
tlak, s velkou  
výstředností

tah s velkou  
výstředností

**tahové porušení s  
vyloučeným tlačeným  
betonem**

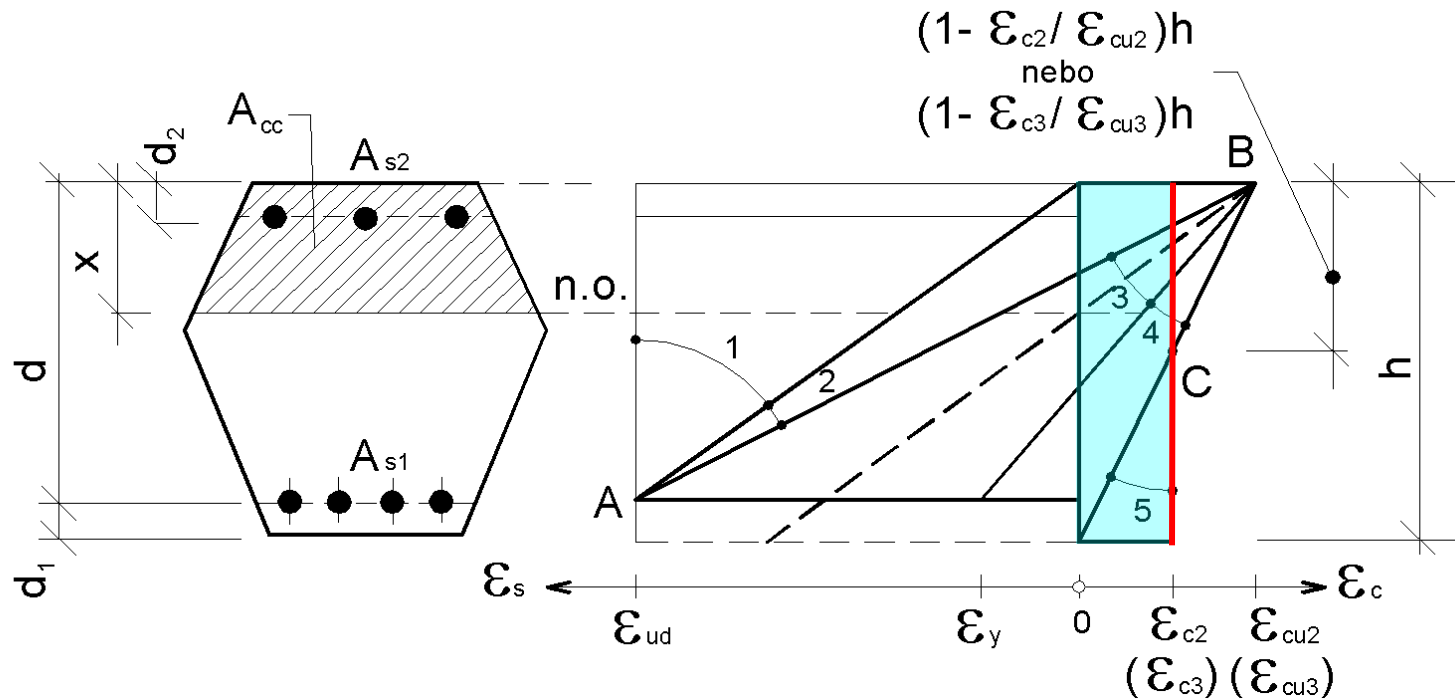
mimostředný tah s  
malou výstředností

# Předpoklady výpočtu



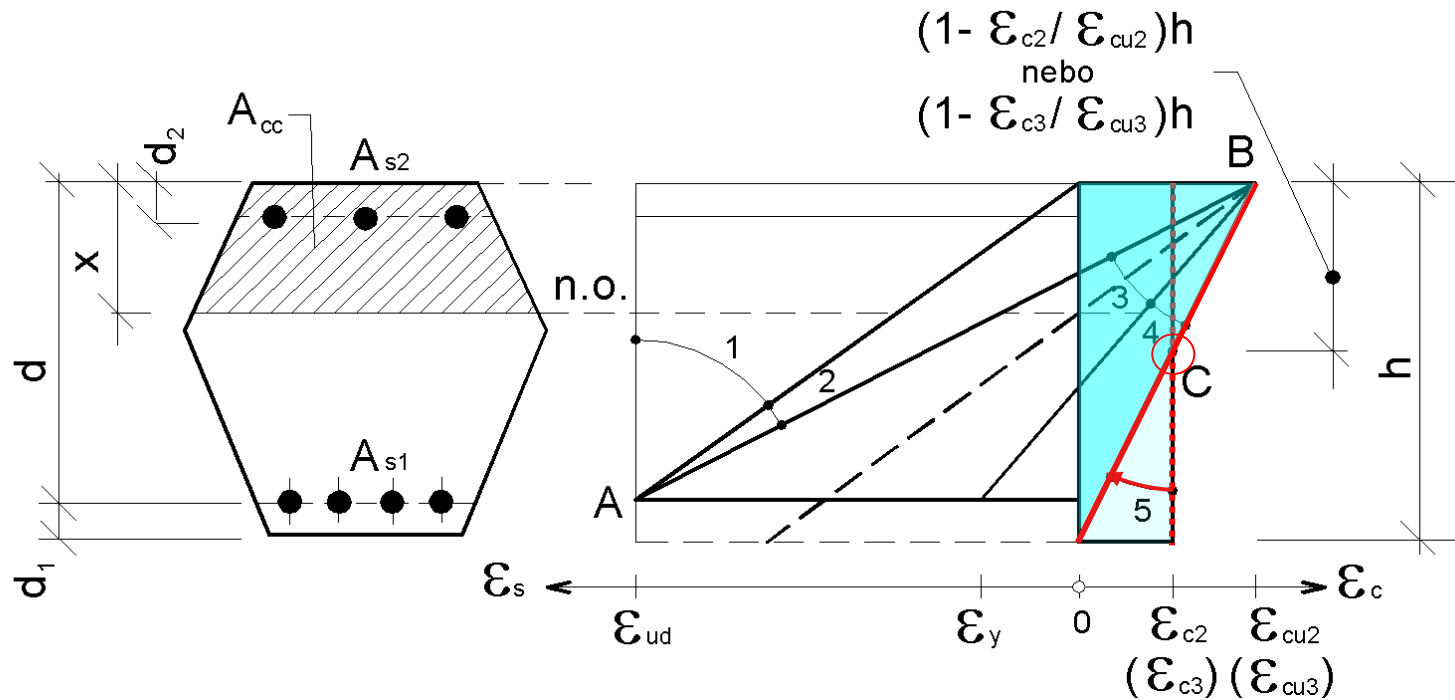
- Zachování rovinnosti průřezu.
- Dokonalá soudržnost mezi betonem a výztuží.
- Pevnost betonu v tahu se zanedbává.
- Napětí podle pracovních diagramů betonu a výztuže.
- Meze únosnosti dosaženo při dosažení mezního poměrného přetvoření buď v betonu a/nebo ve výztuži.

# Oblasti přetvoření průřezu v mezním stavu



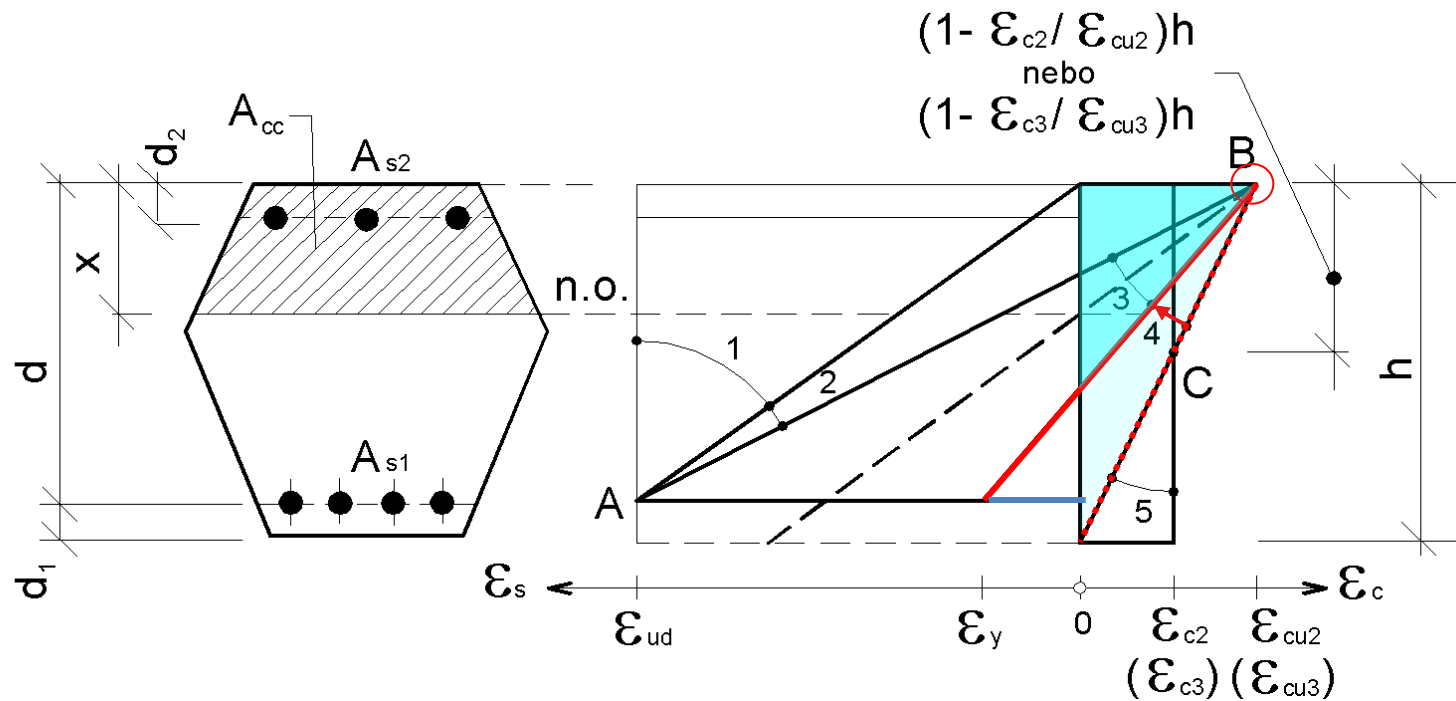
- **oblast 5: dostředný tlak**
  - beton plně využit v tlaku
  - obě výztuže tlačené, využitě podle  $\epsilon_{c2}$  nebo  $\epsilon_{c3}$

# Oblasti přetvoření průřezu v mezním stavu



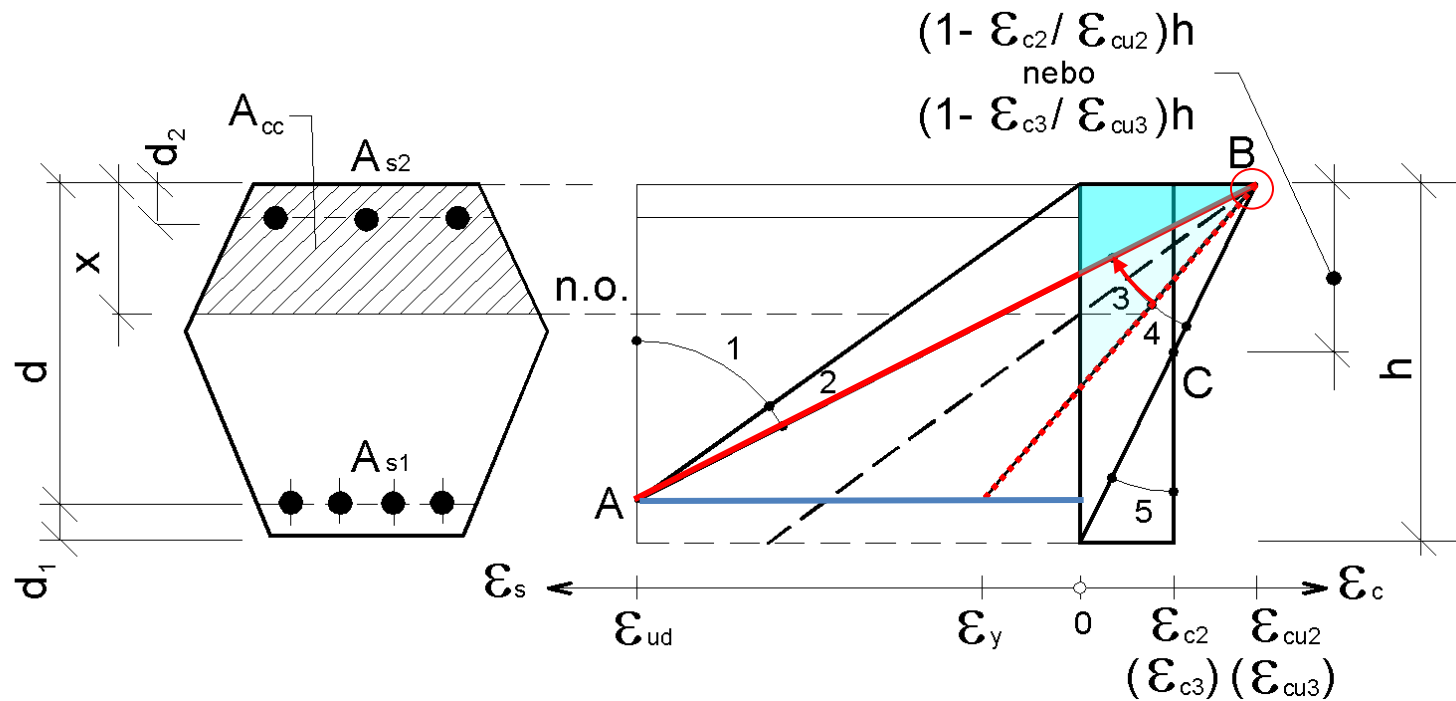
- **oblast 5: N+M - tlak s malou výstředností**
  - celá plocha betonu je tlačaná
  - rovina přetvoření se otáčí podle bodu C

# Oblasti přetvoření průřezu v mezním stavu



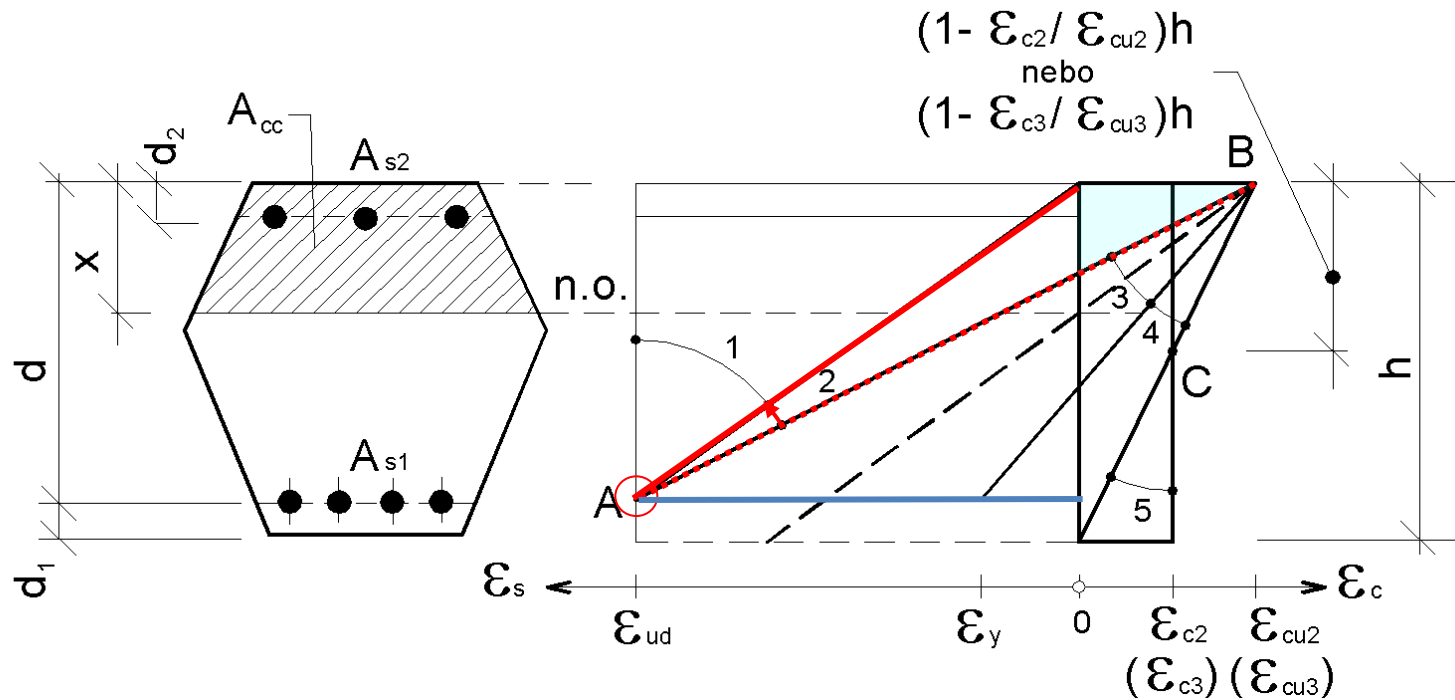
- **oblast 4 : N+M - tlak s malou výstředností**
  - rovina přetvoření se otáčí podle bodu B,
  - spodní výztuž je tažená, není plně využita,
  - beton v tlaku využit
- poloha — rozhraní mezi malou a velkou výstředností
  - $x = x_{bal}$

# Oblasti přetvoření průřezu v mezním stavu



- **oblast 3 : N+M - tlak nebo tah s velkou výstředností, příp. ohyb**
  - rovina přetvoření se otáčí podle bodu B,
  - **spodní výztuž** je tažená, je **plně využita**,
  - beton v tlaku využit
- poloha — dána mezním poměrným přetvořením výztuže  $\epsilon_{ud}$ ,  $x = x_{lim}$

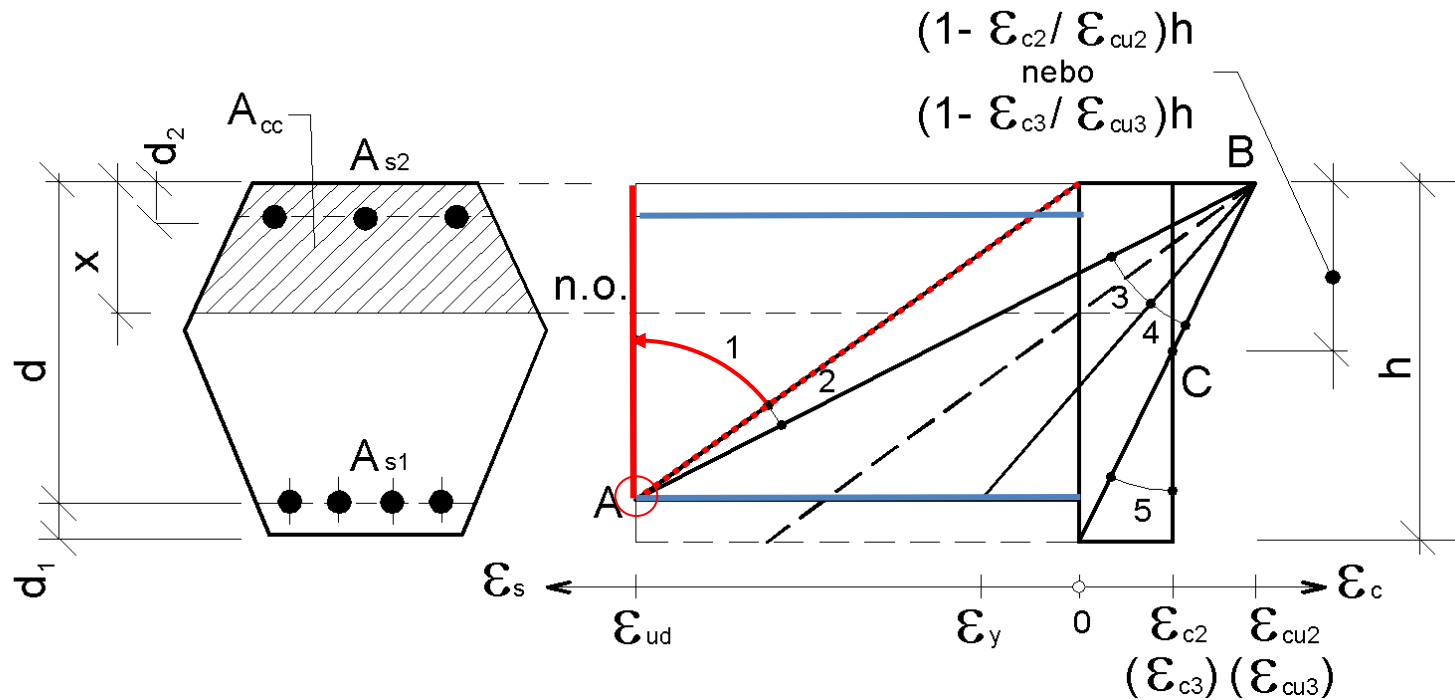
# Oblasti přetvoření průřezu v mezním stavu



- **oblast 2 : N+M – tah s velkou výstředností**
  - rovina přetvoření se otáčí podle bodu **A**,
  - **spodní výztuž** je tažená, je **plně využita**,
  - beton v tlaku není plně využit, ale jen částečně!
- poloha **—** → prvek celý tažen, nevzniká tlačená oblast

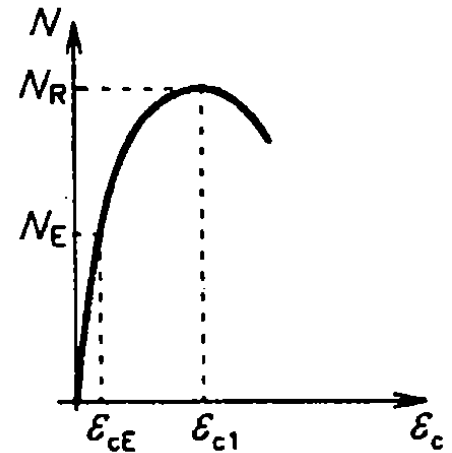
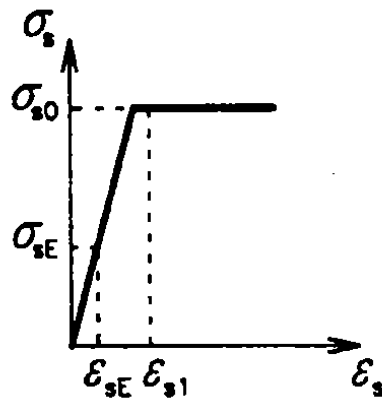
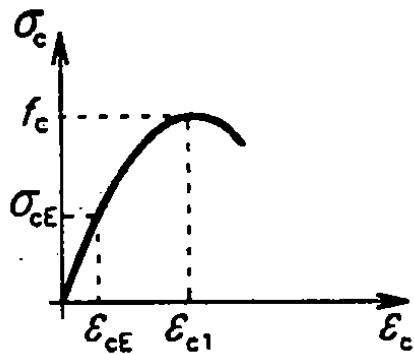
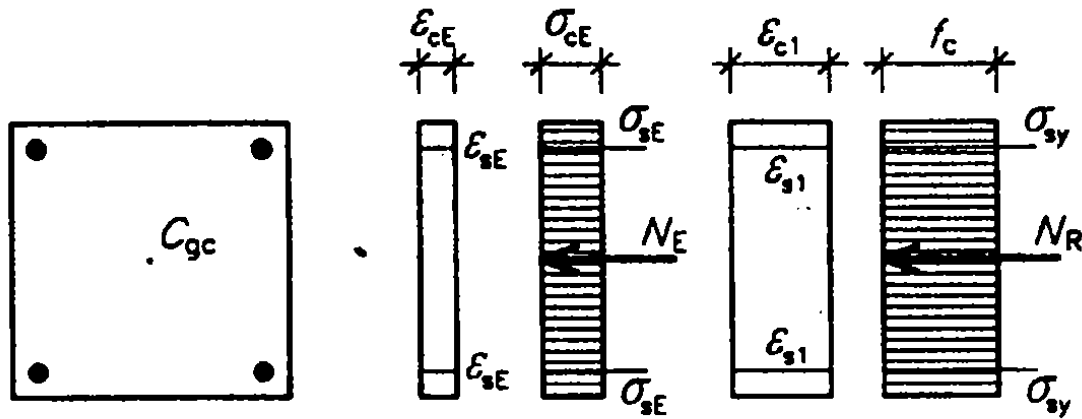


# Oblasti přetvoření průřezu v mezním stavu

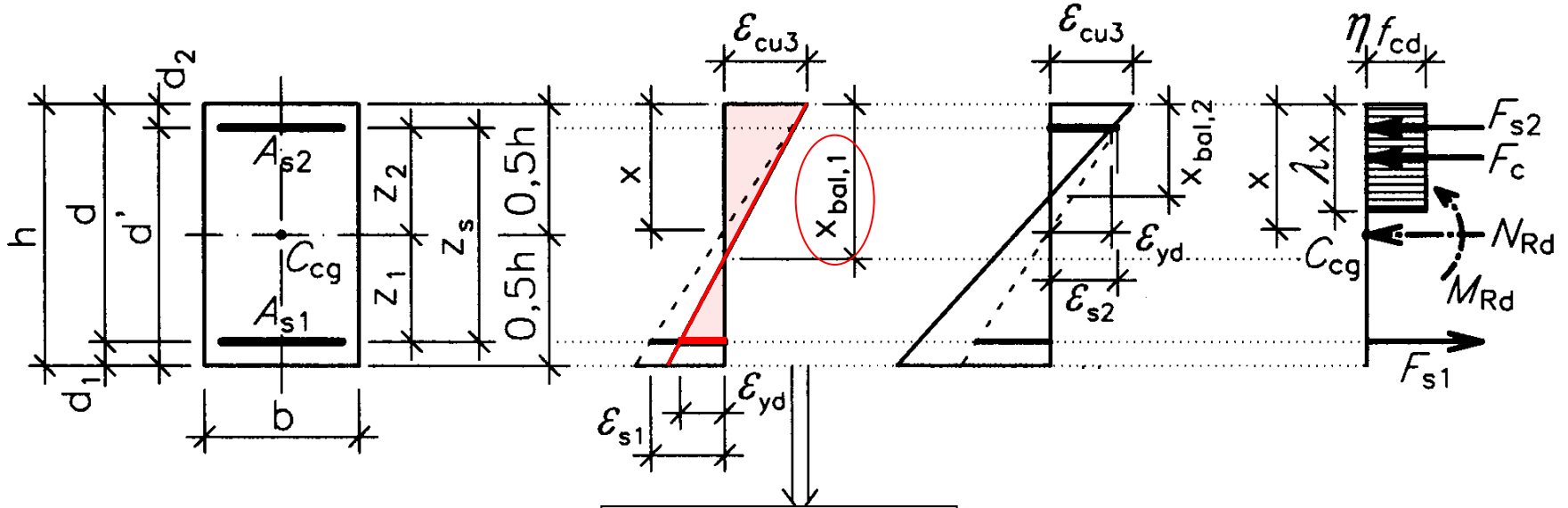


- **oblast 1 : N+M – tah s malou výstředností**
  - rovina přetvoření se otáčí podle bodu **A**,
  - **obě výztuže** jsou tažené, jsou **plně využity**,
  - **nevzniká tlačaná oblast**, celý průřez tažen
- poloha — dostředný tah → N působí v těžišti ploch výztuže

# Stanovení $N_R$ - dostředný tlak



# Započitatelnost výztuže



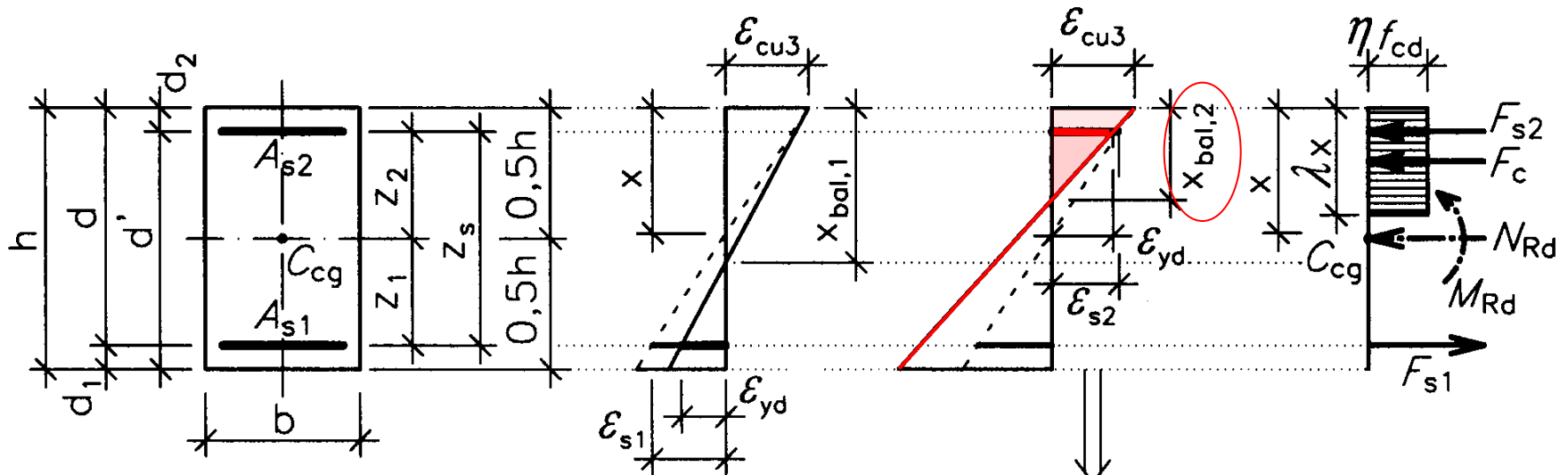
$$x_{bal,1} = \xi_{bal,1} \cdot d$$

$$\frac{\epsilon_{s1}}{d - x} = \frac{\epsilon_{cu3}}{x}$$

- $\epsilon_{s1} = \frac{d - x}{x} \epsilon_{cu3} \geq \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \Rightarrow \sigma_{s1} = f_{yd}$   
 $< \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_{s1} = E_s \epsilon_{s1}$

- $\epsilon_{s1} = \epsilon_{yd} \Rightarrow x = x_{bal,1} = \frac{\epsilon_{cu3}}{\epsilon_{yd} + \epsilon_{cu3}} d = \xi_{bal,1} d$

# Započítatelnost výztuže



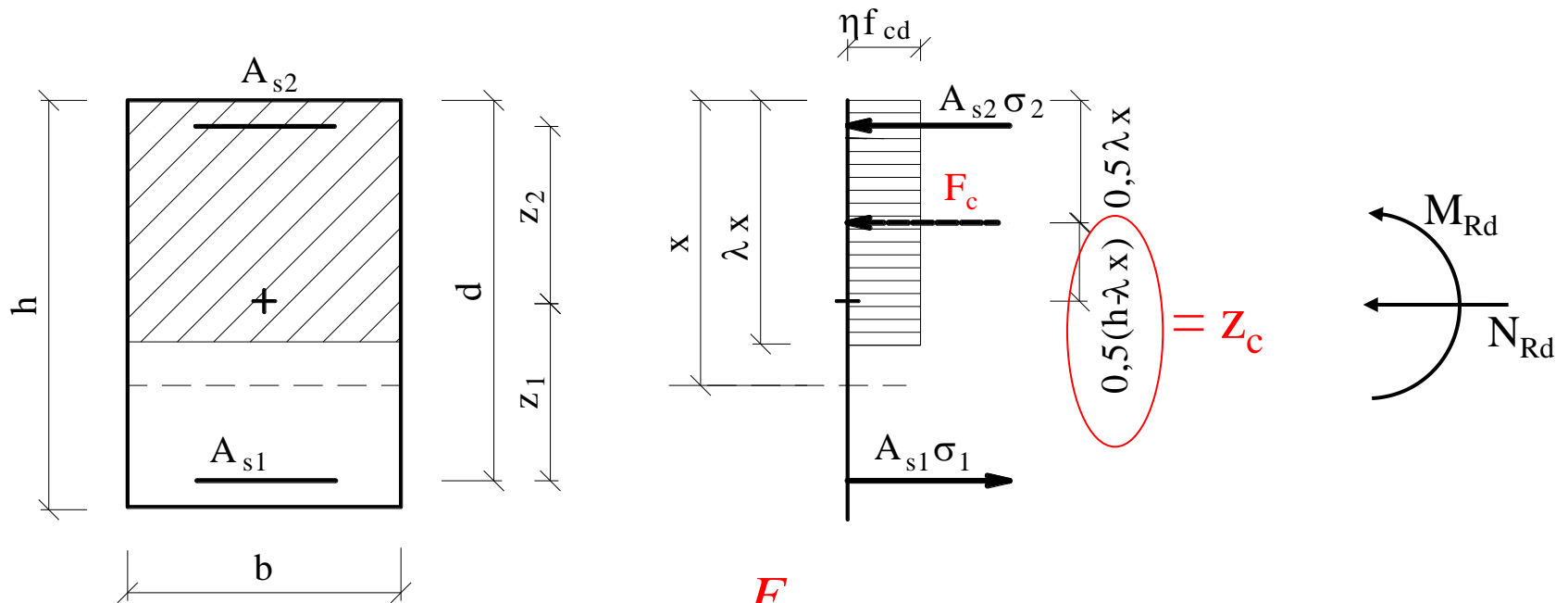
$$x_{bal,2} = \xi_{bal,2} \cdot d_2$$

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{x - d_2} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{x}$$

- $\varepsilon_{s2} = \frac{x - d_2}{x} \varepsilon_{cu3} \geq \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \Rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd}$   
 $< \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_{s2} = E_s \varepsilon_{s2}$

- $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{yd} \Rightarrow x = x_{bal,2} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{yd}} d = \xi_{bal,2} d$

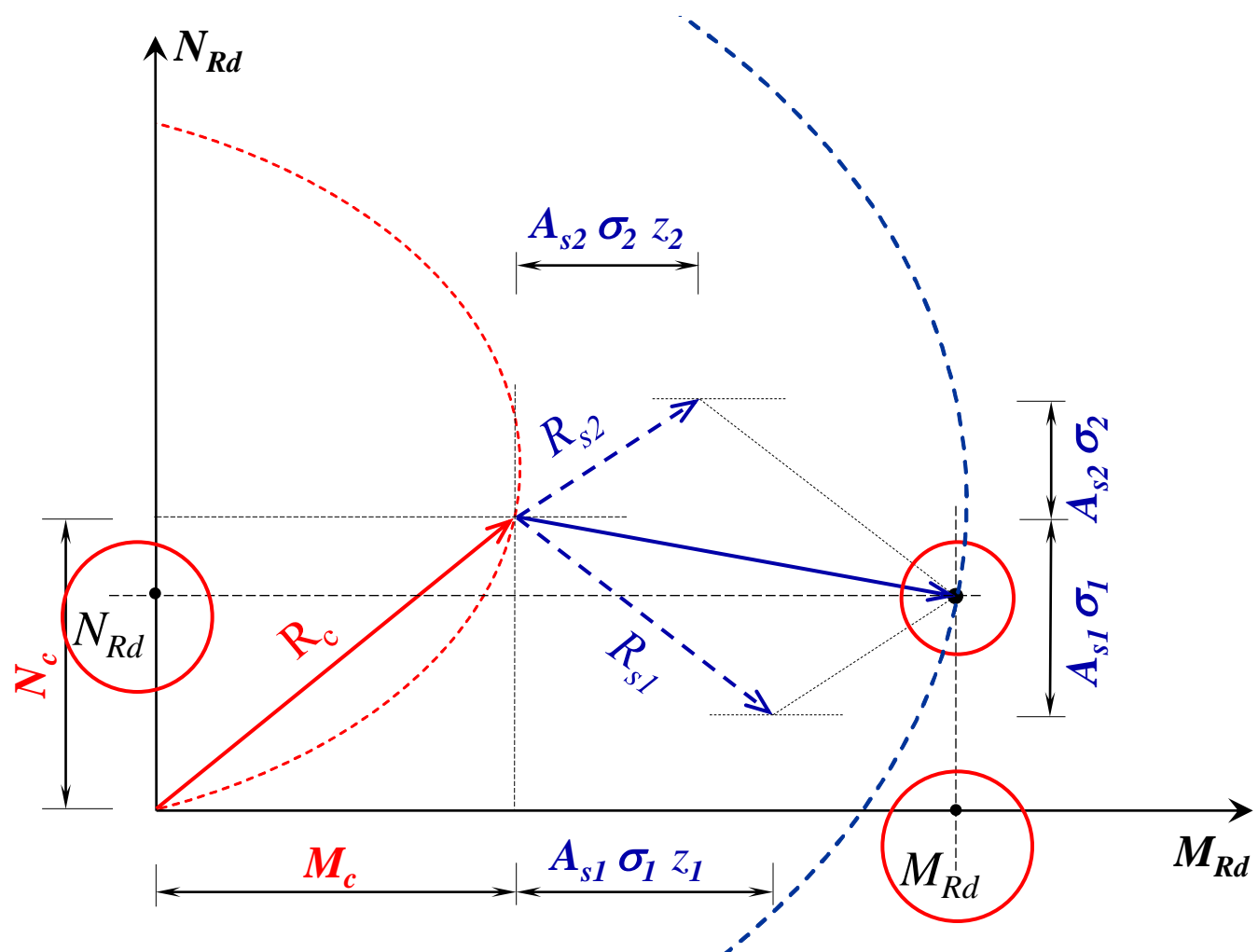
# Průřez namáhaný M, N



$$N_{Rd} = \overbrace{b \lambda x \eta f_{cd}}^{F_c} + A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} \sigma_{s1}$$

$$M_{Rd} = \underbrace{\overbrace{b \lambda x \eta f_{cd}}^{F_c} \underbrace{0.5(h - \lambda x)}_{z_c}}_{M_c} + A_{s2} \sigma_{s2} z_2 + A_{s1} \sigma_{s1} z_1$$

# Interakční diagram meze únosnosti M, N -princip

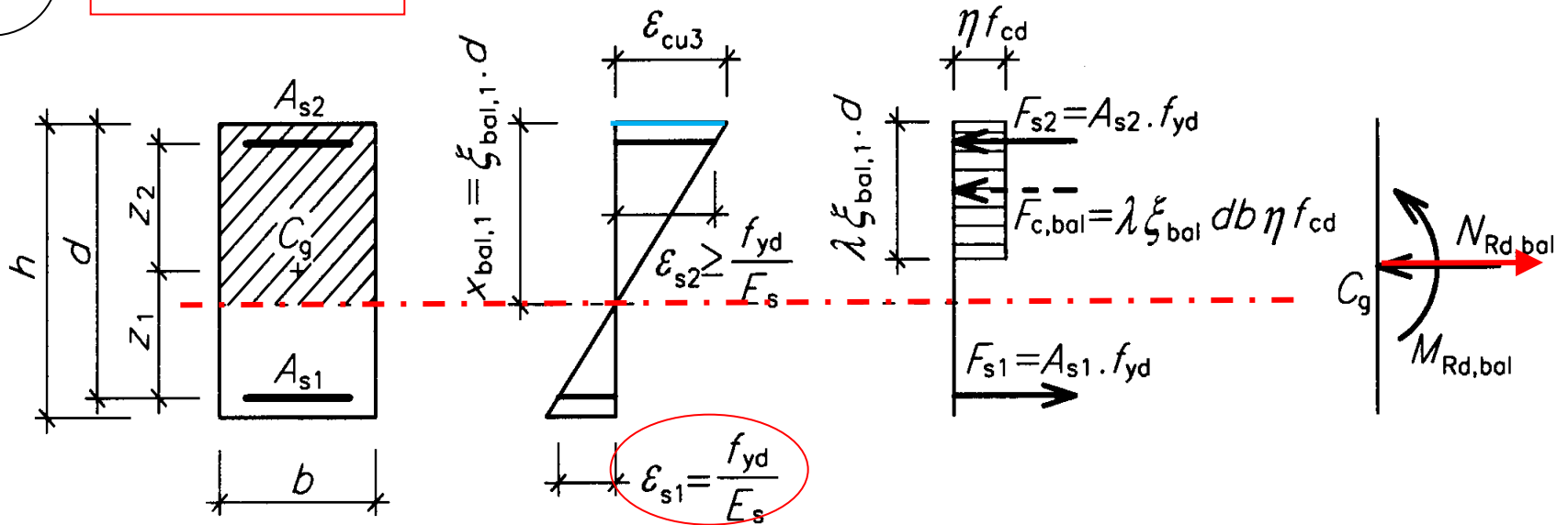


# Významné body interakčního diagramu

2

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{yd}$$

$$\rightarrow X = X_{bal,1}$$



$$N_{Rd2} = -\lambda x_{bal,1} b \eta f_{cd} - A_{s2} \sigma_{s2} + A_{s1} f_{yd}$$

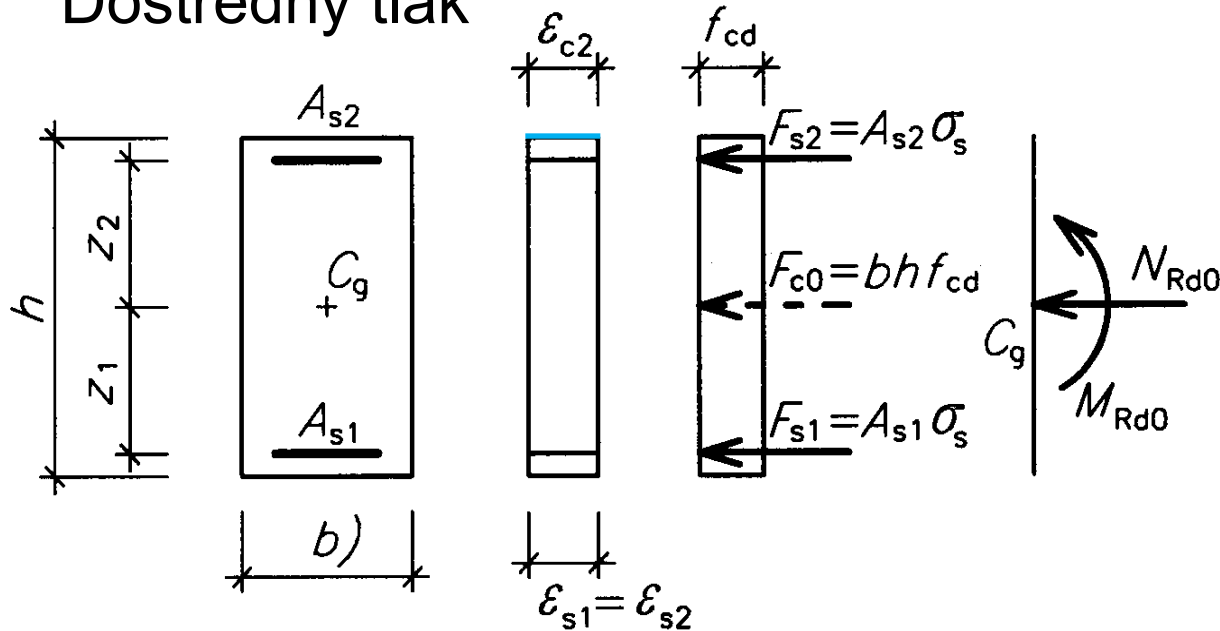
$$M_{Rd0} = \lambda x_{bal,1} b \eta f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \frac{\lambda x_{bal,1}}{2} \right) + A_{s2} \sigma_{s2} z_2 + A_{s1} f_{yd} z_1$$

$$x_{bal,2} \leq x_{bal,1} \Rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd}$$

# Významné body interakčního diagramu

0

Dostředný tlak



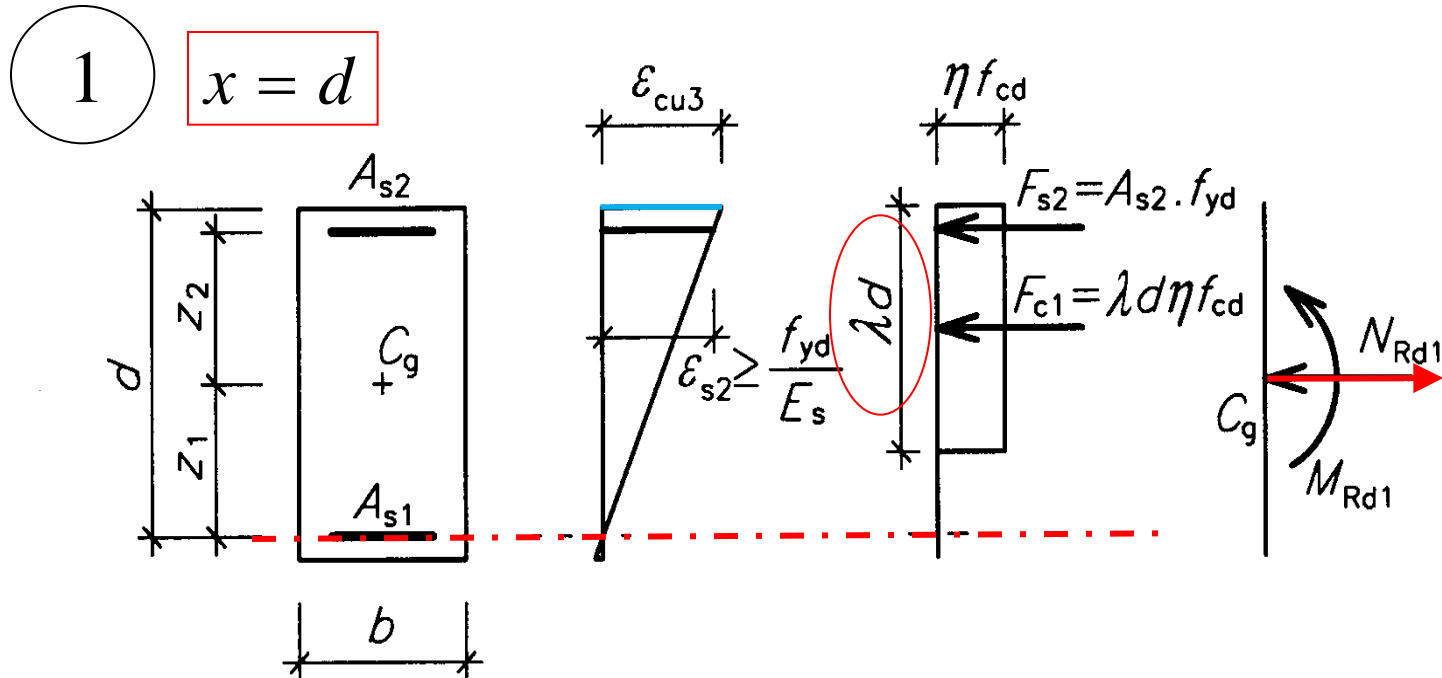
$$N_{Rd0} = -bh \eta f_{cd} - A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} \sigma_{s1}$$

$$M_{Rd0} = A_{s2} \sigma_{s2} z_2 - A_{s1} \sigma_{s1} z_1$$

$$\sigma_{s1} = \sigma_{s1} = \varepsilon_c E_s; \quad \varepsilon_c = \varepsilon_{cu2} \text{ nebo } \varepsilon_{cu3}$$



# Významné body interakčního diagramu



$$N_{Rd1} = -\lambda d b \eta f_{cd} - A_{s2} \sigma_{s2}$$

$$M_{Rd0} = \lambda d b \eta f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \frac{\lambda d}{2} \right) + A_{s2} \sigma_{s2} z_2 d$$

$$d \geq x_{bal,2} \Rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd}$$

# Významné body interakčního diagramu

3

Prostý ohyb  $N_{Ed}=0$



$$N_{Rd3} = -\lambda x b \eta f_{cd} - A_{s2} \sigma_{s2} + A_{s1} f_{yd}; \quad N_{Rd3} = 0 \Rightarrow x$$

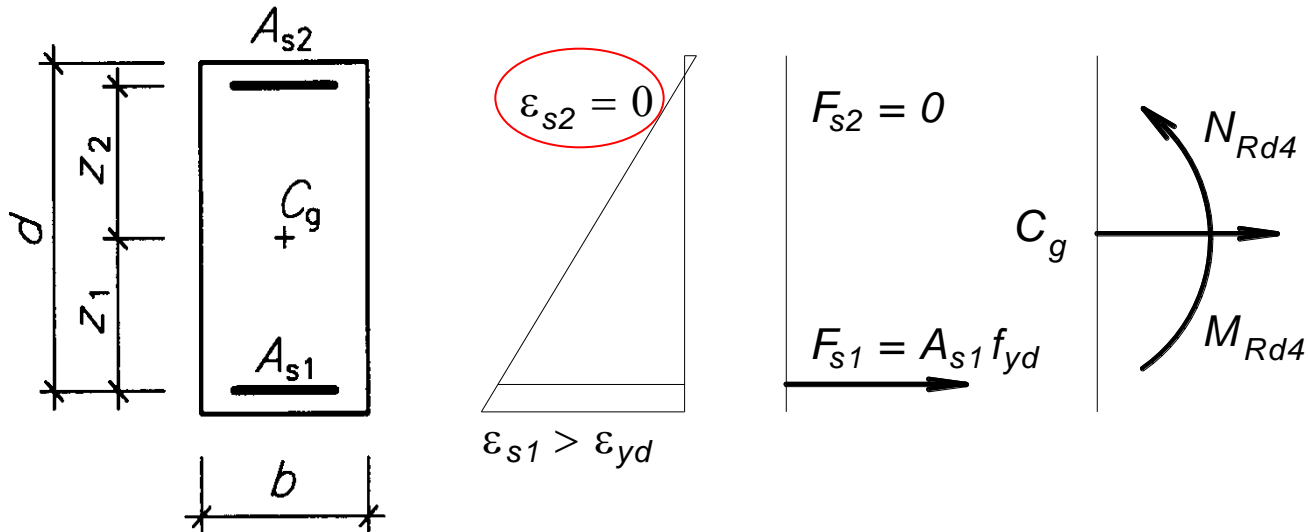
$$M_{Rd3} = \lambda x b \eta f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \frac{\lambda x}{2} \right) + A_{s2} \sigma_{s2} z_2 + A_{s1} f_{yd} z_1$$

$$x \geq x_{bal,2} \Rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd}; \quad (x \leq x_{bal,1} \Rightarrow \sigma_{s1} = f_{yd})$$

# Významné body interakčního diagramu

4

Rozhraní mezi MV a VV v tahu



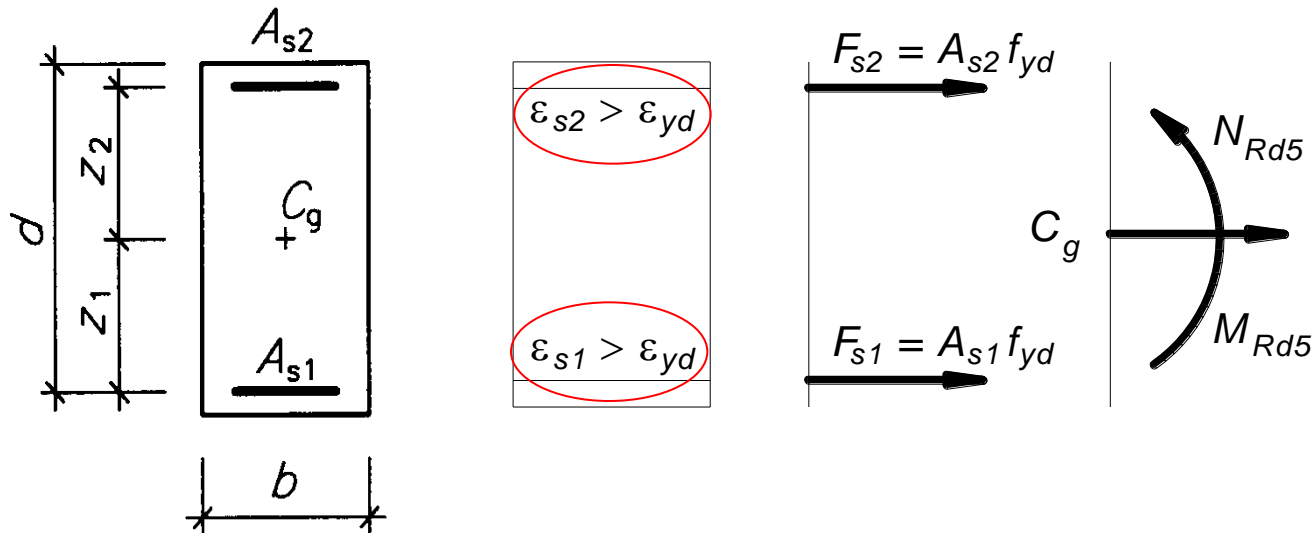
$$N_{Rd4} = A_{s1} f_{yd}$$

$$M_{Rd4} = A_{s1} f_{yd} z_1$$

# Významné body interakčního diagramu

5

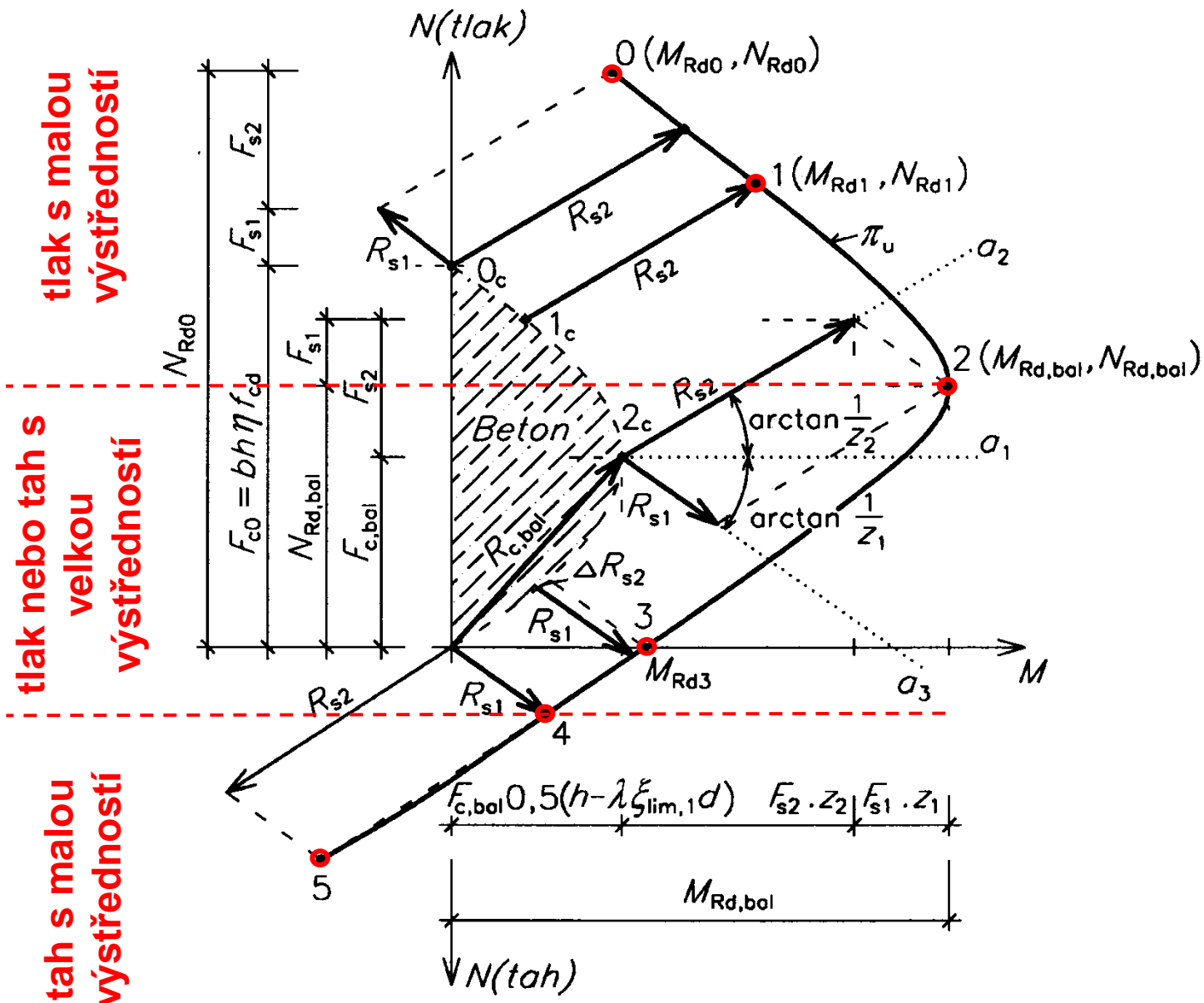
Dostředný tah



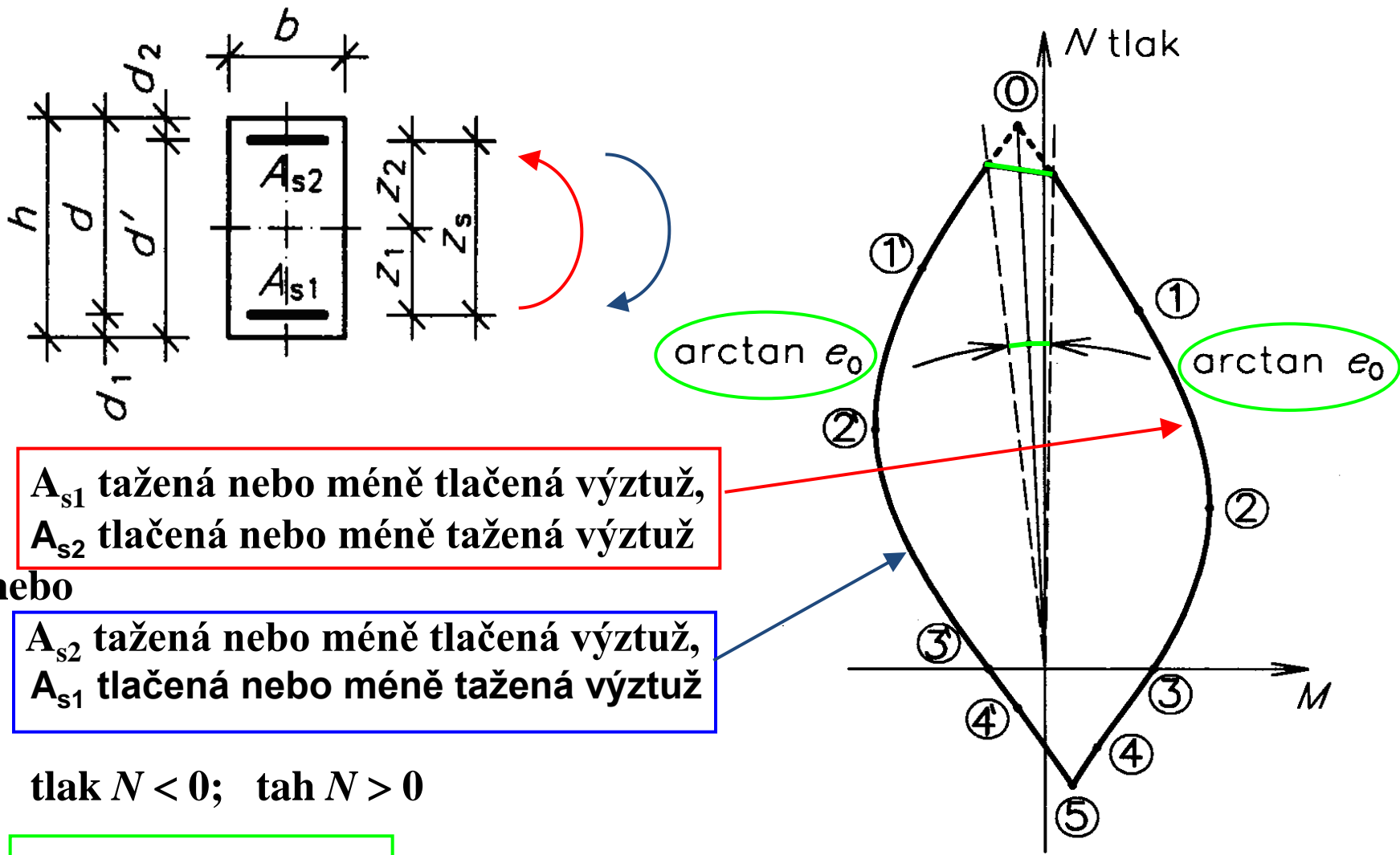
$$N_{Rd5} = A_{s2} f_{yd} + A_{s1} f_{yd}$$

$$M_{Rd3} = -A_{s2} f_{yd} z_2 + A_{s1} f_{yd} z_1$$

# Interakční diagram



# Interakční diagram



- $A_{s1}$  tažená nebo méně tlačaná výztuž,  
 $A_{s2}$  tlačaná nebo méně tažená výztuž

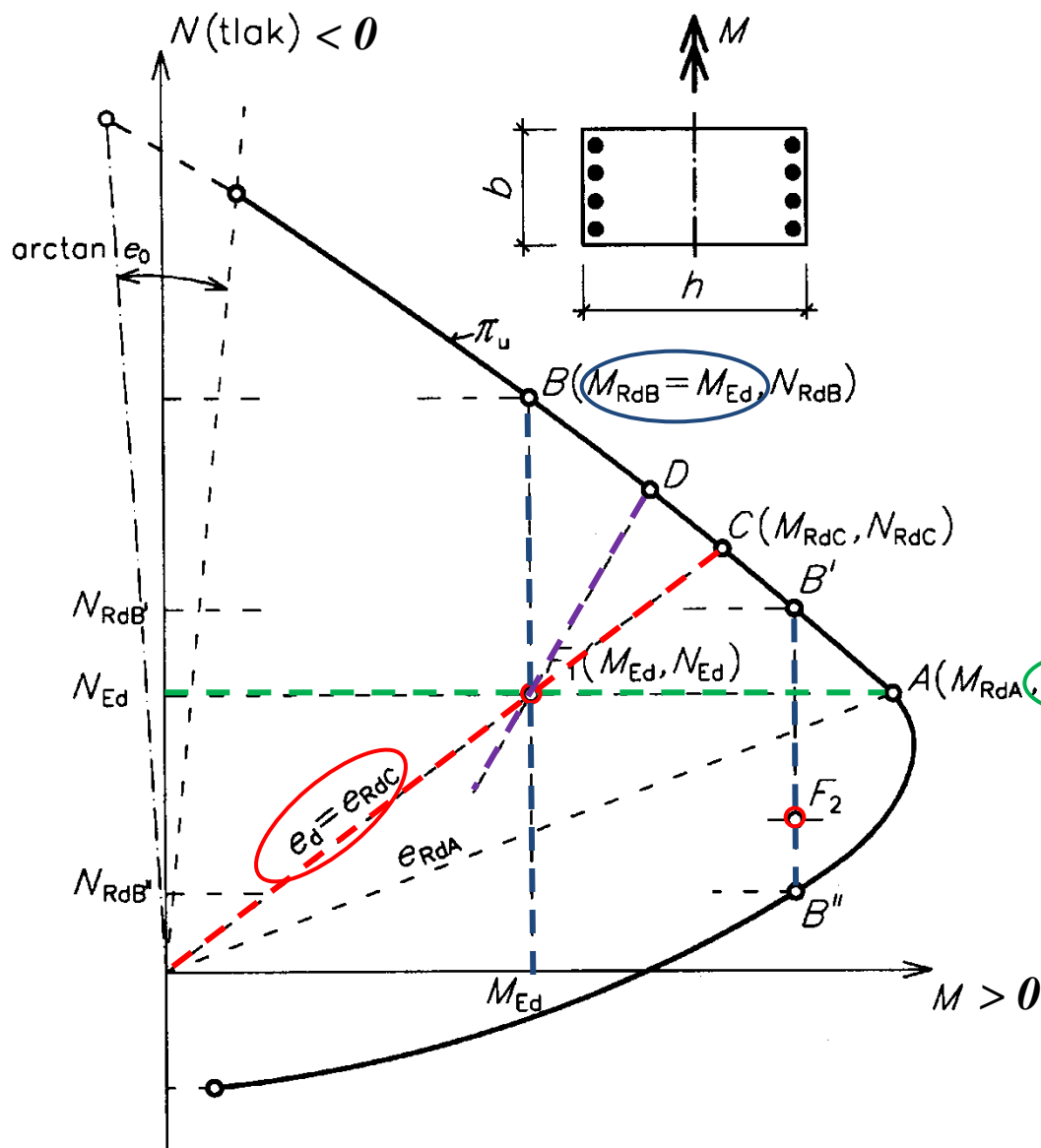
nebo

- $A_{s2}$  tažená nebo méně tlačaná výztuž,  
 $A_{s1}$  tlačaná nebo méně tažená výztuž

- tlak  $N < 0$ ; tah  $N > 0$

- $e_0 = h/30 > 20 \text{ mm}$

# Průkaz podmínek spolehlivosti



**A**

$$N_{RdA} = N_{Ed}$$

$$M_{RdA} \geq M_{Ed}$$

**B**

$$M_{RdB'} = M_{Ed} \text{ a } M_{RdB''} = M_{Ed}$$

$$N_{RdB'} \leq N_{Ed} \leq N_{RdB''}$$

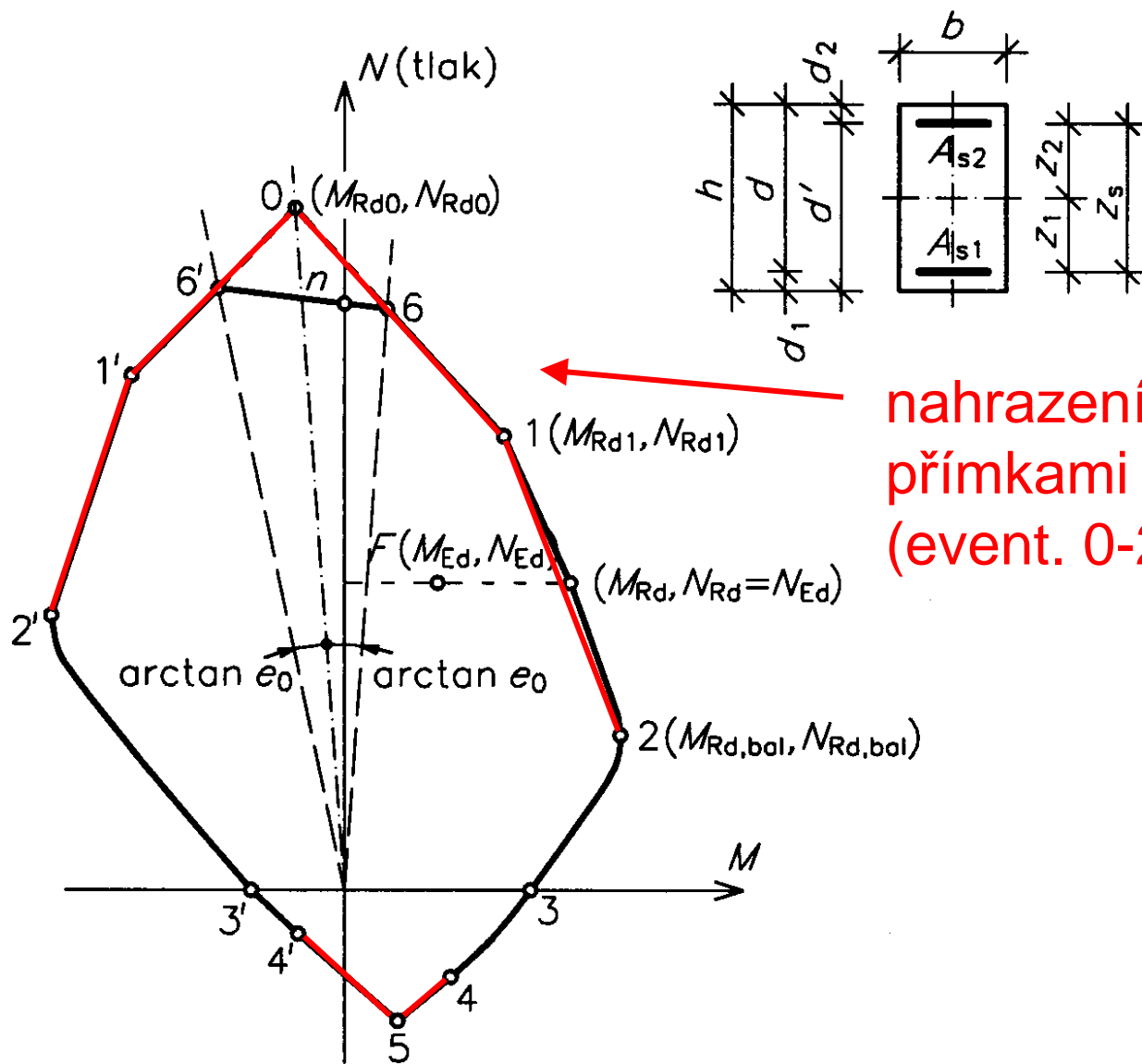
**C**

$$e_d = e_{RdC}$$

$$N_{RdC} \leq N_{Ed} \text{ a } M_{RdC} \geq M_{Ed}$$

**D** – raději nepoužívat

# Zjednodušený interakční diagram



nahrazení čáry porušení  
přímkami mezi body 0-1, 1-2,  
(event. 0-2) a 4-5,

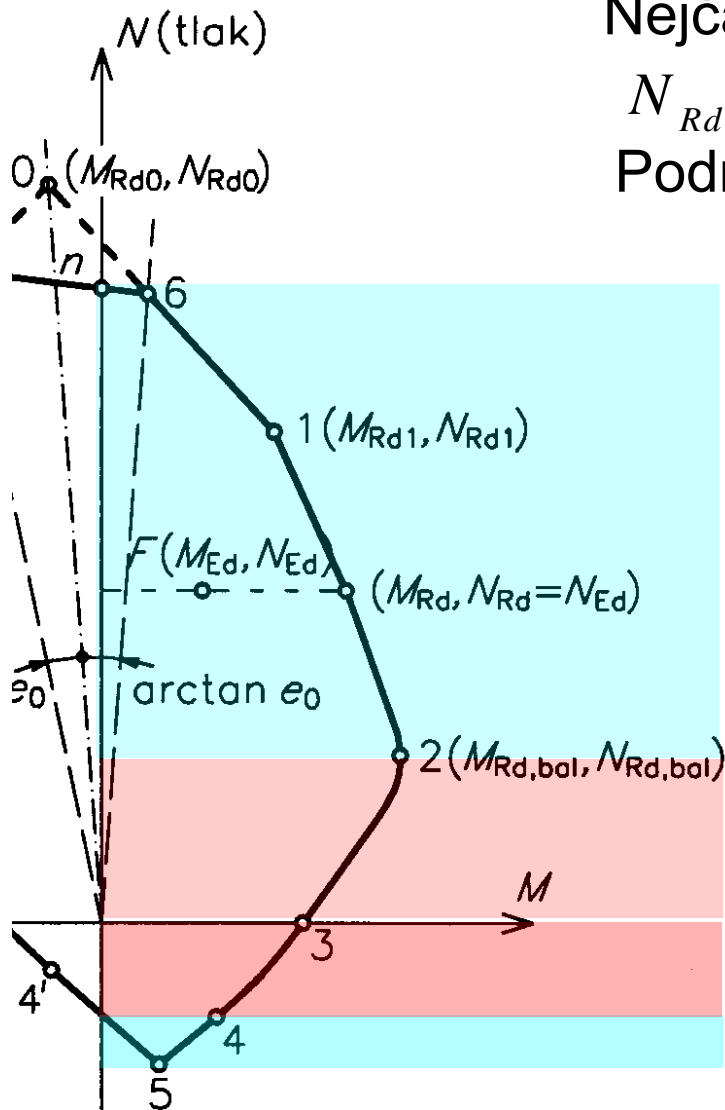


# Postup posouzení

Nejčastější způsob posouzení ad A):

$$N_{Rd} = N_{Ed}$$

Podmínka spolehlivosti  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$



- **je-li  $N_{Ed}$  tlaková**

- výpočet  $N_{Rd, bal}$

- $N_{Ed} < N_{Rd, bal} \rightarrow$  tlak s M.V.

- $N_{Ed} > N_{Rd, bal} \rightarrow$  tlak s V.V.

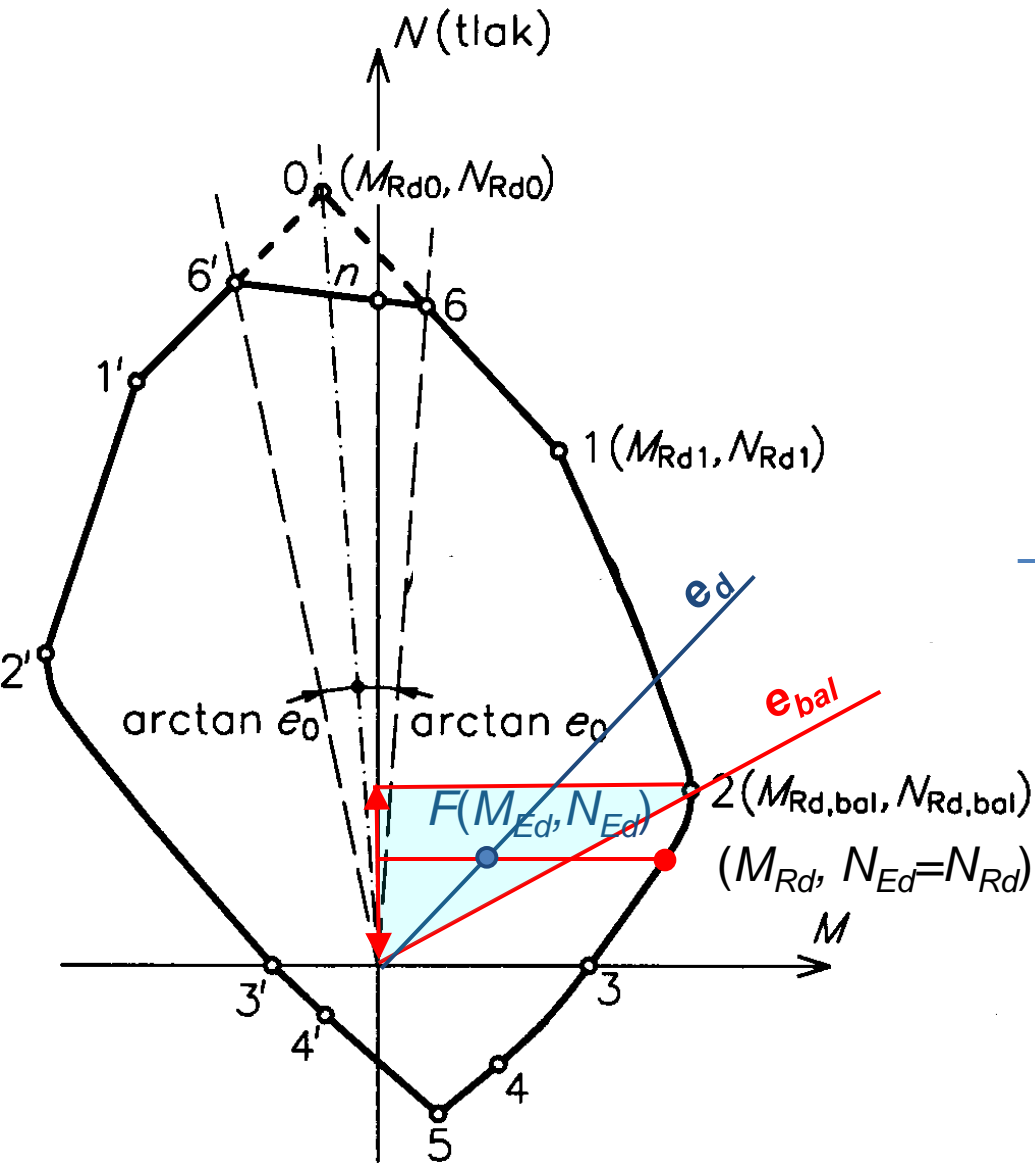
- **je-li  $N_{Ed}$  tahová**

- výpočet  $N_{Rd4}$

- $N_{Ed} < N_{Rd4} \rightarrow$  tah s V.V.

- $N_{Ed} > N_{Rd4} \rightarrow$  tah s M.V

# Posouzení – tlak s velkou výstředností



platí  $N_{Ed} > N_{Rd,bal}$

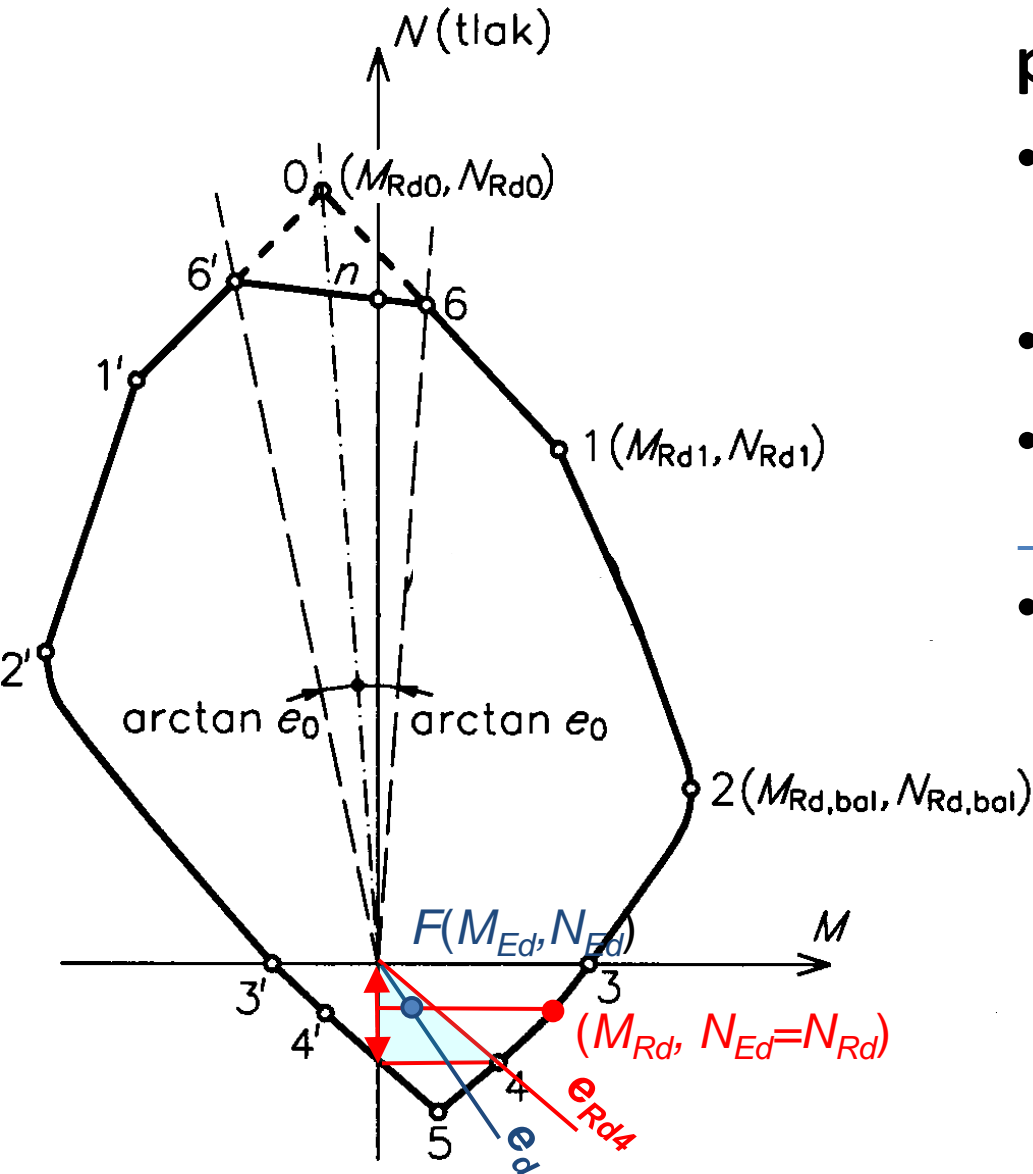
- z podmínky  $N_{Ed} = N_{Rd}$  nalézt polohu  $x$
- výpočet  $M_{Rd}$
- posouzení  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$

- 
- pokud  $e_d < e_{bal}$ , pak není potřeba dokazovat, že  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$

kde  $e_d = M_{Ed} / N_{Ed}$ ;

$$e_{bal} = M_{Rd,bal} / N_{Ed,bal}$$

# Posouzení – tah s velkou výstředností



platí  $N_{Ed} > N_{Rd4}$

- z podmínky  $N_{Ed} = N_{Rd}$  nalézt polohu  $x$

- výpočet  $M_{Rd}$

- posouzení  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$

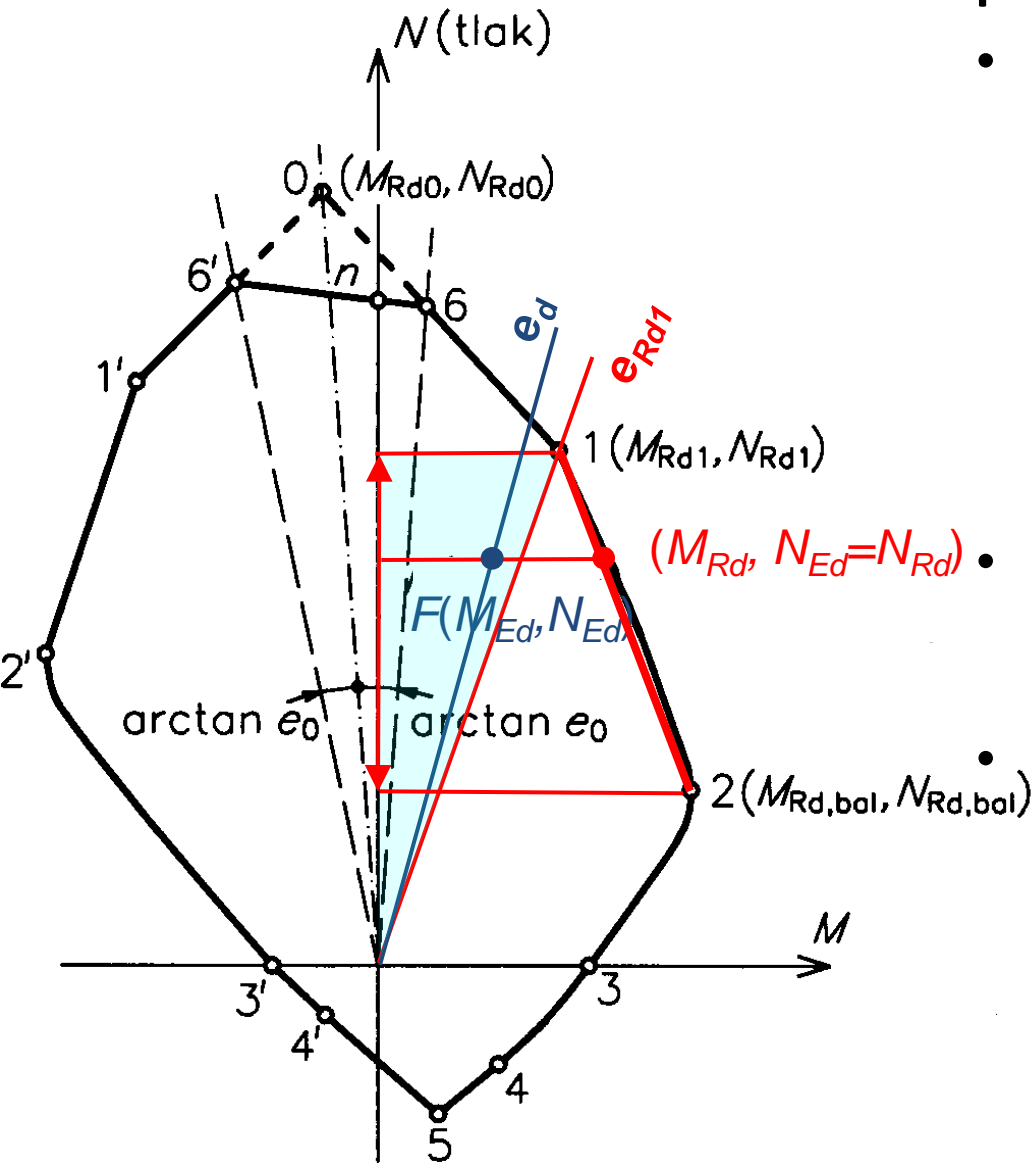
---

- pokud  $e_d < e_{Rd4}$ , pak není potřeba dokazovat, že  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$

kde  $e_d = M_{Ed} / N_{Ed}$ ;

$$e_{Rd4} = M_{Rd4} / N_{Rd4}$$

# Posouzení – tlak s malou výstředností



platí  $N_{Ed} < N_{Rd,bal}$

- výpočet  $N_{Rd1}, M_{Rd1}$ , popřípadě  $N_{Rd0}, M_{Rd0}$ 
  - je-li  $N_{Ed} > N_{Rd,1}$ , pak z průsečíků přímek 1-2 a  $N_{Ed} = N_{Rd}$  nalézt  $M_{Rd}$
  - analogicky je-li  $N_{Ed} < N_{Rd,1}$  z průsečíků přímek 0-1 a  $N_{Ed} = N_{Rd}$  nalézt  $M_{Rd}$ , (nutno pohlídat  $e_0$ , tedy bod 6)

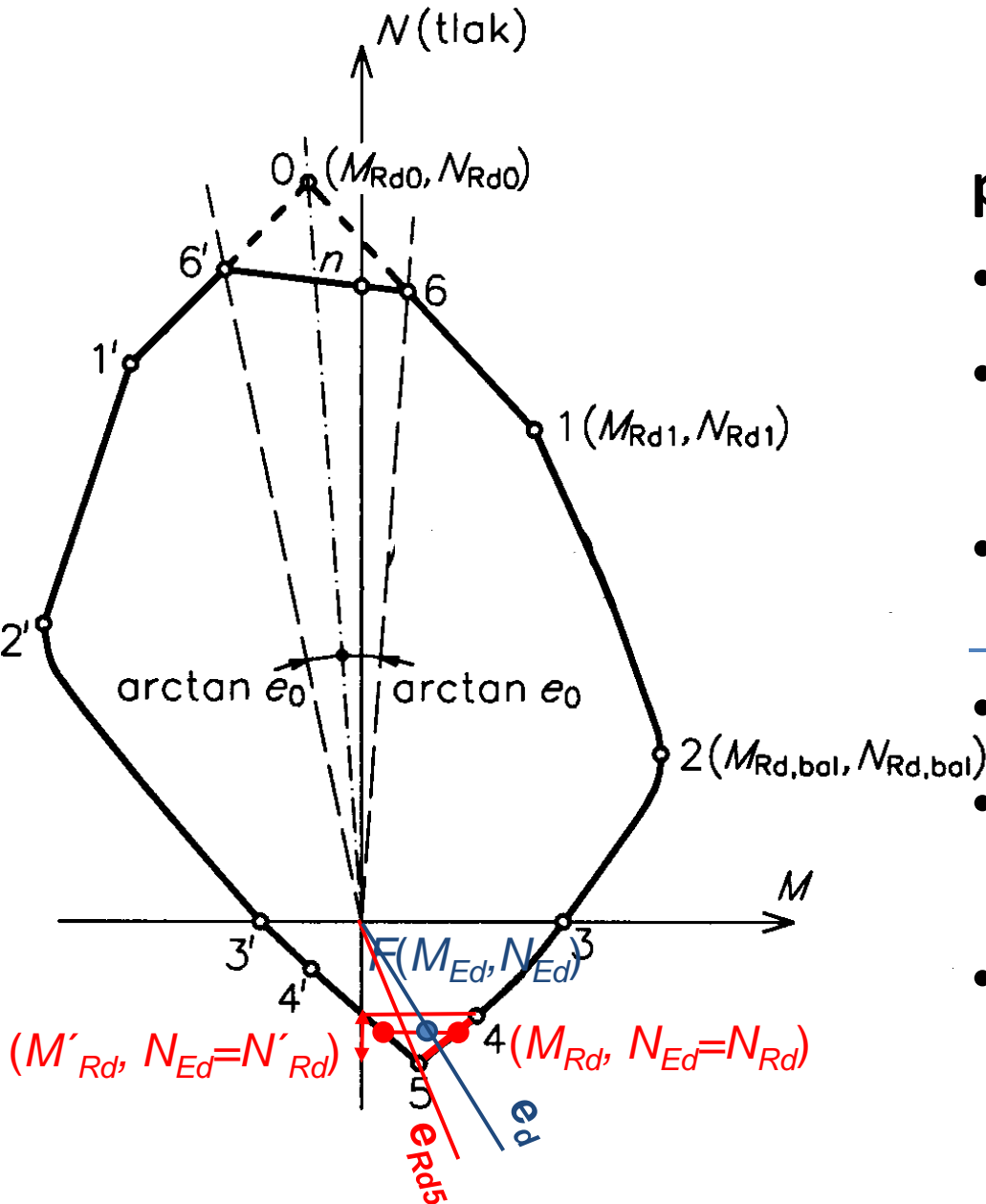
posouzení  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$

- pokud  $e_d < e_{Rd1}$ , pak není potřeba dokazovat, že  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$

kde  $e_d = M_{Ed} / N_{Ed}$ ;

$e_{Rd1} = M_{Rd1} / N_{Ed1}$

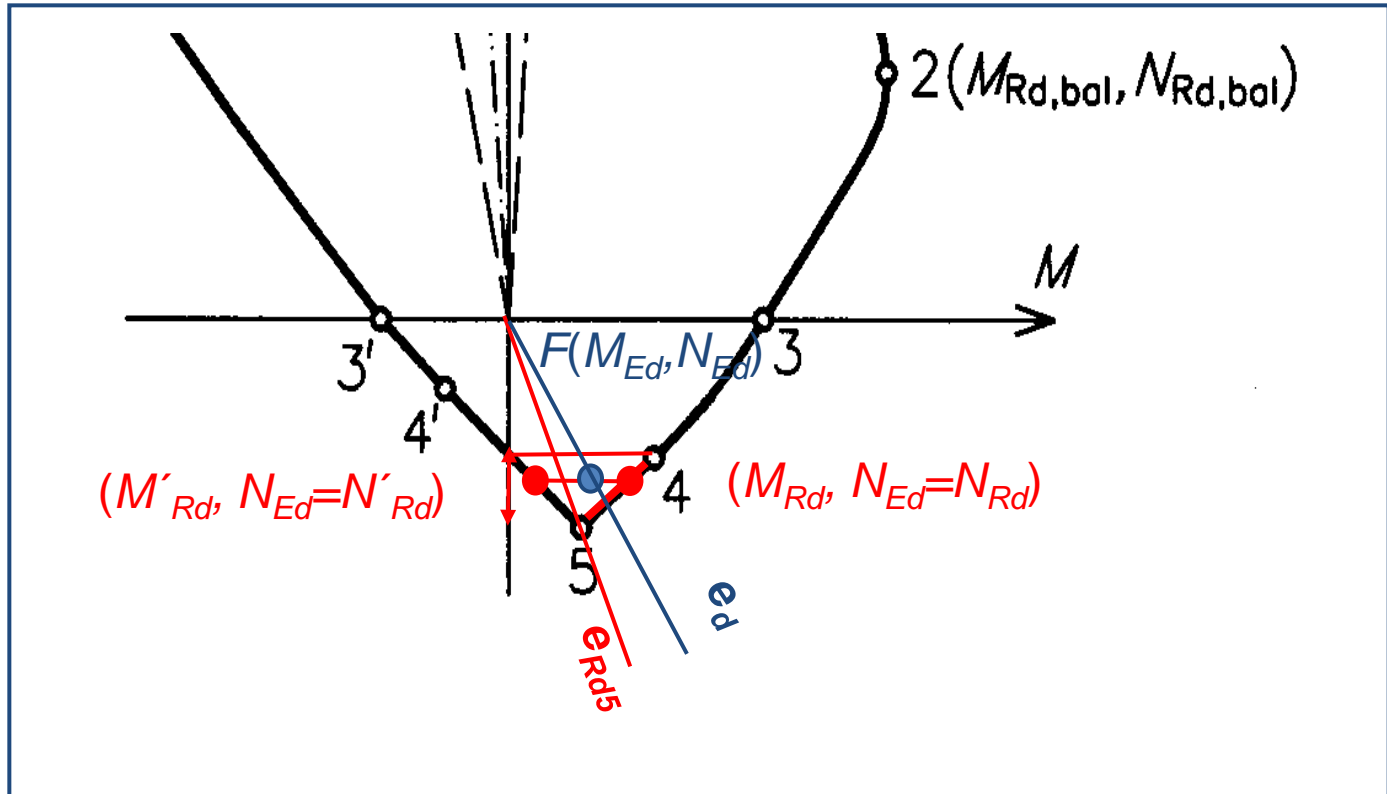
# Posouzení – tah s malou výstředností



platí  $N_{Ed} > N_{Rd,4}$

- výpočet  $N_{Rd5}, M_{Rd5}$
  - z průsečíků přímek 4-5 a  $N_{Ed} = N_{Rd}$  nalézt  $M_{Rd}$
  - posouzení  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$
- 
- je-li  $e_d < e_{Rd5}$
  - zkontrolovat i přímku 4'-5' a nalézt i  $M'_{Rd}$  a
  - posoudit  $M_{Ed} \geq M'_{Rd}$

# Posouzení – tah s malou výstředností



# Návrh výztuže

## Neznámé:

-  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ , poloha  $x$

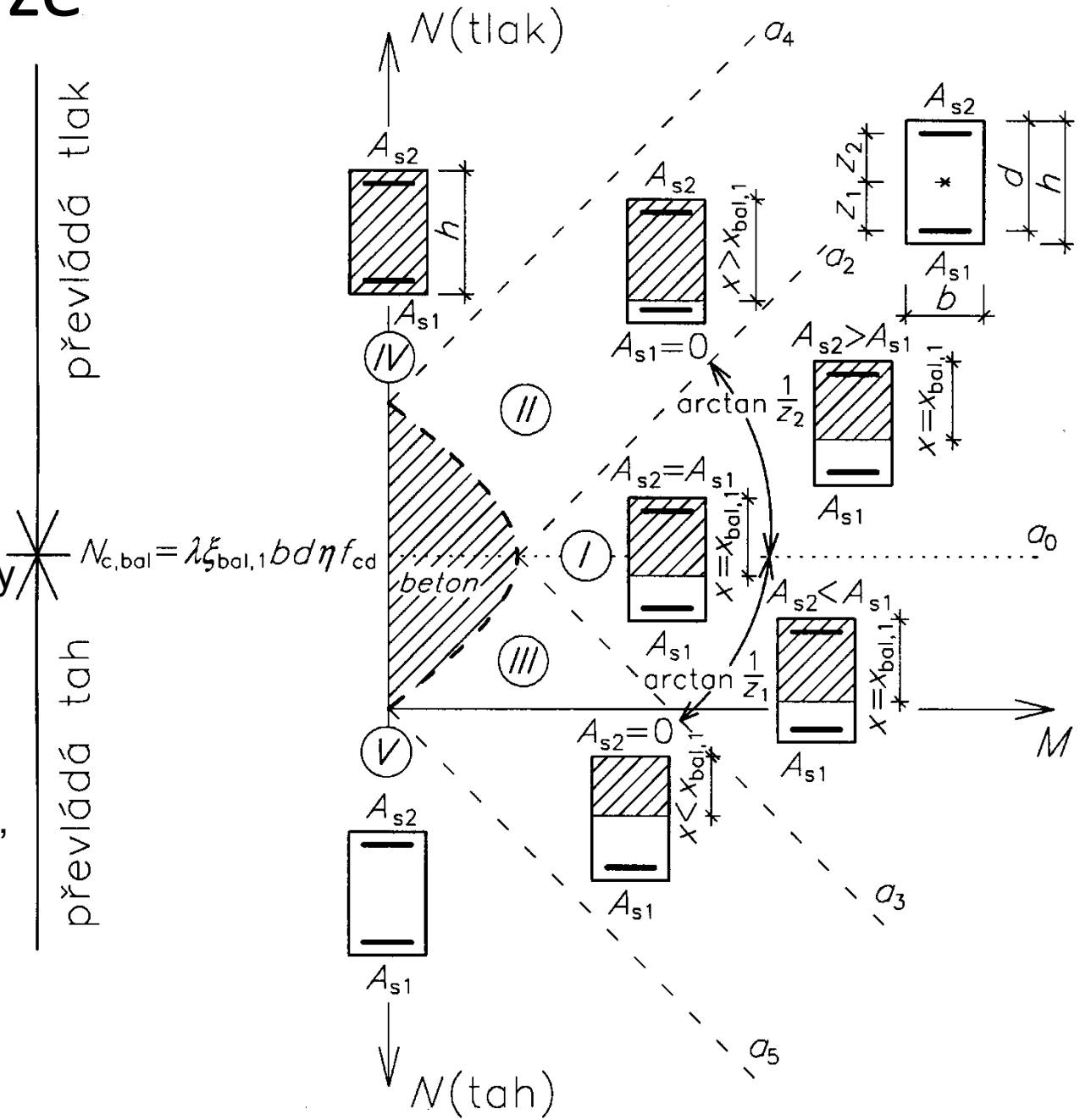
## Vycházíme:

- z podmínek rovnováhy (silová a momentová)

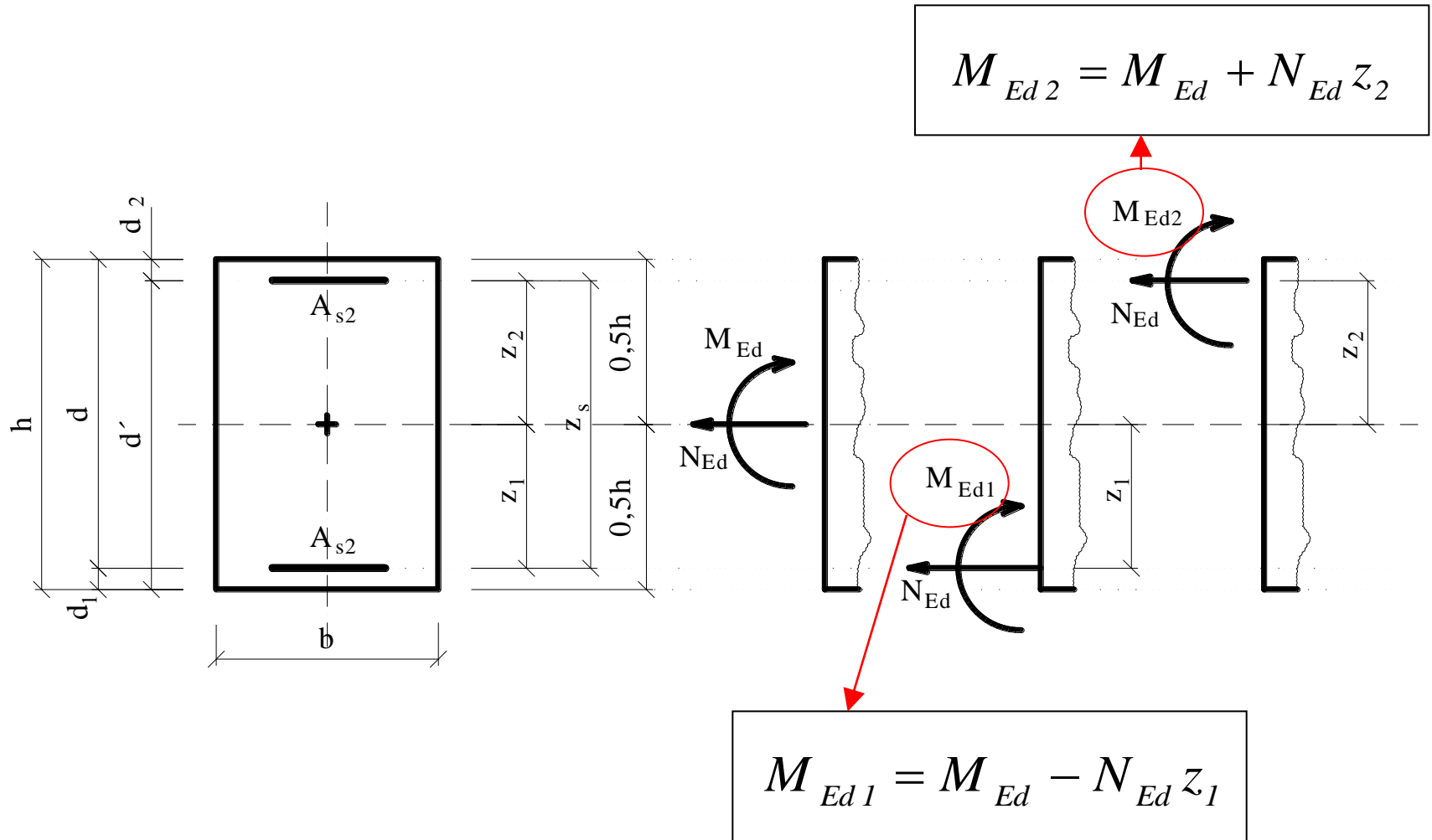
- další doplňující podmínky jako:

- vyloučení některé z výztuží  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  nebo

- předpoklad o poloze  $x$ , např.  $x = x_{bal}$

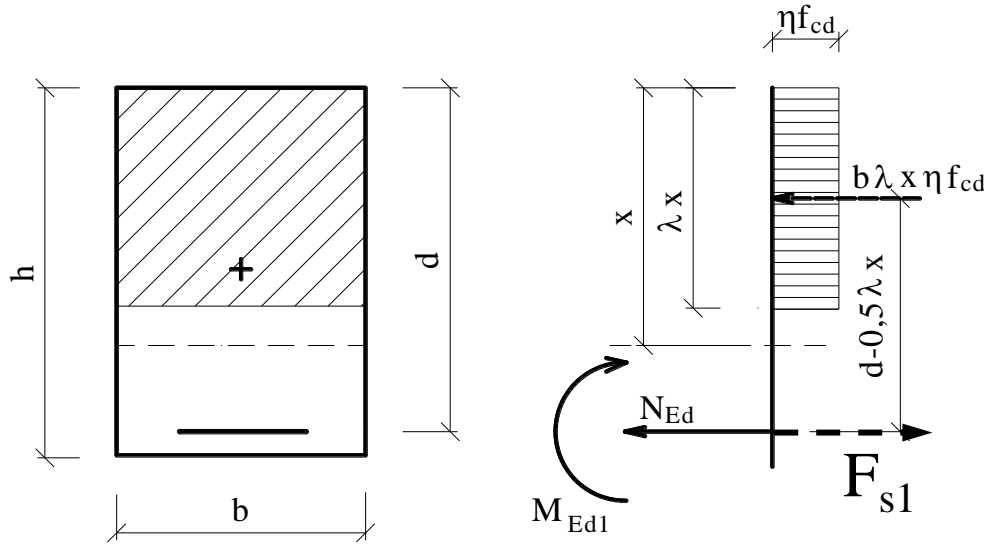


# Momenty vztažené k těžištím výztuže





# Převládající tah



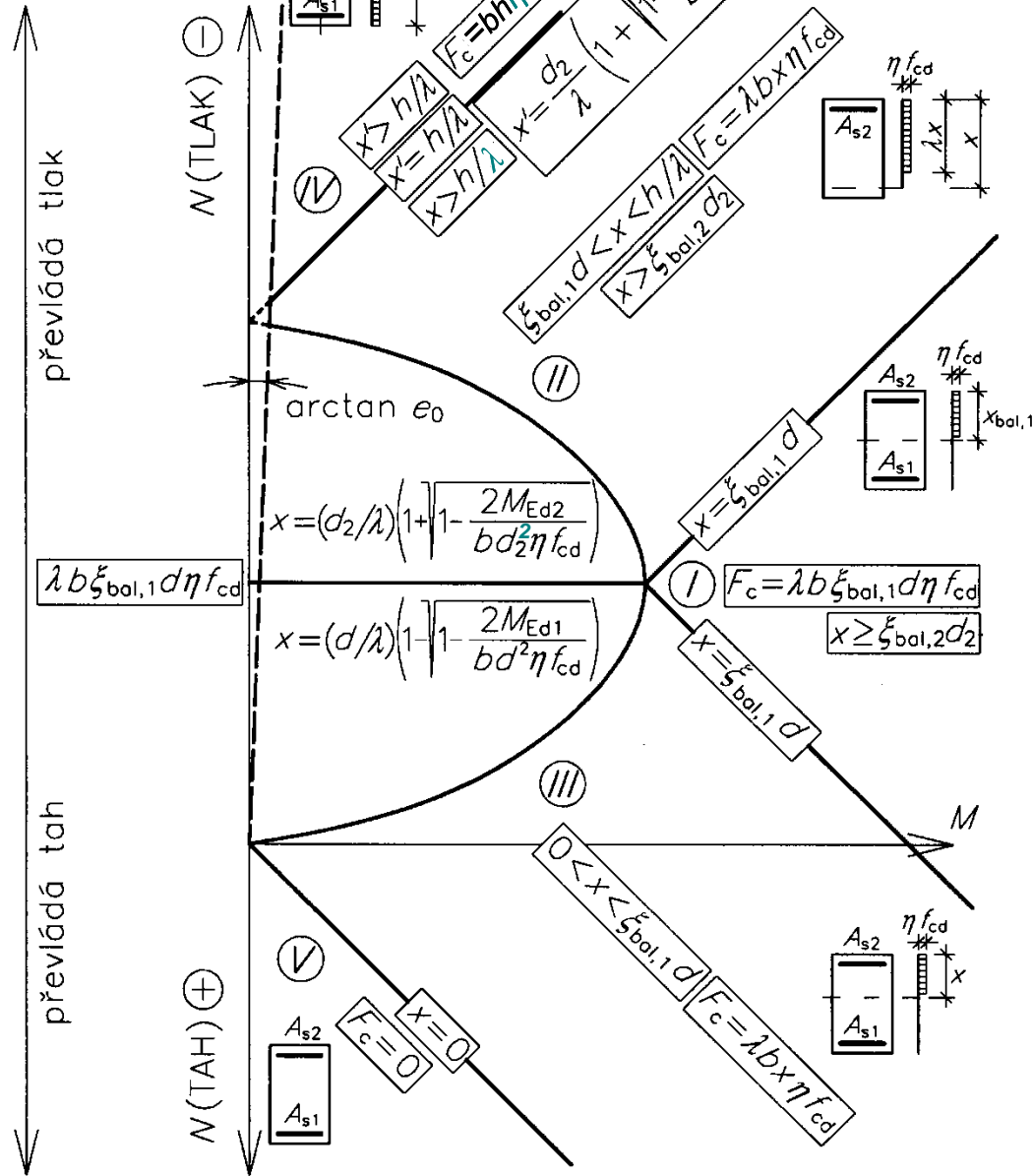
$$M_{Ed1} = b \lambda x \eta f_{ck} (d - 0,5 \lambda x) \Rightarrow$$

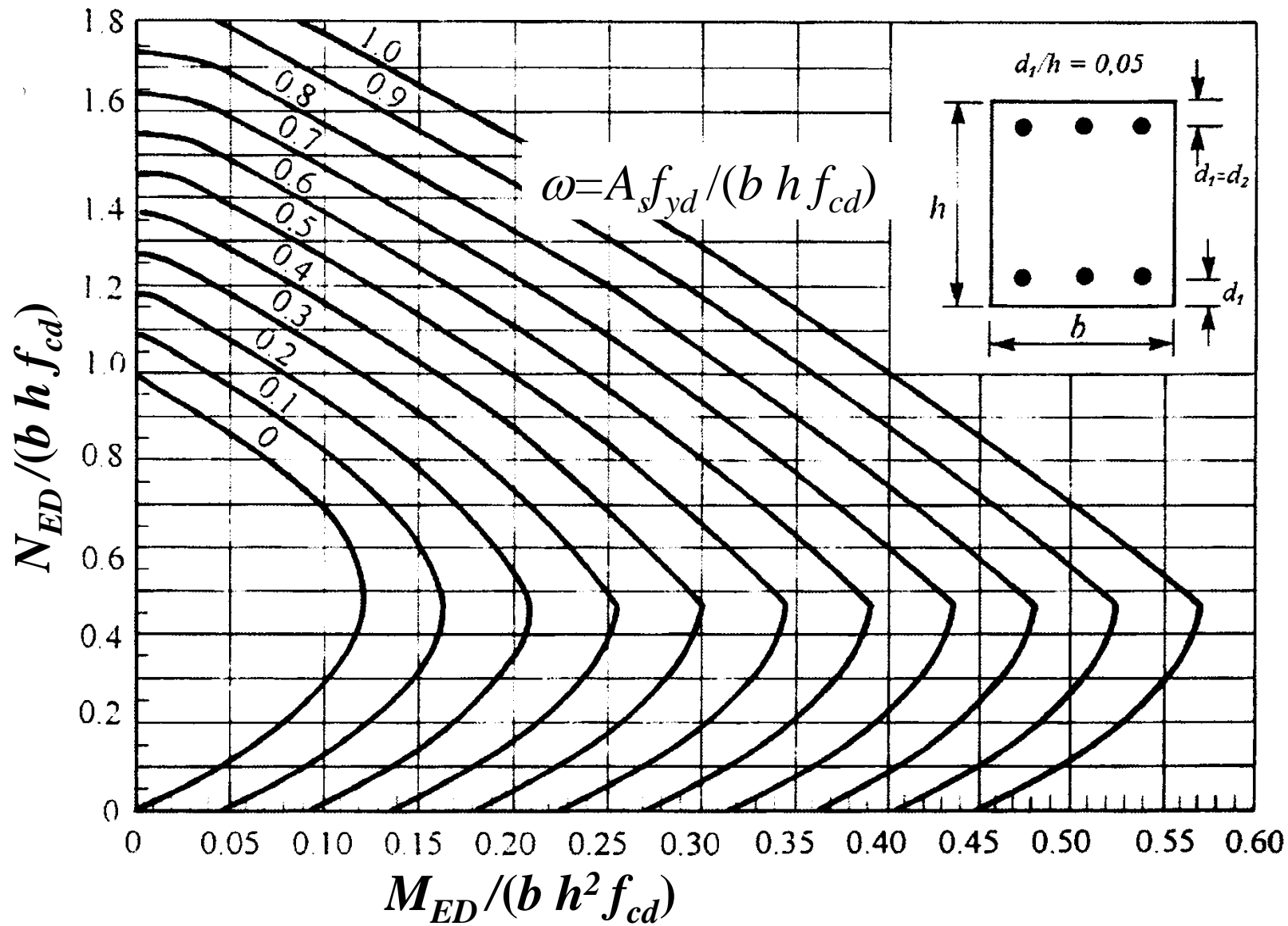
$$x = \frac{d}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_{Ed1}}{b d^2 \eta f_{cd}}} \right)$$

# Převládající tlak

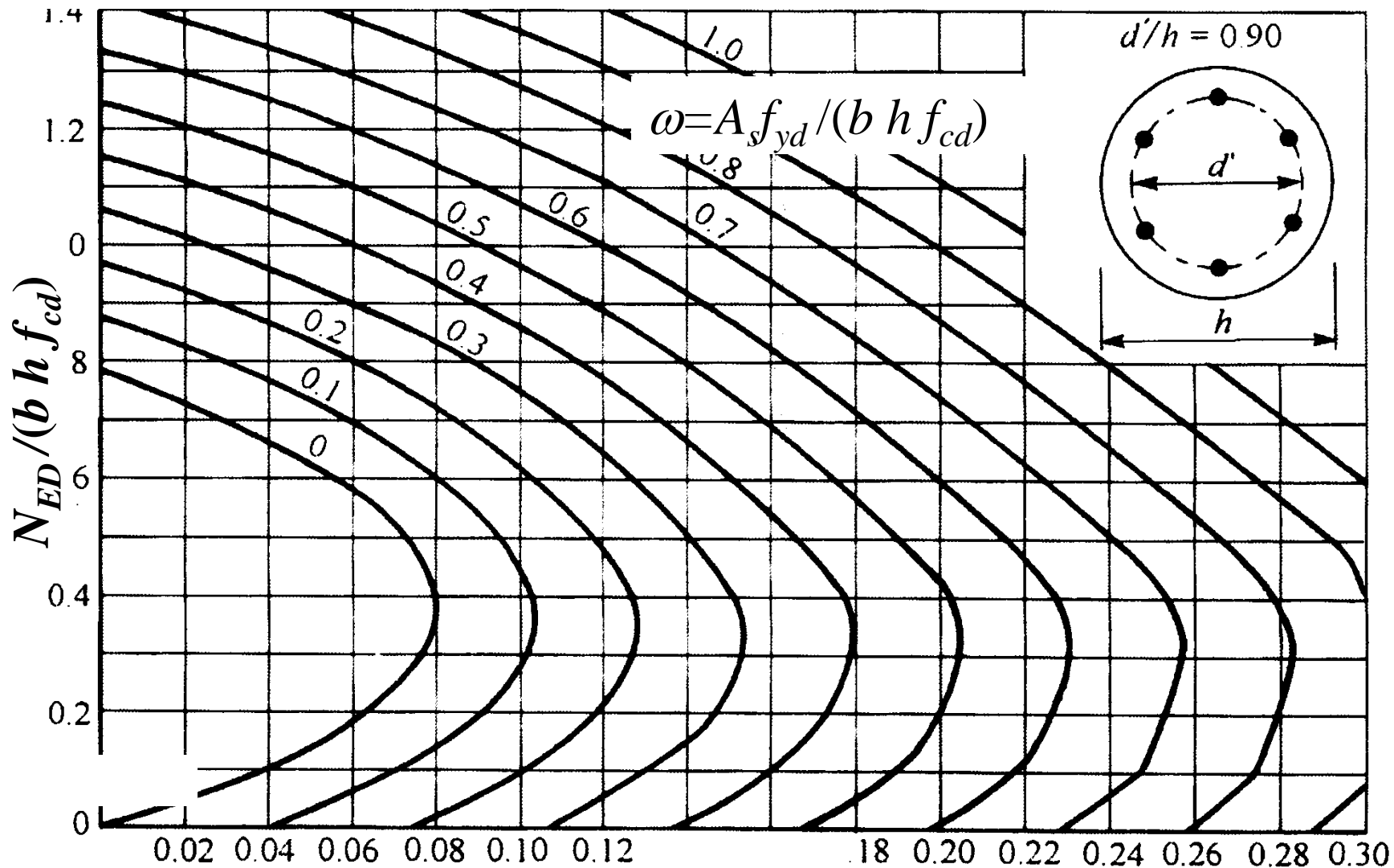
$$M_{Ed2} = b \lambda x \eta f_{ck} (0,5 \lambda x - d_2) \Rightarrow x = \frac{d_2}{\lambda} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2M_{Ed2}}{b d_2^2 \eta f_{cd}}} \right)$$

VÝPOČET  $x, F_c$





**Plocha veškeré výztuže**  $A_{s,req} = \frac{\omega b h f_{cd}}{f_{yd}}$



$M_{ED} / (b h^2 f_{cd})$

$b = h$  ; plocha veškeré výztuže  $A_{s,req} = \frac{\omega b h f_{cd}}{f_{yd}}$

# Návrh výztuže-plocha provedené výztuže

- $A_{si,prov} \geq A_{si,req} \geq A_{si,min} \quad pro \quad i = 1,2$
- $A_{si,prov} \geq A_{si,min}$
- $A_{s,min} \leq A_{s,prov} \leq A_{s,max}, \quad kde \quad A_{s,prov} = A_{s1} + A_{s2}$

## Tlačená výztuž

$$A_{si,min} = \max \left\{ 0,05 N_{Ed} / f_{yd} ; 0,001 A_c \right\}$$

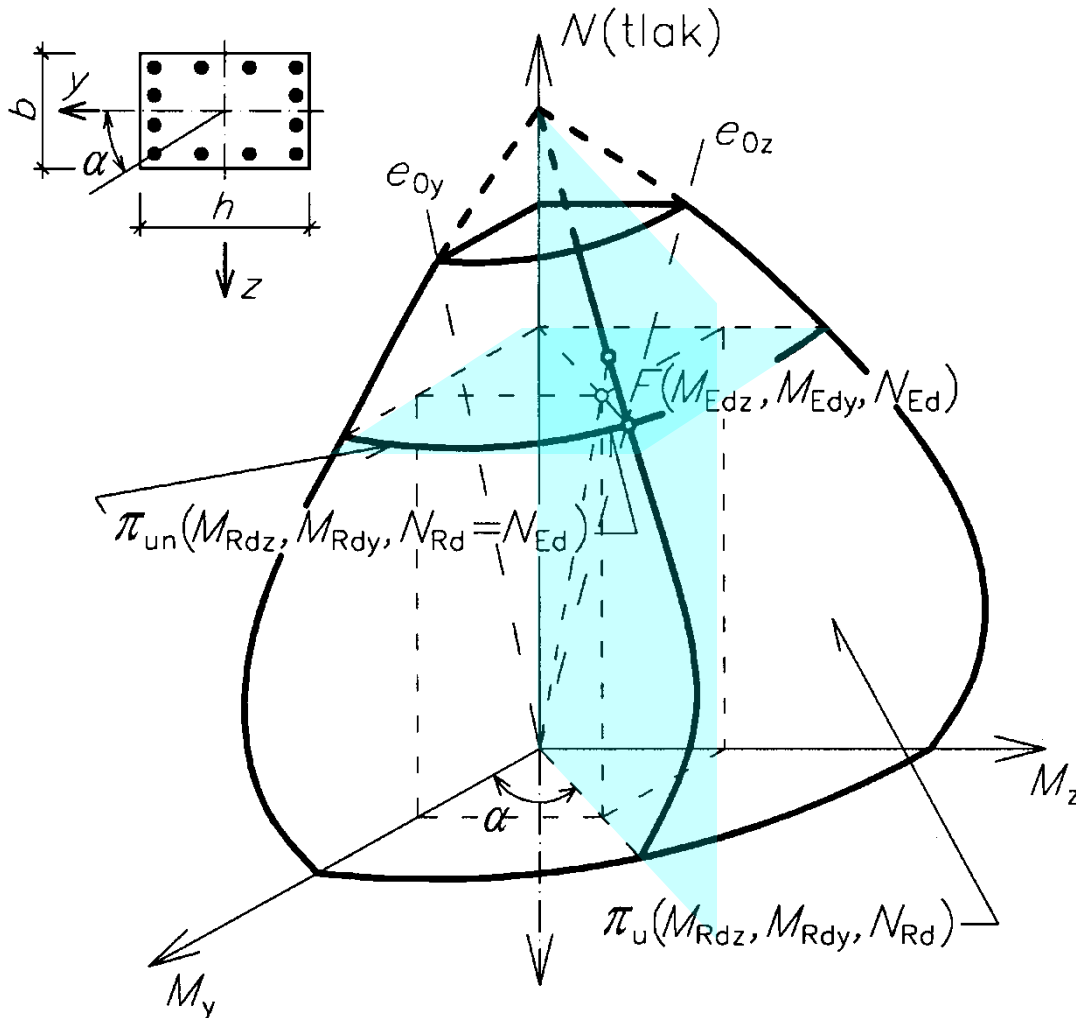
$$A_{s,min} = 2 A_{si,min}$$

$$A_{s,max} = 0,04 A_c$$

## Tažená výztuž

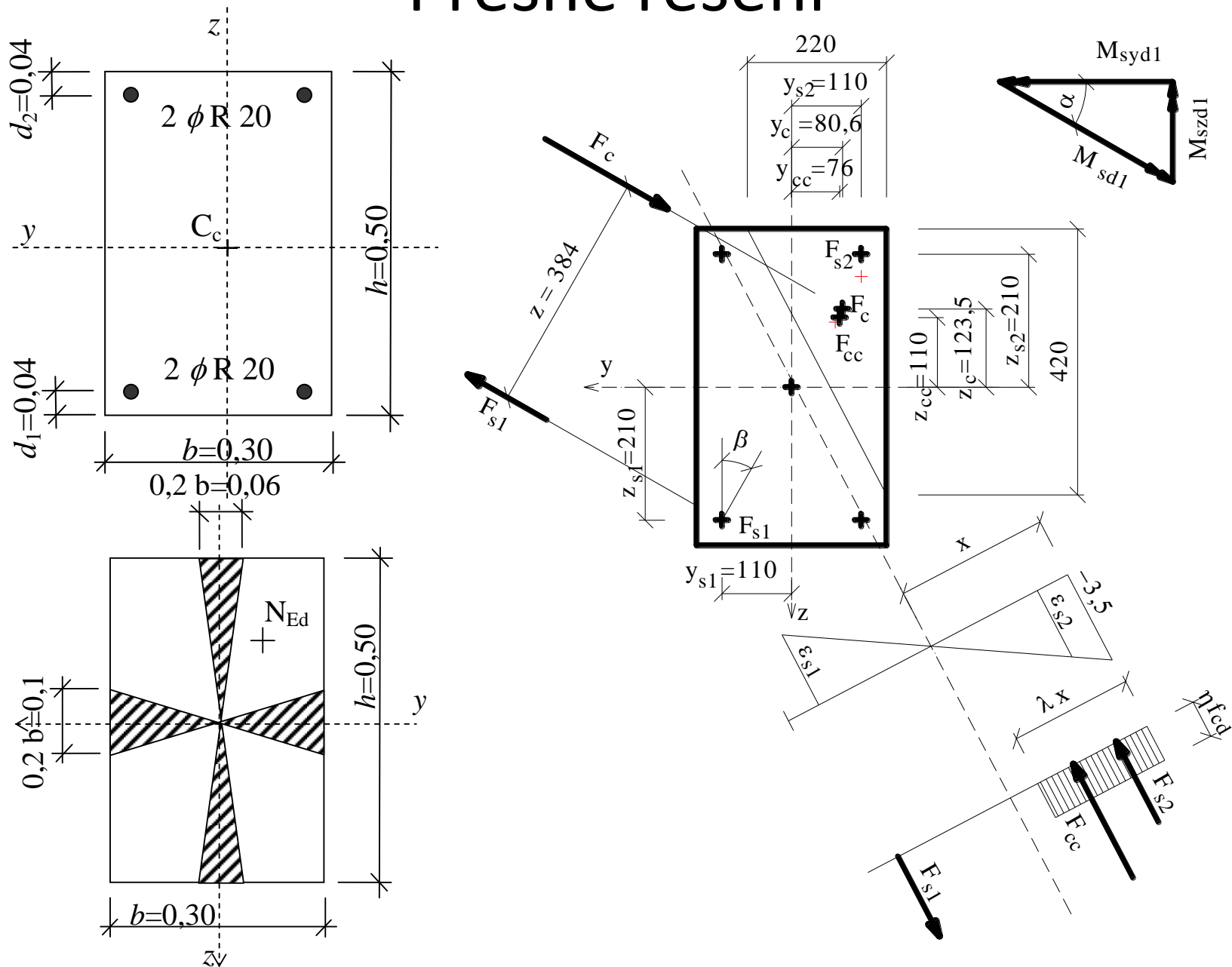
$$A_{si,min} = \max \left\{ 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t h ; 0,0013 b_t h \right\}$$

# Šikmý ohyb s tahem nebo tlakem - interakční plocha porušení



- Přesné řešení
- Zjednodušené
  - Oddělené posouzení při zanedbání výstřednosti v druhém směru
  - Využití vodorovného řezu v úrovni  $N_E$  a (náhrada křivky únosnosti elipsou)

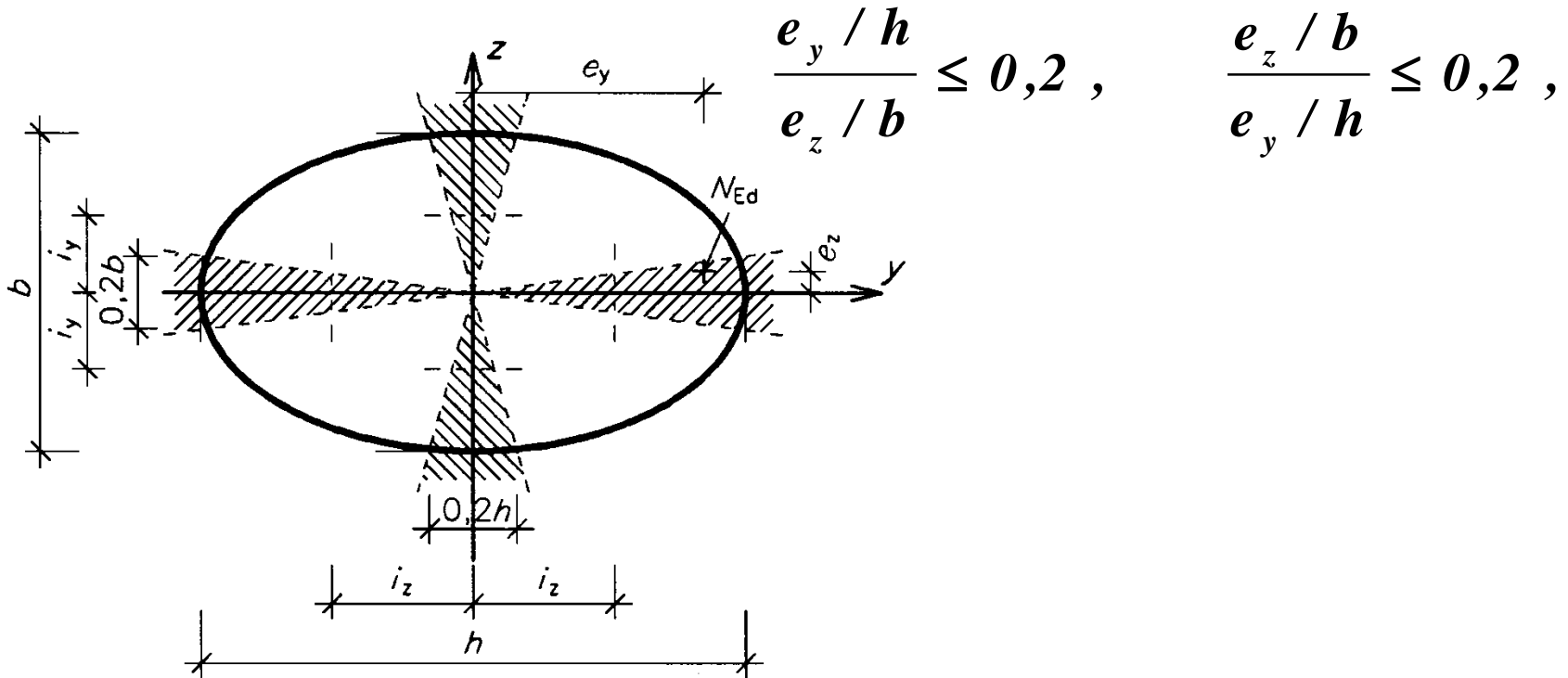
# Přesné řešení



í  
n

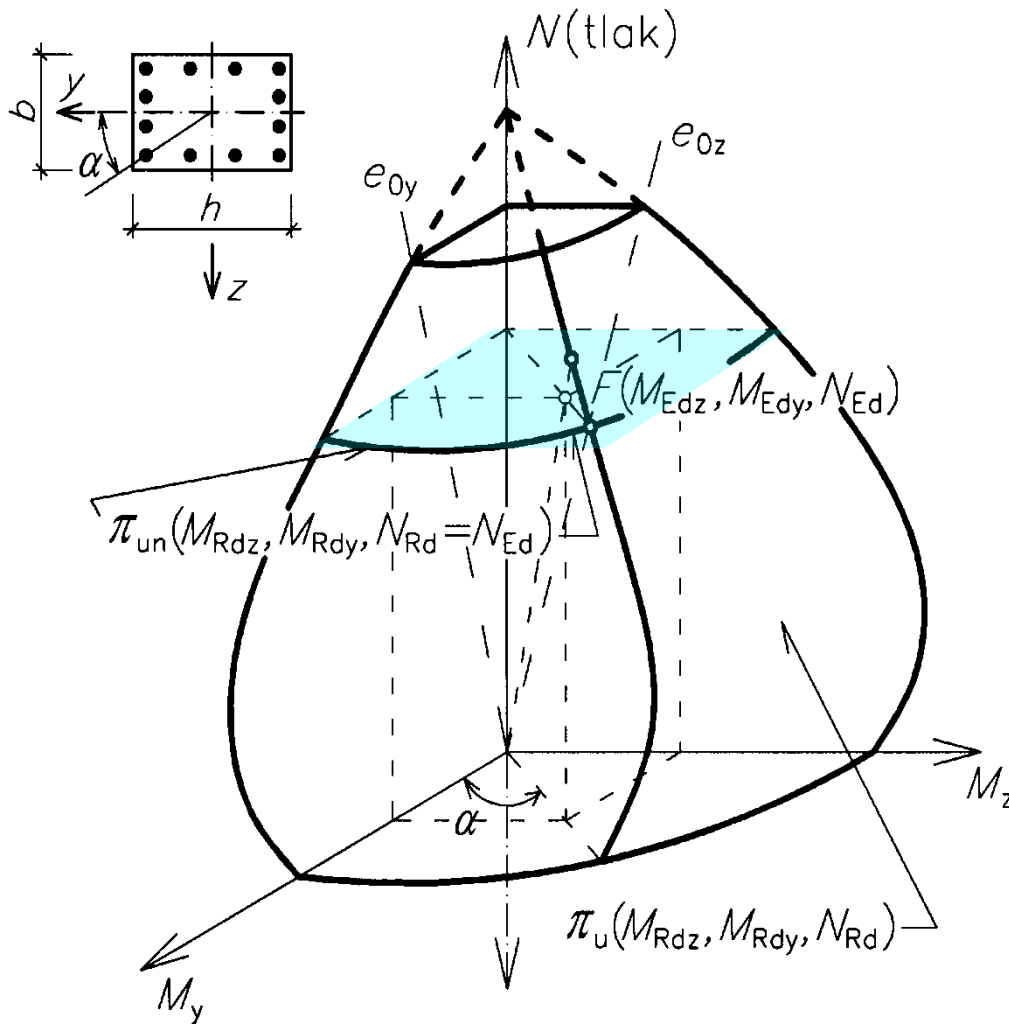
# Oddělené posouzení ve dvou hlavních rovinách

- podmínky:**
- $\lambda_y / \lambda_z \leq 2$  a  $\lambda_z / \lambda_y \leq 2$
  - poměrné excentricity  $e_z / h$  a  $e_y / b$  splňují jednu z podmínek





# Využití vodorovného řezu inter. plochou porušení v úrovni $N_E$



$$\left( \frac{M_{Ely}}{M_{Rdy}} \right)^a + \left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a \leq 1,0$$

**kruhové a eliptické průřezy:**

$$a = 2,$$

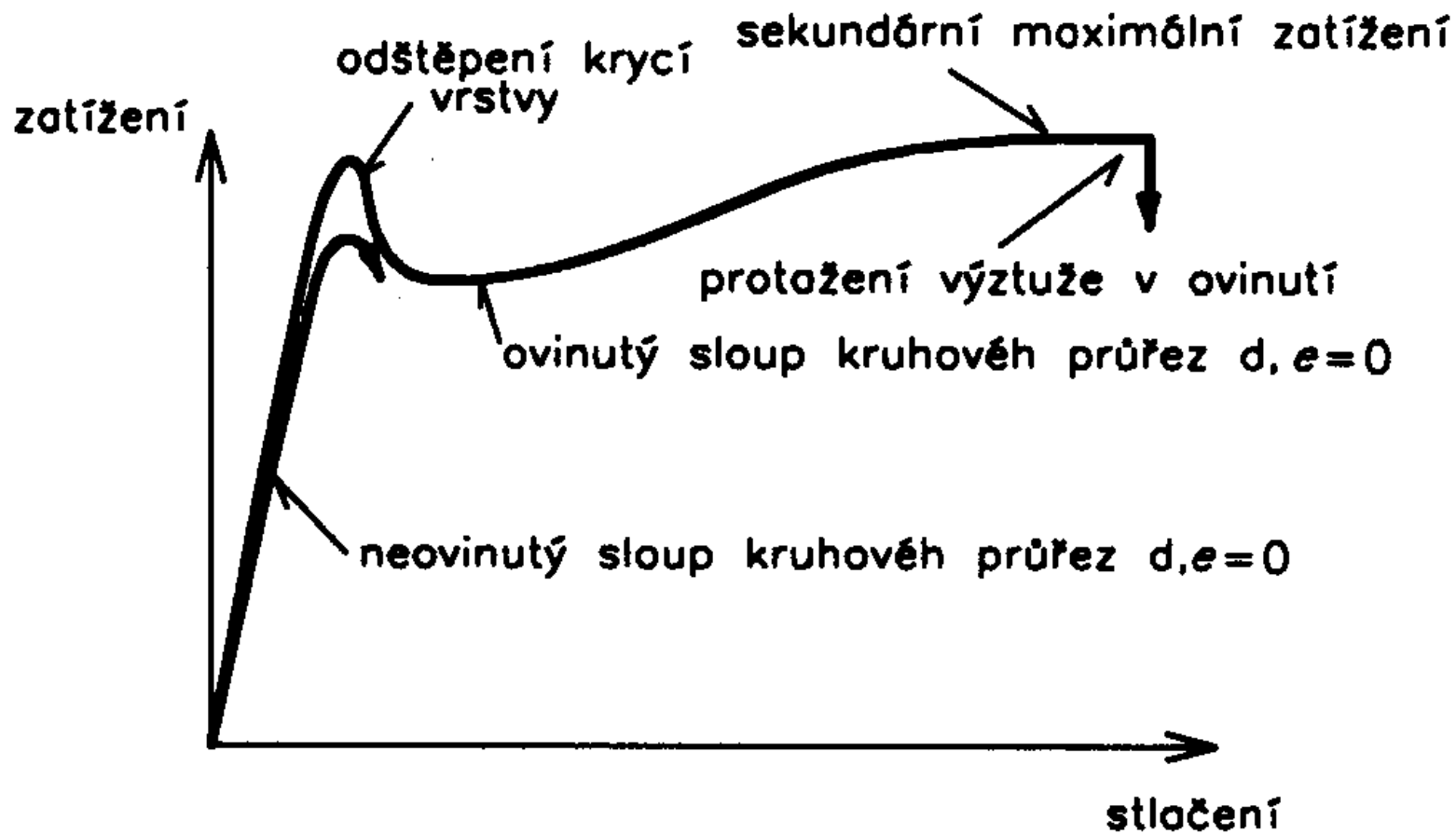
**pravoúhlé průřezy:**

$N_{Ed} / N_{Rd0}$	0,1	0,7	1,0
$a$	1,0	1,5	2,0

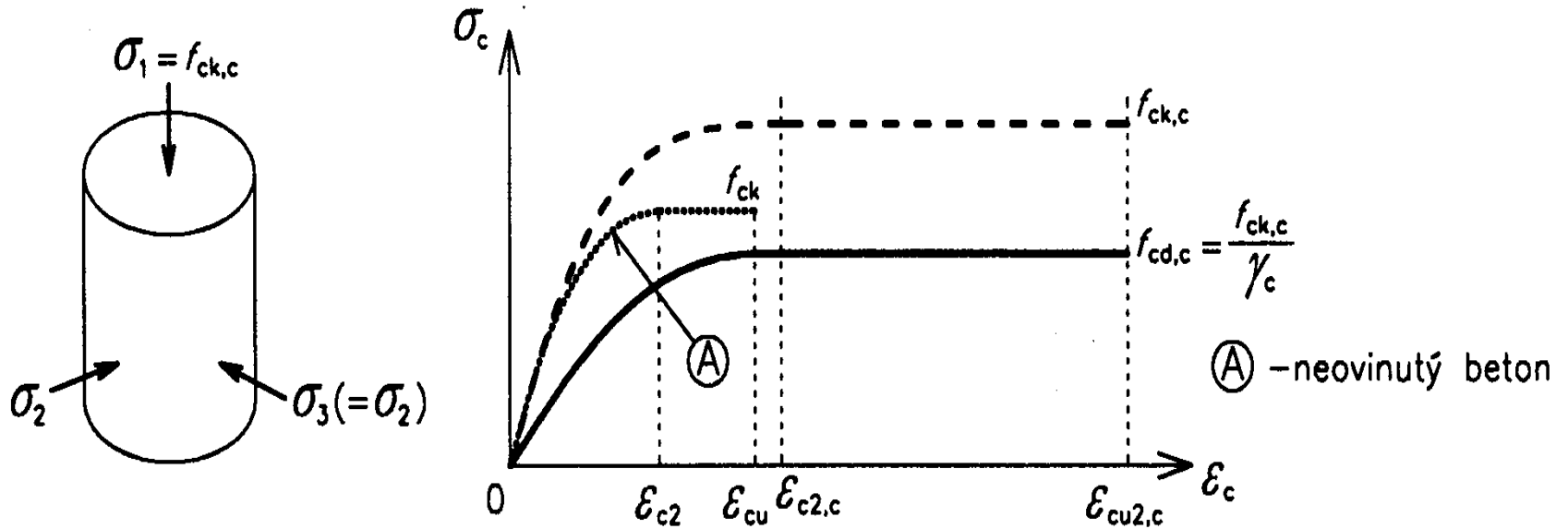
**kde**

$$N_{Rd0} = A_c \eta f_{cd} + A_s f_{yd}$$

# Ovinuté sloupy



# Ovinuté sloupy – trojosá napjatost



$$f_{ck,c} = f_{ck} (1,000 + 5,0 \sigma_2 / f_{ck}) \quad \text{při } \sigma_2 < 0,05 f_{ck}$$

$$f_{ck,c} = f_{ck} (1,125 + 2,5 \sigma_2 / f_{ck}) \quad \text{při } \sigma_2 > 0,05 f_{ck}$$

$$\varepsilon_{c2,c} = \varepsilon_{c2} (f_{ck,c} / f_{ck})^2$$

$$\varepsilon_{cu2,c} = \varepsilon_{cu2} + 0,2 \sigma_2 / f_{ck}$$

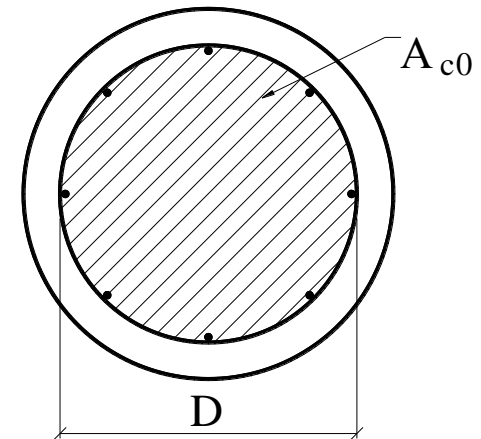
# Ovinuté sloupy – teoretický dostředný tlak

$$N_{Rd0} = A_{c0} f_{cd,c} + A_s f_{yd}$$

kde  $A_{c0}$  plocha betonu ovinutého jádra  
 $f_{cd,c}$  zvýšená návrhová pevnost betonu  
v tlaku vlivem ovinutí  $f_{cd,c} = f_{ck,c} / \gamma_c$   
 $A_s$  průřezová plocha podélné výztuže

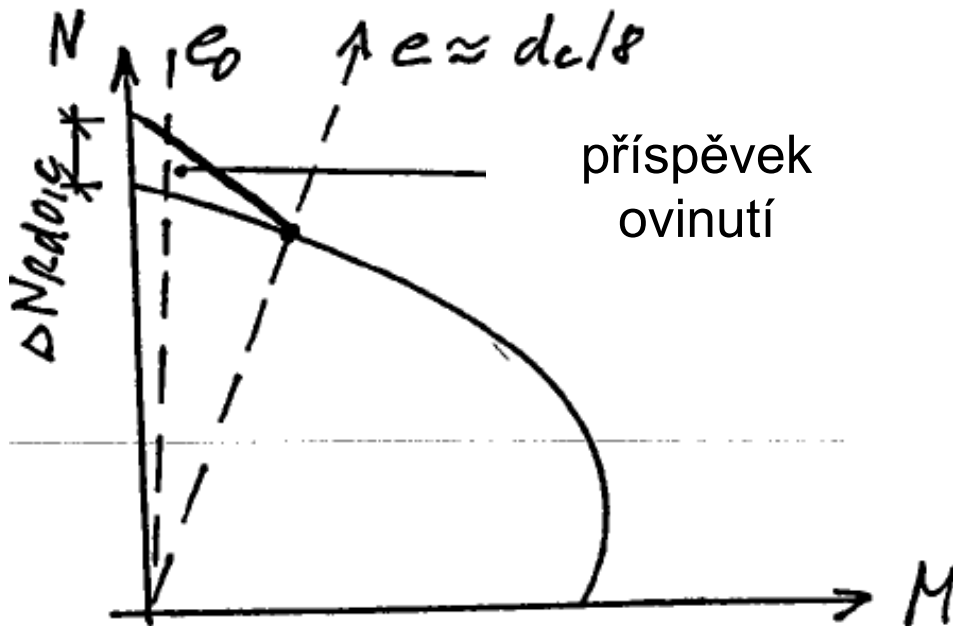
$$\sigma_2 = 2 \cdot A_{s,sth} \cdot f_{ywd} / (s \cdot D)$$

kde  $A_{s,sth}$  průřezová plocha třmínku,  
šroubovice  
 $f_{ywd}$  návrhová pevnost výztuže šroubovice  
 $s$  vzdálenost třmínků, stoupání šroubovice  
 $D$  průměr střednice třmínku, šroubovice



# Ovinuté sloupy

- Vliv ovinutí v interakčním diagramu



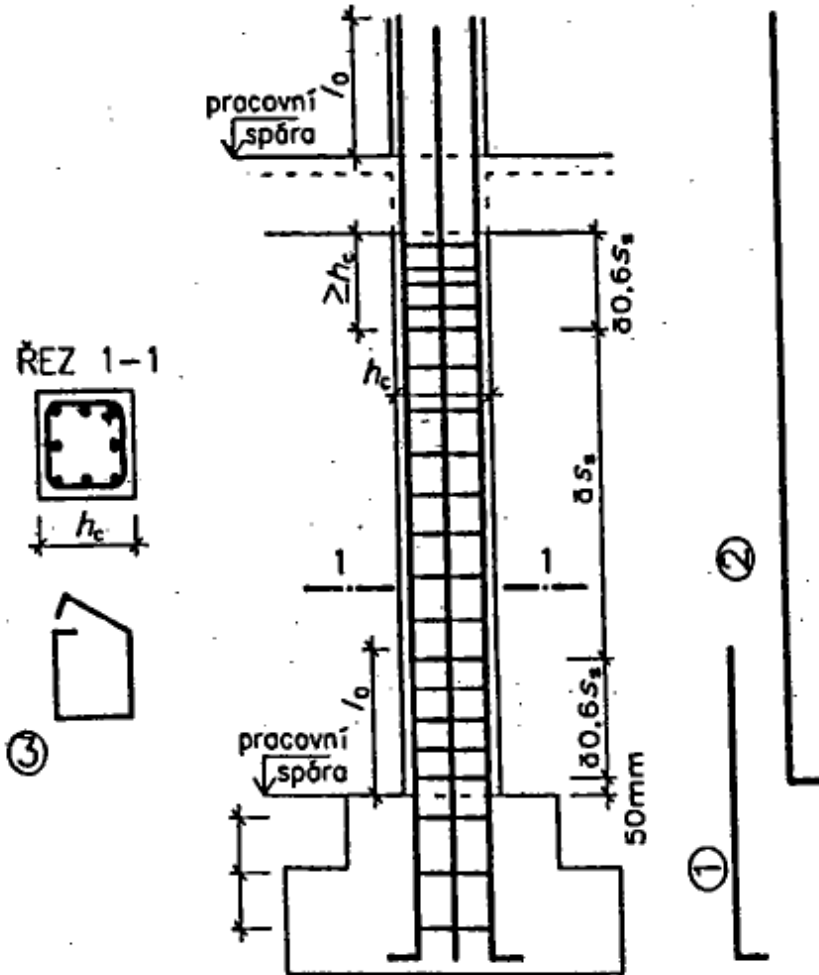
# Konstrukční zásady

- Podélná výztuž
  - min 4 $\emptyset$ , (u sloupů O průřezu doporučeno 6 $\emptyset$ )
  - nejmenší průměr  $\emptyset 8\text{mm}$ , (podle NP ČR  $\emptyset 12\text{mm}$  u sloupů s min. rozměrem 200 a větším, v ostatních případech  $\emptyset 10\text{mm}$ )
  - nejmenší světlá vzdálenost
  - (max. osová vzdálenost doporučena 400mm)

# Konstrukční zásady

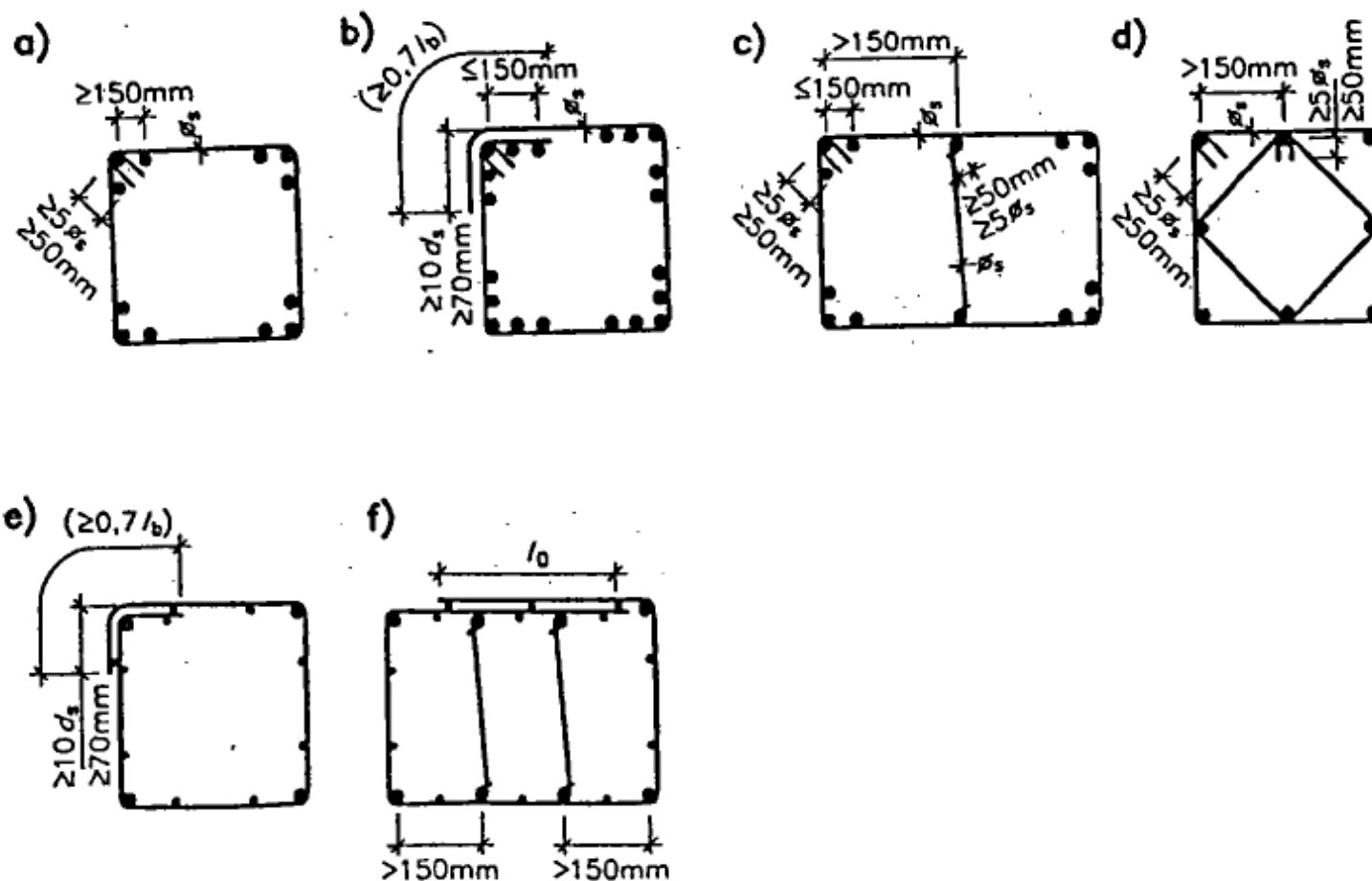
## Třmínky

- profil
  - min  $\varnothing 6\text{mm}$  (sítě  $\varnothing 5\text{mm}$ )
  - min  $\frac{1}{4} \varnothing_{l,max}$
- vzdálenost  $s_t$ 
  - $\leq 20\varnothing_{l,min}$  ( $15 \varnothing_{l,min}$ )
  - $\leq b$
  - $\leq 400\text{mm}$  ( $300\text{mm}$ )
- zhušťování v místech
  - nad a pod deskou na výšku  $h > b$
  - v oblasti styků podélné výztuže, je-li  $\varnothing_l > 14\text{mm}$



Zhuštění třmínků ve sloupech

# Zajištění vybočení podélné tlečené výztuže příčnou výztuží



příklad použití sítí