

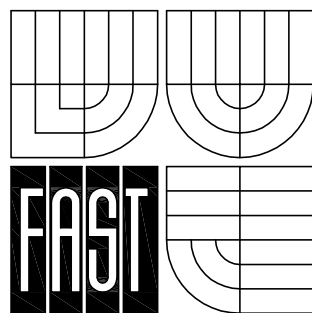
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA STAVEBNÍ

---

ING. PETR DUCHÁČ  
ING. STANISLAV RŮŽIČKA  
DOC. ING. LADISLAV KLUSÁČEK, CSC.

# KONSTRUKCE Z PŘEDPJTÉHO BETONU A JEJICH STATICKÁ ANALÝZA

SBÍRKA PŘÍKLADŮ



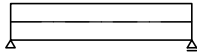
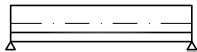
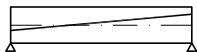

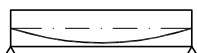
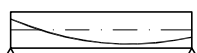


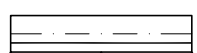
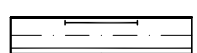
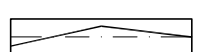
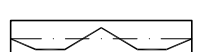
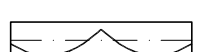

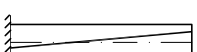
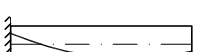
STUDIJNÍ MATERIÁL PRO PREZENČNÍ A KOMBINOVANOU FORMU STUDIA

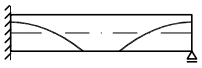
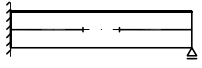



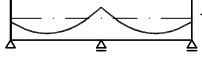

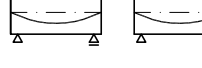
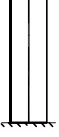

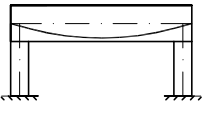
---

Tento výukový materiál vznikl za finanční podpory Fondu rozvoje vysokých škol, jako projekt FRVŠ č. 1751/2012.

© Petr Ducháč, Stanislav Růžička, Ladislav Klusáček, Brno 2012

# OBSAH

<b>1. Úvod</b> .....	<b>5</b>
1.1 Cíle .....	5
1.2 Požadované znalosti .....	5
1.3 Metodický návod na práci s textem .....	5
1.4 Klíčová slova .....	5
<b>2. Teoretická část</b> .....	<b>6</b>
2.1 Účinky předpětí na konstrukci .....	6
2.2 Ekvivalentní zatížení od parabolického kabelu .....	8
2.3 Konkordantní kabel .....	9
2.4 Staticky neurčité účinky od předpětí .....	10
2.4.1 Metoda třímomentových rovnic .....	11
2.4.2 Vereščaginovo pravidlo .....	14
2.4.3 Metoda jednotkových sil .....	18
2.4.4 Mohrova analogie .....	22
2.4.5 Zjednodušená deformační metoda .....	26
<b>3. Výpočtová část</b> .....	<b>33</b>
3.1 Příklad č. 1:  .....	33
3.2 Příklad č. 2:  .....	34
3.3 Příklad č. 3:  .....	35
3.4 Příklad č. 4:  .....	36
3.5 Příklad č. 5:  .....	38
3.6 Příklad č. 6:  .....	40
3.7 Příklad č. 7:  .....	42
3.8 Příklad č. 8:  .....	44
3.9 Příklad č. 9:  .....	46
3.10 Příklad č. 10:  .....	49
3.11 Příklad č. 11:  .....	52
3.12 Příklad č. 12:  .....	56
3.13 Příklad č. 13:  .....	67
3.14 Příklad č. 14:  .....	71
3.15 Příklad č. 15:  .....	76
3.16 Příklad č. 16:  .....	79

3.17	Příklad č. 17:		.....	82
3.18	Příklad č. 18:		.....	86
3.19	Příklad č. 19:		.....	89
3.20	Příklad č. 20:		.....	93
3.21	Příklad č. 21:		.....	97
3.22	Příklad č. 22:	 tlaková čára, konkordantní kabel	.....	99
3.23	Příklad č. 23:	 fáze výstavby	.....	104
3.24	Příklad č. 24:	 fáze výstavby	.....	113
3.25	Příklad č. 25:		.....	127
3.26	Příklad č. 26:		.....	130
3.27	Příklad č. 27:		.....	134
<b>4.</b>	<b>Přílohavá část – tabulky</b>			<b>143</b>
4.1	Deformace prostého nosníku konstantního průřezu			143
4.2	Deformace jednostranně vetknutého nosníku konstantního průřezu			144
4.3	Primární momenty a reakce oboustranně vetknutého nosníku			145
4.4	Primární momenty a reakce jednostranně vetknutého nosníku			146
4.5	Hodnoty integrálů $\bar{\delta} = \int M \cdot \bar{m} \cdot d\alpha$ u prutů konstantního průřezu			148
4.6	Pevnostní třídy betonů a jejich charakteristiky			150
4.7	Charakteristiky předpínací výztuže Drahtwerk Koln			151
4.8	Ukázka sortimentu firmy VSL			152
4.9	Ukázka sortimentu firmy FREYSSINET			162
<b>5.</b>	<b>Studijní prameny</b>			<b>169</b>
5.1	Seznam použitých zkratk			169
5.2	Seznam použité literatury			171
5.3	Seznam použitých webových odkazů			171

## 1. ÚVOD

### 1.1 CÍLE

Cílem tohoto studijního materiálu je seznámit čtenáře s problematikou řešení konstrukcí z předpjatého betonu. Na staticky určitých i neurčitých konstrukcích demonstrovat vliv předpětí. Poskytnout studentovi přehled o běžně dodávaném sortimentu předpínacích systému, včetně jeho průřezových a materiálových charakteristik. Možnost kontroly individuálně řešených zadání nejen v rámci cvičení, ale i při vypracování závěrečných Bakalářských a Diplomových prací.

### 1.2 POŽADOVANÉ ZNALOSTI

Sbírka příkladů z předpjatého betonu obsahuje úlohy řešené nejrůznějšími přístupy stavební mechaniky a statiky. Z toho důvodu je zapotřebí zvládnutí předmětů: BD01–Základy stavební mechaniky (řešení průběhu vnitřních sil), BD02–Pružnost a pevnost (průřezové charakteristiky, teorie namáhání prutů, výpočet napětí na prutu), BD03–Statika I (výpočet deformací nosníku pomocí Mohrovy analogie, Vereščaginova pravidla, Metody jednotkových sil, Metody třímomentových rovnic), BD04–Statika II (výpočet deformací nosníku pomocí Zjednodušené deformační metody). V textu jsou důležité vztahy stručně zopakovány, nemají však za úkol suplovat výuku uvedených předmětů. Při používání učebního textu je nezbytné, aby měl čtenář dostatečné znalosti týkající se probírané problematiky, protože mnoho chyb v řešení příkladů z předpjatého betonu je zapříčiněno právě neznalostí ve stavební mechanice. Při řešení se čtenář bude potýkat například s kombinací různých souřadných systémů přejímaných z různých oborů (souřadný systém příkladu přijatý řešitelem, systém paraboly přejetý z matematiky, systémy statických metod, silové nebo deformační). Pro správnou kombinaci jednotlivých výsledků je tedy dobré mít zkušenosti, tedy mít spočítán alespoň základní počet příkladů ze stavební mechaniky a statiky.

### 1.3 METODICKÝ NÁVOD NA PRÁCI S TEXTEM

Studijní materiál je rozdělen do dvou hlavních celků. Jedná se o teoretickou a praktickou část. Pro zvládnutí probírané problematiky je vhodné nejprve nastudovat základní teorii, na kterou bezprostředně navazuje výpočtová část sbírky. Samotné příklady jsou seřazeny od úplného základu a jejich náročnost postupem se zvyšuje. Z tohoto důvodu je vhodné úlohy řešit v uvedeném pořadí a v případě nejasností se vrátit k úvodní části, kde je pro každou z uvedených výpočetních metod uveden ilustrační příklad.

### 1.4 KLÍČOVÁ SLOVA

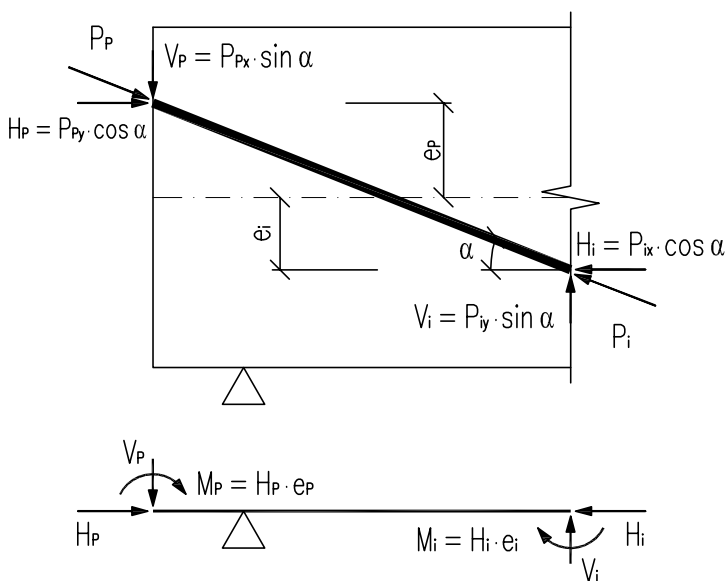
Předpětí, předpínací kabel, ekvivalentní účinky od předpětí, primární účinky, sekundární účinky, celkové účinky od předpětí, dekomprese

## 2. TEORETICKÁ ČÁST

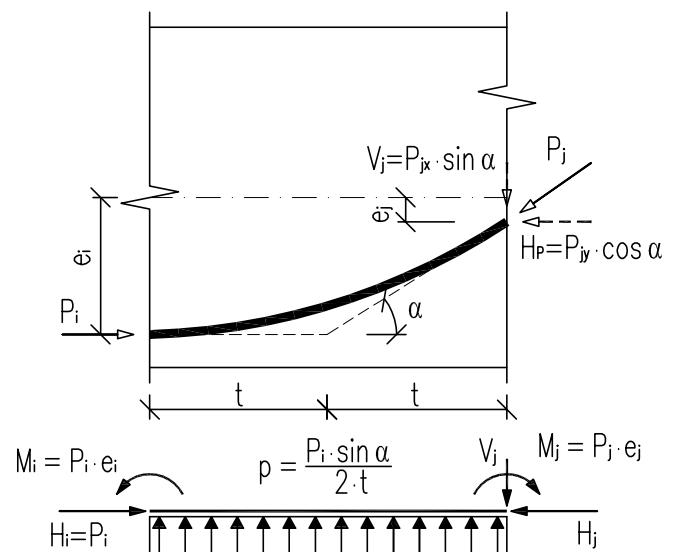
### 2.1 ÚČINKY PŘEDPĚTÍ NA KONSTRUKCI

Obecně každý předpínací kabel vyvoluje na konstrukci nejen silové účinky v místě kotvení, ale i v místech změny směru jeho vedení. V místech kotvení působí na prvek síly  $P_P$  (obr. 2.1a, 2.1b), jejichž směr je dán tečnou k dráze kabelu v místě kotvení. Změnu směru vedení kabelu lze provést pomocí zakřivení (obr. 2.1c) nebo zalomení kabelu (obr. 2.1d). Podle způsobu změny směru vedení vznikají na konstrukci buď radiální účinky – zakřivení kabelu, nebo silové účinky – zalomení kabelu. Dále vyvoluje předpínací kabel účinky na konstrukci v místě změny průřezu vyšetřované konstrukce. Při vyšetřování konstrukcí z předpjatého betonu lze uvažovat, že předpětí působí na konstrukci jako vnější zatížení, a to formou silových účinků – tzv. ekvivalentní účinky od předpětí.

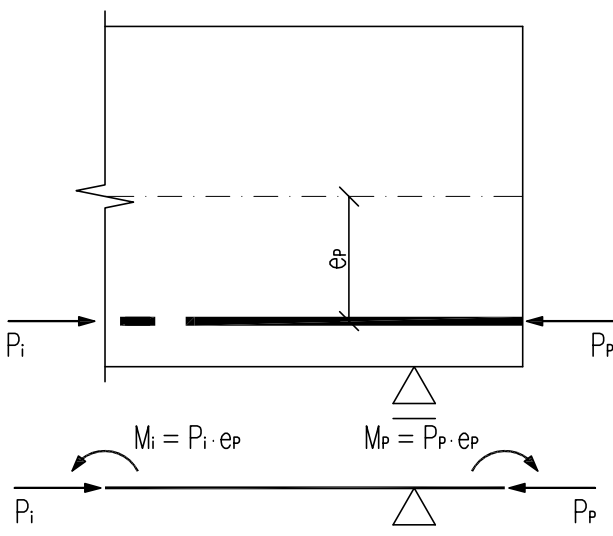
Obr. 2.1a – Silové působení kabelu v místě kotvení



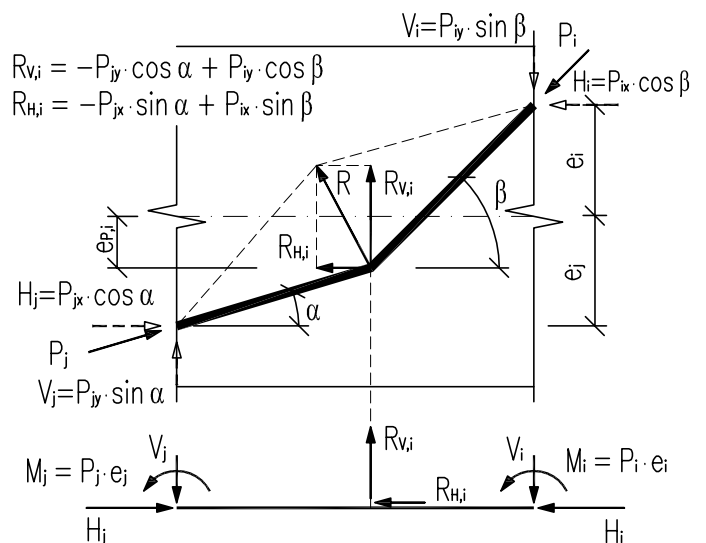
Obr. 2.1c – Silové působení kabelu v místě změny směru vedení – zakřivená část (kružnice, parabola)



Obr. 2.1b – Silové působení kabelu v místě kotvení



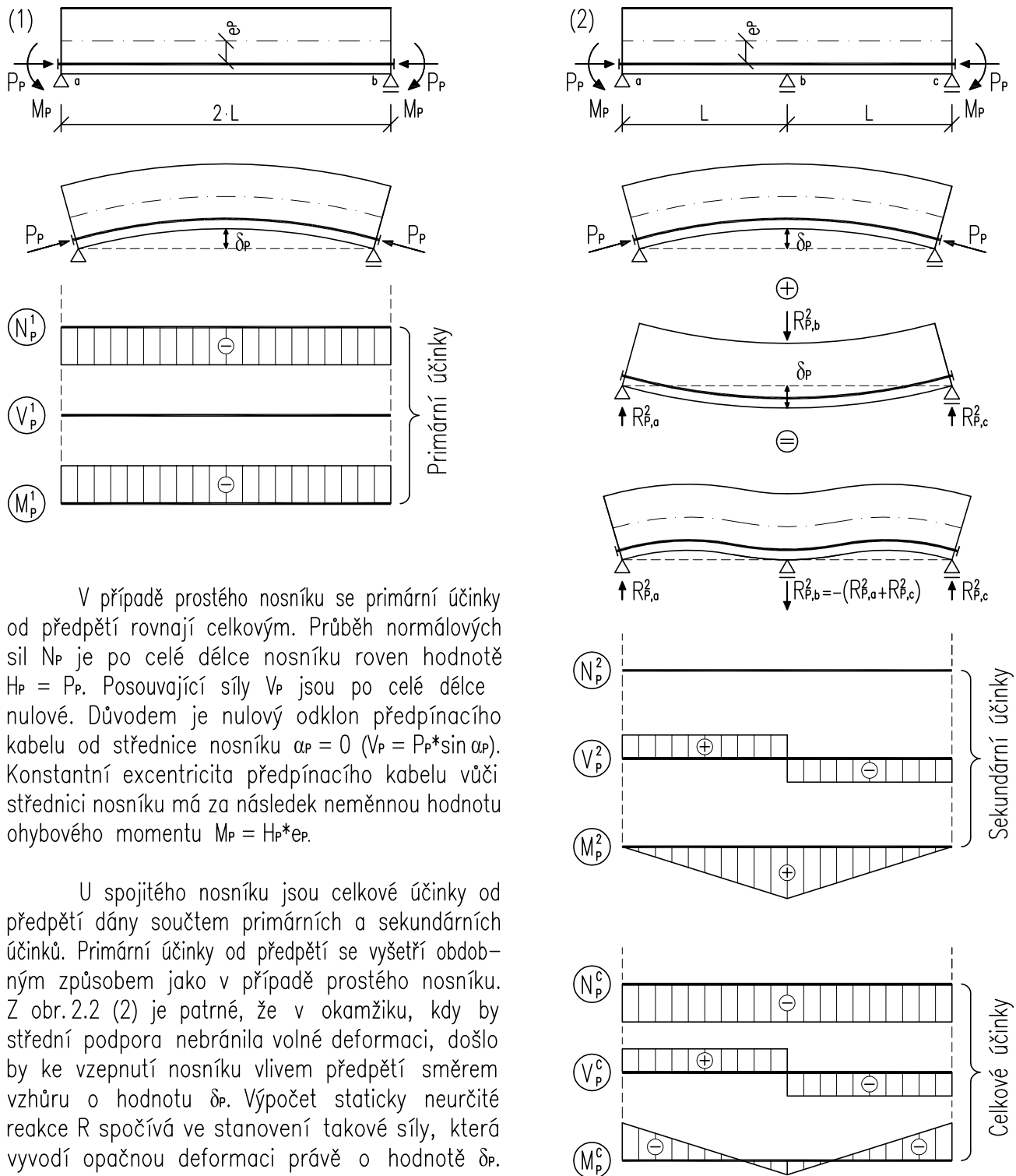
Obr. 2.1d – Silové působení kabelu v místě změny směru vedení – zalomená část



V případě staticky určitých konstrukcí, kde není bráněno volné deformaci (je možné posunutí resp. pootočení konstrukce), je toto silové působení v rovnováze. Rovnováha má za následek, že nedochází k vzniku podporových reakcí. Tyto silové účinky se nazývají "Primární účinky od předpětí". Naopak u konstrukcí staticky

neurčitých, kde je bráněno volné deformaci, vzniká tolik staticky neurčitých reakcí  $R$ , kolikrát je konstrukce staticky neurčitá. Staticky neurčité reakce poté vyvozují přidavné normálové síly, posouvající síly a ohybové momenty vyvozující "Sekundární účinky od předpětí". Jako příklad je uvedeno srovnání prostého nosníku a spojitého nosníku o dvou polích, nosníky jsou předepnuty shodně přímým kabelem (obr. 2.2). Prostý nosník je vytvořen ze spojitého odebráním střední podpory.

Obr. 2.2 – Účinky od předpětí – prostý nosník (1) a spojitý nosník o dvou polích (2)



V případě prostého nosníku se primární účinky od předpětí rovnají celkovým. Průběh normálových sil  $N_p$  je po celé délce nosníku roven hodnotě  $H_p = P_p$ . Posouvající síly  $V_p$  jsou po celé délce nulové. Důvodem je nulový odklon předpínacího kabelu od střednice nosníku  $\alpha_p = 0$  ( $V_p = P_p \cdot \sin \alpha_p$ ). Konstantní excentricita předpínacího kabelu vůči střednici nosníku má za následek neměnnou hodnotu ohybového momentu  $M_p = H_p \cdot e_p$ .

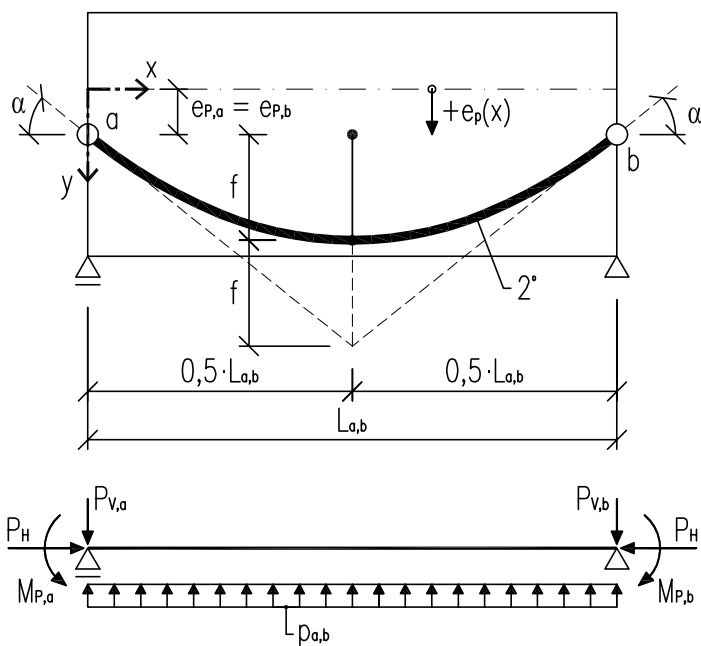
U spojitého nosníku jsou celkové účinky od předpětí dány součtem primárních a sekundárních účinků. Primární účinky od předpětí se vyšetří obdobným způsobem jako v případě prostého nosníku. Z obr. 2.2 (2) je patrné, že v okamžiku, kdy by střední podpora nebránila volné deformaci, došlo by ke vzepnutí nosníku vlivem předpětí směrem vzhůru o hodnotu  $\delta_p$ . Výpočet staticky neurčité reakce  $R$  spočívá ve stanovení takové síly, která vyvodí opačnou deformaci právě o hodnotě  $\delta_p$ . V další části textu budou prezentovány různé přístupy určení sekundárních účinků od předpětí jako např. Mohrova analogie, metoda jednotkový sil, metoda třímomentových rovnic aj.

## 2.2 EKVIVALENTNÍ ZATÍŽENÍ OD PARABOLICKÉHO KABELU

Ekvivalentní účinky od parabolického kabelu budou pro názornost demonstrovány na staticky určitém nosníku předepnutém parabolickým kabelem o délce  $L$  a vzepětí  $f$ .

V prvním případě jde o symetrický předpínací kabel, kde se koncové excentricity sobě rovnají  $e_{P,a} = e_{P,b}$ . Z obecné funkce paraboly lze přímo získat excentricitu v libovolném bodě kabelu v intervalu pro  $x \in \langle 0, L \rangle$ . Znaménko koncové excentricity  $e_{P,a}$  v obecné funkci paraboly je nutné zadávat s přihlédnutím ke znaménkové konvenci používané při řešení předpjatých konstrukcí, tedy kladné pro hodnoty pod střednicovou osou nosníku. Pro stanovení ekvivalentního zatížení od parabolického kabelu je nutné určit úhel  $\alpha$ . Jedná se o úhel, který svírá tečna parabolického kabelu se střednicovou osou nosníku v libovolném místě  $x$ . V našem případě jde o koncové body  $(a, b)$ , kde působí horizontální složka předpínací síly  $P_H = P$  a vertikální složka  $P_V$ , případně moment vyplývající z excentricity koncového bodu. Tangentu úhlu  $\alpha$  lze vyjádřit pomocí směrnice obecné funkce paraboly (první derivace funkce) jako  $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$ . Koncové silové účinky  $P_H$  a  $P_V$  lze poté vyjádřit pomocí goniometrických funkcí sinus a cosinus jako v případě lomeného kabelu viz. obrázek 2.3. Při vyšetřování ekvivalentních účinků od parabolického kabelu dochází často ke zjednodušení, kdy se uvažuje konstantní horizontální síla  $P_H$  po celé délce kabelu. Tento předpoklad je možné uvažovat tehdy, kdy je jsou úhly  $\alpha$  velmi malé (do  $15^\circ$ ), toto platí je-li splněna podmínka, že vzepětí paraboly  $f$  ku délce paraboly  $L$  maximálně roven  $1/15$ . Splněním této podmínky je možné nahradit skutečné radiální působení kabelu rovnoměrným zatížením  $p$ . Rovnoměrné zatížení  $p$  lze vyjádřit dosazením obecné funkce paraboly (2.1) do vztahu pro výpočet ohybového momentu od předpětí  $M_{P,x}$  (2.8). Výsledný vztah pro rovnoměrné zatížení je uveden v rovnici (2.3).

Obr. 2.3 – Ekvivalentní zatížení od symetrického předpínacího kabelu :  $e_{P,a} = e_{P,b}$



$\alpha$  ... Odklon tečny předpínacího kabelu od střednice nosníku ve vyšetřovaném místě  $x$ .

**Obecná funkce paraboly:**

$$y(x) = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f}{L} \cdot x + e_{P,a} \quad (2.1)$$

**Směrnice funkce paraboly:**

$$y'(x) = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} \quad (2.2)$$

**Ekvivalentní zatížení:**

$$\bullet \quad p_{a,b} = P_H \cdot \frac{8 \cdot f}{L_{a,b}^2}, \text{ nebo: } p_{a,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} \quad (2.3)$$

$$\bullet \quad P_H = P = \text{konstantní, jestliže: } \frac{f}{L} \leq \frac{1}{15} \quad (2.4)$$

$$\text{jinak: } P_H = P \cdot \cos \alpha \quad (2.5)$$

$$\bullet \quad P_{V,a} = P_{V,b} = P \cdot \sin \alpha \quad (2.6)$$

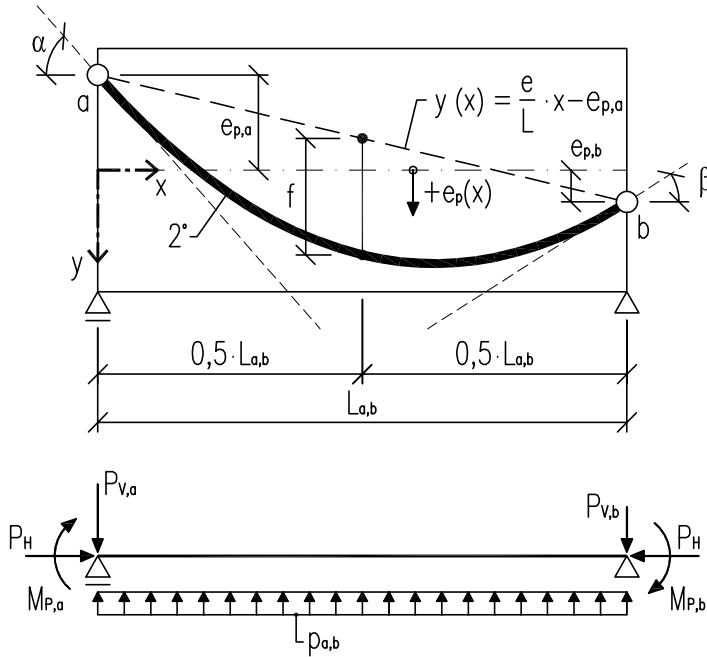
$$\alpha = \operatorname{arctg} y'(x) \quad (2.7)$$

$$\bullet \quad M_{P,x} = P_H \cdot e_{P,x} \quad \dots \quad e_{P,x} = y(x) \quad (2.8)$$

V druhém případě se jedná o nesymetrický předpínací kabel. Zde platí, že koncové excentricity jsou různé  $e_a \neq e_b$ . Tato skutečnost má za následek natočení paraboly o hodnotu  $e$ , jenž je dána součtem absolutních hodnot  $e_{P,a}$  a  $e_{P,b}$ . Natočení paraboly se rovněž projeví i v obecné funkci paraboly, kde v lineárním členu přibude hodnota  $e$  v čitateli zlomku. Následující postup stanovení ekvivalentního zatížení je obdobný jako v předchozím případě, kdy je nejprve nutné určit sklony tečen kabelů v koncových bodech paraboly  $\alpha$  a  $\beta$ . Po vyšetření obou sklonů tečen kabelu  $\alpha$  a  $\beta$  je možné přistoupit k výpočtu vertikálních koncových sil  $P_{V,a}$  a  $P_{V,b}$  a rovnoměrného zatížení  $p$ . Stále platí předpoklad, že  $P_H = P$ .



Obr. 2.4 – Ekvivalentní zatížení od nesymetrického předpínacího kabelu :  $e_{p,a} \neq e_{p,b}$



Obecná funkce paraboly:

$$y(x) = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{(4 \cdot f + e)}{L} \cdot x + e_{p,a} \quad (2.9)$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y(x)' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \quad (2.10)$$

$$e = |e_{p,a}| + |e_{p,b}|$$

Ekvivalentní zatížení:

$$\bullet \quad p_{a,b} = P_H \cdot \frac{8 \cdot f}{L_{a,b}^2}, \text{ nebo: } p_{a,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} \quad (2.3)$$

$$\bullet \quad P_H = P = \text{konstantní, jestliže: } \frac{f}{L} \leq \frac{1}{15} \quad (2.4)$$

$$\bullet \quad P_{V,a} = P \cdot \sin \alpha \quad (2.5)$$

$$\bullet \quad P_{V,b} = P \cdot \sin \beta \quad (2.11)$$

$\alpha, \beta \dots$  Odklon tečny předpínacího kabelu od střednice nosníku ve vyšetřovaném místě  $x$ .

$$\alpha = \arctg y(x = a)' \quad (2.12)$$

$$\beta = \arctg y(x = b)' \quad (2.13)$$

$$\bullet \quad M_{P,x} = P_H \cdot e_{p,x} \quad \dots \quad e_{p,x} = y(x) \quad (2.8)$$

**Poznámka:** Záporná znaménka excentricit a vzezření parabol v zadání praktických příkladů respektují znaménkovou konvenci používanou při řešení konstrukcí z předpjatého betonu.

### 2.3 KONKORDANTNÍ KABEL

Na každé staticky určité, či neurčité konstrukci je možné nalézt "tlakovou čáru". Jedná se o působíště předpínací síly. U staticky určitých konstrukcí je poloha tlakové čáry totožná s polohou těžiště předpínacího kabelu. U staticky neurčitých konstrukcí dochází vlivem sekundárních účinků k posunutí tlakové čáry o vzdálenost  $v_P(x)$ . Tento posun se dá vyjádřit jako podíl sekundárního momentu ku předpínací síle:

$$v_P(x) = \frac{M_P^2(x)}{P_H} \quad (2.14)$$

Dosažením posunu  $v_P(x)$  do obecného vztahu pro výpočet celkového momentu od předpětí  $M_P^{\Sigma}$ :

$$M_P^{\Sigma} = M_P^1 + M_P^2 \quad (2.15)$$

a rozšířením o obecný vztah pro výpočet primárního momentu  $M_P^1$ :

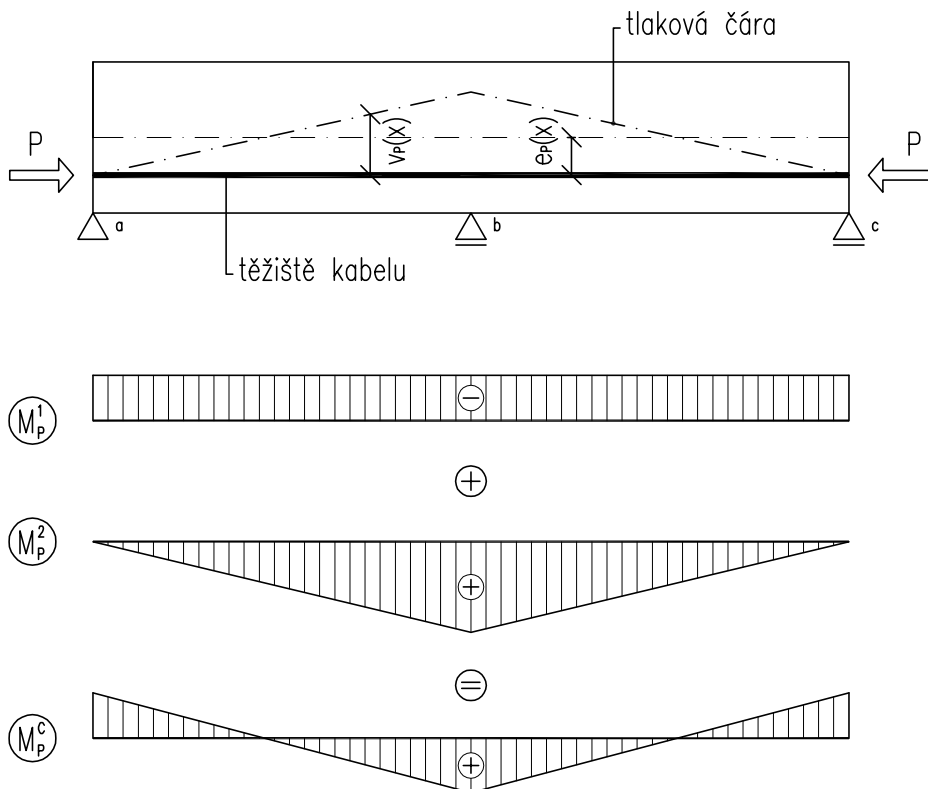
$$M_P^1(x) = P_H \cdot e_P(x) \quad (2.8)$$

kde  $e_P(x)$  je excentricita kabelu, získáme vztah pro výpočet celkového momentu od předpětí:

$$M_P^{\Sigma} = P_H \cdot (e_P + v_P) \quad (2.16)$$

Pokud se těžiště kabelu blíží geometrii tlakové čáry ( $v_P$  se zmenšuje), dochází ke zmenšení sekundárních momentů od předpětí. Navrhne-li předpínací kabel, jehož trasování bude totožné s průběhem tlakové čáry, pak takovýto kabel nevyvolá sekundární momenty  $M_P^2$ . Takový kabel nazýváme konkordantní. Konkordantní kabel rovněž nevyvolá staticky neurčité reakce, tedy deformace konstrukce od předpětí nezpůsobí průhyb nad podporami. Z toho též vyplývá, že každý kabel, kterým předepneme staticky určitou konstrukci, je konkordantní.

Obr. 2.5 – Poloha tlakové čáry pro spojitý nosník o dvou polích



## 2.4 Staticky neurčitě účinky předpětí

Jak již bylo v předchozí části textu uvedeno účinky předpětí na konstrukci lze rozdělit na primární a sekundární. Primární účinky lze vyšetřit přímo z průběhu horizontální a vertikální složky předpínací síly. Postup výpočtu je patrný z obrázku 2.1a–2.1d. Ohybový moment je rovněž možné určit přímo definováním polohy předpínací kabelu vůči střednicové ose nosníku, vyjadřující excentricitu kabelu  $e_{p,x}$ .

Sekundární účinky předpětí vznikají na konstrukci v důsledku zabránění volné deformace vlivem vnějších vazeb (podpor). Na obrázku 2.2 (2) byl demonstrován vliv staticky neurčité reakce na výslednou deformaci konstrukce a vyzozování přidavných vnitřních sil.

Při dalších výpočtech budeme pro přehlednost označovat jednotlivé účinky horním indexem: index C označuje celkové účinky, 1 primární účinky a 2 sekundární účinky předpětí. Součtem primárních a sekundárních účinků získáme účinky celkové.

$$N_p^c = N_p^1 + N_p^2 \quad (2.17)$$

$$V_p^c = V_p^1 + V_p^2 \quad (2.18)$$

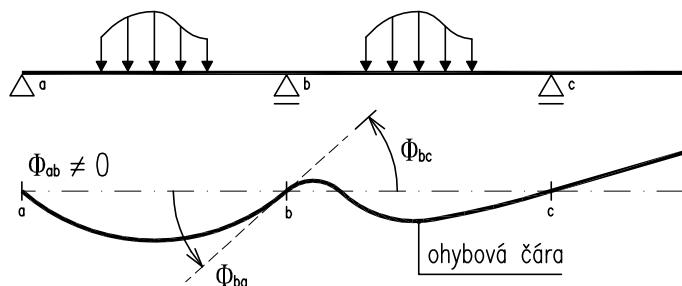
$$M_p^c = M_p^1 + M_p^2 \quad (2.19)$$

Získání primárních účinků je poměrně jednoduché (viz. 2.2). Pro určení sekundárních účinků je třeba vyšetřit staticky neurčitou konstrukci. Podle stupně statické neurčitosti jsou následně dopočítány staticky neurčité reakce bránící volné deformaci konstrukce. Tuto část výpočtu je možné provádět nejrůznějšími přístupy stavební mechaniky. V další části textu budou podrobněji představeny některé z nich, modifikované právě pro výpočet staticky neurčitých veličin. Jedná se zejména o: Metodu třímomentových rovnic, Vereščaginovo pravidlo, Metodu jednotkových sil, Mohrova analogie a zjednodušenou Deformační metodu.

## 2.4.1 METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

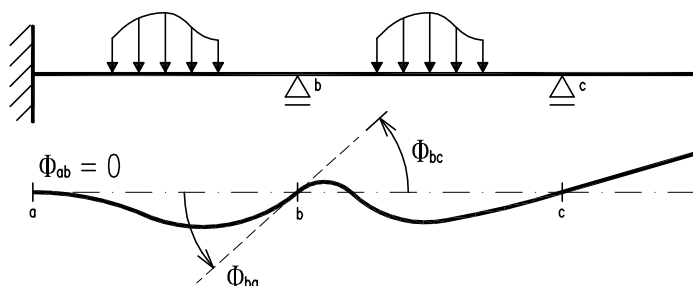
Jedná se o téměř univerzální výpočtovou metodu, která vychází ze silové metody. Při výpočtu jsou za neznámé veličiny voleny momenty ve vetknutí popřípadě nadpodporové momenty spojitého nosníku. Metoda třímomentových rovnic vychází z předpokladu, že u vnitřní podpory nesmí vznikat zlom (tzn. sklon tečen k ohybové čáře zleva i zprava je stejný – obr. 2.6). Druhým předpokladem je že pootočení ve vetknutí je nulové viz. obrázek 2.7. Postup výpočtu spočívá v rozdělení spojitého nosníku na tzv. základní soustavu. Základní soustavu tvoří prosté nosníky, jejichž počet odpovídá počtu polí původního nosníku. Pro každou sousední dvojici prostých nosníků se sestaví deformační podmínka a vyřeší se hledaná veličina – podporové momenty.

obr. 2.6 – Prostě podepřený konec spojitého nosníku



$$\Phi_{ba} = -\Phi_{bc} \quad (2.20)$$

obr. 2.7 – Vetknutý konec spojitého nosníku



$$\Phi_{ab} = 0 \quad (2.21)$$

Sklony tečen k ohybové čáře u vnitřní podpory lze dále rozepsat:

$$\Phi_{ba} = M_a \cdot \beta_{ba} + M_b \cdot \alpha_{ba} + \varphi_{ba} \quad (2.22)$$

$$\Phi_{bc} = M_b \cdot \alpha_{bc} + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{bc} \quad (2.23)$$

Z podmínky spojitosti u vnitřní podpory  $\Phi_{ba} = -\Phi_{bc}$  získáme pro dvě sousední pole třímomentovou rovnici:

$$M_a \cdot \beta_{ba} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0 \quad (2.24)$$

Kde:  $M_a, M_b, M_c$  ... neznámé podporové momenty  
 $\varphi_{ba}, \varphi_{bc}$  ... pootočení podporového průřezu od vnějšího zatížení (v našem případě pro bod b), pro běžné typy zatížení jsou hodnoty tabelovány viz. přílohy část 4.  
 $\alpha_{ba}, \beta_{ba}$  ... pootočení podporového průřezu od vyšetřovaných momentů  $M_a, M_b, M_c$

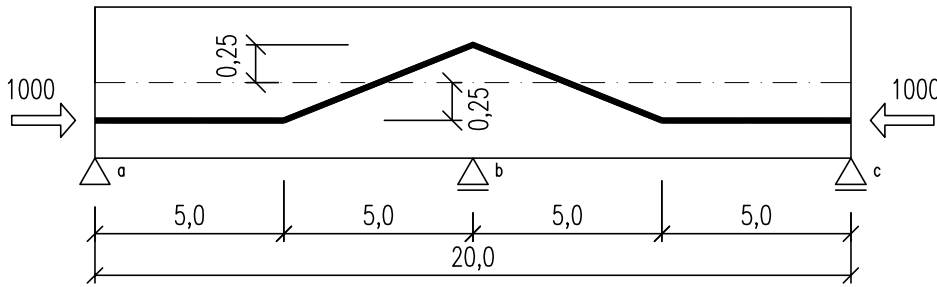
$$\alpha_{ba} = \frac{L_{ba}}{3 \cdot E \cdot I_y} \quad \beta_{ba} = \frac{L_{ba}}{6 \cdot E \cdot I_y} \quad (2.25)$$

$E$  ... modul pružnosti materiálu nosníku  
 $I_y$  ... momenty setrvačnosti průřezu nosníku

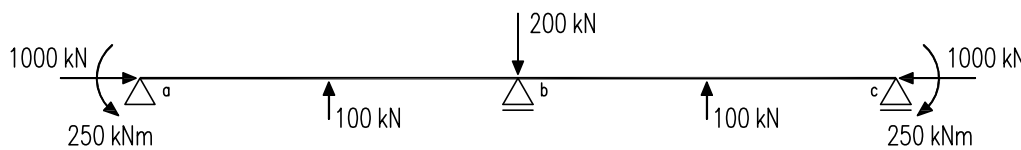
**Poznámka:** Při výpočtech předpjatých konstrukcí, jejichž průřez a materiál je po délce konstantní, lze součin ve jmenovateli  $E \cdot I$  uvažovat jako konstantu.

### Ilustrativní příklad č. 1

Pomocí metody třímomentových rovnic stanovte sekundární účinky od předpětí pro spojitý nosník o dvou polích. Uvažujte konstantní průřezové i materiálové charakteristiky.



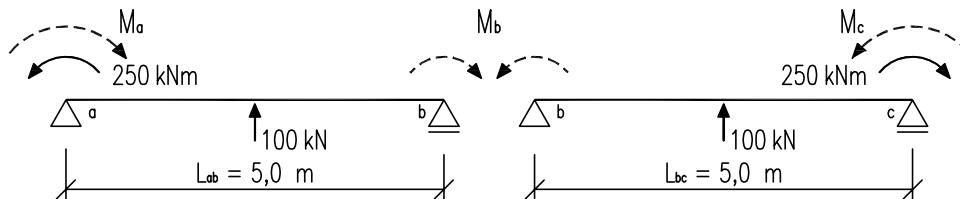
... Základní schéma nosníku



... Statické schéma nosníku

**Poznámka:** Při řešení spojitého nosníku pomocí třímomentových rovnic je uvažováno zatížení vyvolující pootočení podporových průřezů. Z tohoto důvodu nebudou ve výpočtu zahrnuty síly působící v podporách. V našem případě jde o osovou sílu 1000 kN a podporovou sílu v bodě b 200 kN.

Ekvivalentní účinky od předpětí jsou uvažovány jako vnější zatížení.

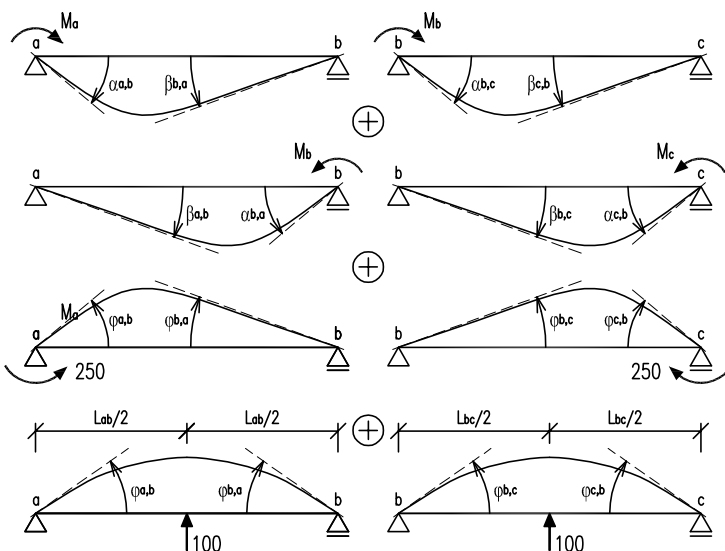


... Základní soustava prostých nosníků

$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0 \quad \dots \text{obecná třímomentová rovnice}$$

Vstupní předklady výpočtu:

- v bodech a, c je prosté podepření nosníku  $\Rightarrow M_a = M_c = 0$
- průřez má konstantní průřezové a materiálové charakteristiky po celé délce  $\Rightarrow E \cdot I_y = \text{konst.}$



$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{10}{3}$$

$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{10}{6}$$

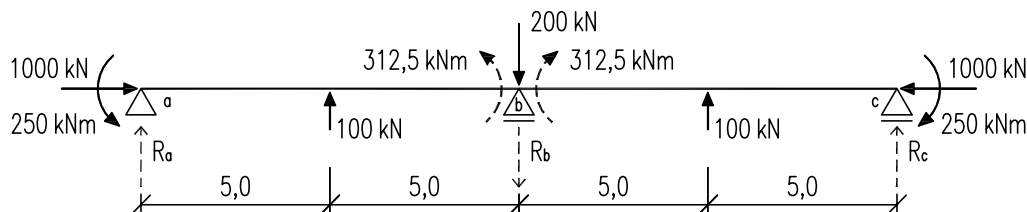
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{M \cdot L_{ab}}{6 \cdot E \cdot I_y} = -\frac{250 \cdot 10}{6} = \underline{\underline{-416,67}}$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{F \cdot L_{ab}^2}{16 \cdot E \cdot I_y} = -\frac{100 \cdot 10^2}{16} = \underline{\underline{-625}}$$

$$M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \Sigma \varphi_{ba} + \Sigma \varphi_{bc} = 0 \quad \dots \text{upravená třímomentová rovnice } (M_a = M_c)$$

$$M_b \cdot \left( \frac{10}{3} + \frac{10}{3} \right) + 2 \cdot [(-416,67) + (-625)] = 0 \quad \dots \quad M_b = M_{\text{p},b} = \underline{312,5 \text{ kNm}}$$

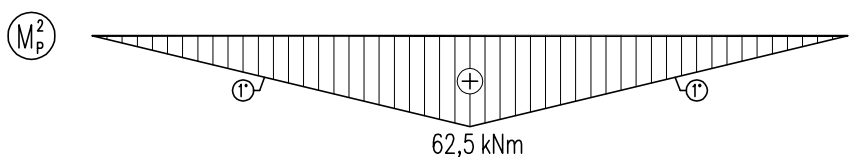
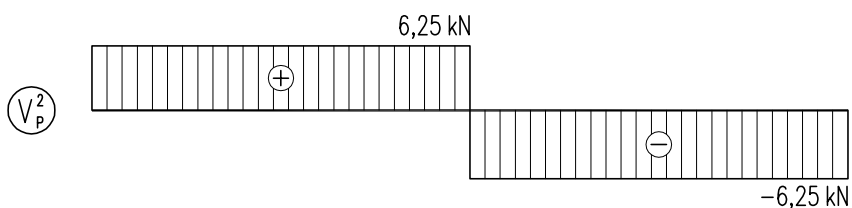
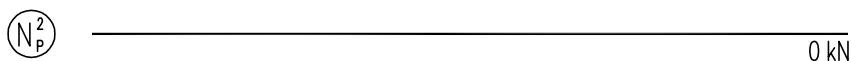
**Poznámka:** Ve střední podpoře B působí vedle podprovoého momentu  $M_b$  i primární moment od předpětí  $M_{\text{p},b}$ . V okamžiku, kdy tento moment nezahrneme do třímomentových rovnic jako vnější zatížení, tak získáme celkový moment od předpětí  $M_{\text{p},b}$ . Požadovaný sekundární moment od předpětí  $M_{\text{p},b}$  získáme odečtením primárního momentu  $M_{\text{p},b}$  od celkového.



$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot 10 - 250 + 100 \cdot 5,0 - 312,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = R_c = \underline{6,25 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: 6,25 + 100 - R_b + 100 - 6,25 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{12,5 \text{ kN}}$$

### Průběh vnitřních sil – sekundární účinky od předpětí



**Závěr:** Sekundární účinky od předpětí vznikají v důsledku zabránění volné deformace nosníku. Ve směru osy nosníku je možné posunutí vlivem předpínací síly, proto je průběh normálových sil roven nule. Kolmo na střednicovou osu nosníku brání staticky neurčitá reakce  $R_b$  volné deformaci, proto je průběh posouvajících sil na nosníku po částech konstantní o velikosti  $\pm 0,5 \cdot R_b$ . Sekundární moment od předpětí vzniká v důsledku působení staticky neurčité reakce  $R_b$ . Působení osamělé má za následek lineární průběh ohybových momentu s extrémem ve střední podpoře b.

## 2.4.2 VEREŠČAGINOVO PRAVIDLO

Vereščaginovo pravidlo je zjednodušená metoda pro výpočet deformací převážně ohýbaných nosníků. Výpočet vychází z obecného Maxwellova–Mohrova vztahu (2.26), kde není přihlédnuto k deformačním zatížením (vliv teploty a popuštění podpor). Dalším zjednodušením této metody je předpoklad konstantních průřezových i materiálových charakteristik ( $E \cdot I = \text{konstantní}$ ).

$$\delta = \int_0^l \frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} dl + \int_0^l \kappa \cdot \frac{V \cdot \bar{V}}{G \cdot A} dl + \int_0^l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dl + \int_0^l \bar{N} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_0 \cdot dl + \int_0^l \bar{M} \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t_1}{h} dl - \Sigma(\bar{R}_x \cdot u_r + \bar{R}_z \cdot w_r + \bar{M}_r \cdot \varphi_r) \quad (2.26)$$

Uvažováním pouze ohybového namáhání se zanedbáním vlivů deformačního zatížení a konstantními charakteristikami lze Maxwellův–Mohrovův vztah zjednodušit:

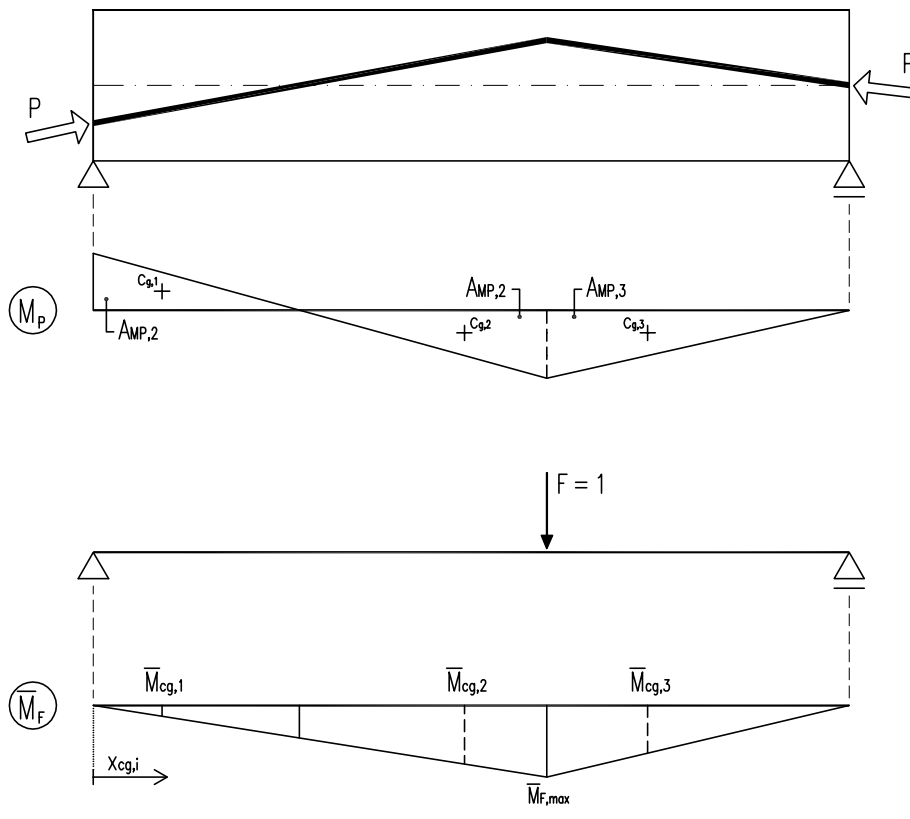
$$\bar{\delta} = \int_0^l M \cdot \bar{M} \cdot dl \quad (2.27)$$

Při použití Vereščaginova pravidla musí dále platit, že  $M(x)$  je libovolná spojitá hladká funkce a  $\bar{M}(x)$  lineární od jednotkového zatížení ( $F = 1, M = 1$ ), potom platí:

$$\bar{\delta} = \int_0^l M \cdot \bar{M} \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{M,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad (2.28)$$

Slovní vyjádření vztahu lze formulovat takto: Hodnota integrálu je rovna součinu obsahu momentového obrazce spojitě hladké funkce a pořadnice u lineární funkce v místě těžiště spojitě hladké funkce (viz. obr. 2.8) Tento vztah je možné aplikovat i zbylé vnitřní síly: normálové a posouvající.

obr. 2.8 – Vereščaginovo pravidlo, stanovení průhybu kabelu v místě zalomení kabelu



- Základní schéma nosníku: Prostý nosníku předepnutý jedenkrát zalomeným kabelem
- Hladká spojitá funkce: Primární účinky od předpětí – momentový obrazec  $M_P(x)$
- Virtuální nosník: Zatížení jednotkovou silou  $F$  v místě vyšetřované deformace
- Lineární funkce: – momentový obrazec  $M_F$  od jednotkové síly

Pro správnou interpretaci Vereščaginova pravidla při řešení deformace nosníku je nutné zohlednit znaménka hladké spojitě funkce  $M(x)$ . Pro názornost bude obecně vyřešen příklad z obrázku č. 2.8:

$$\delta_P = \int_0^L M_P \cdot \bar{M}_F \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{MP,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} = -A_{MP,1} \cdot \bar{M}_{cg,1} + A_{MP,2} \cdot \bar{M}_{cg,2} + A_{MP,3} \cdot \bar{M}_{cg,3} \quad (2.29)$$

Při řešení sekundárních účinků od předpětí na konstrukci pomocí Vereščaginova pravidla je nutné sestavit základní deformační podmínku:

$$\delta_P = R \cdot \delta_1 \quad (2.30)$$

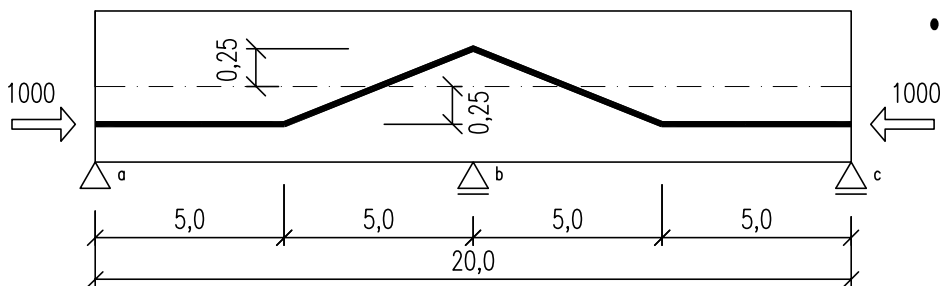
- Kde:  $\delta_P$  ... deformace konstrukce od předpětí (vodorovný posun, svislý posun, natočení) – po odstranění příslušného počtu vnějších vazeb (podpor) a vytvoření základní soustavy (staticky určitá konstrukce)  
 $\delta_1$  ... deformace konstrukce od virtuální jednotkové síly působící v místě staticky neurčitě reakce R na základní soustavě  
 R ... staticky neurčitá reakce bránící volné deformaci konstrukce

Deformace konstrukce od přepětí, působící jako vnější zatížení, a jednotkové virtuální síly se stanoví dle obecného postupu viz. obrázek 2.8. Staticky neurčitá reakce ( $R_x, R_z, M_y$ ) se poté stanoví jako podíl  $\delta_P/\delta_1$ .

## Ilustrativní příklad č. 2

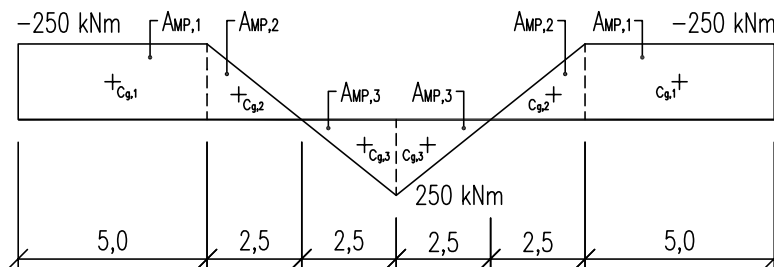
Pomocí Vereščaginova pravidla stanovte sekundární účinky od předpětí pro spojitý nosník o dvou polích. Uvažujte konstantní průřezové i materiálové charakteristiky.

- Výpočet deformací konstrukce od předpětí:  $\delta_P = \int_0^L M_P \cdot \bar{M}_F \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{MP,i} \cdot \bar{M}_{cg,i}$



- Základní schéma nosníku

### 1. Vykreslení průběhu ohybových momentů od primárních účinků předpětí $M^p(x)$



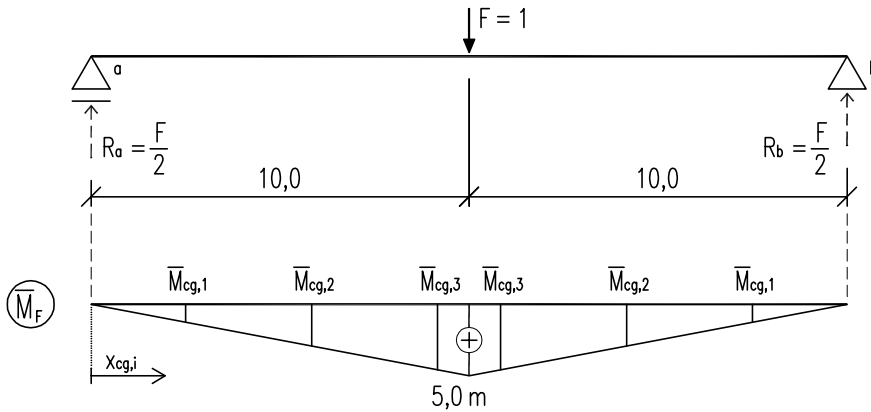
- Hladká spojitá funkce:  
Primární účinky od předpětí  
– momentový obrazec  $M^p(x)$

$$A_{MP,1} = 5,0 \cdot (-250) = \underline{-1250 \text{ kNm}^2}$$

$$A_{MP,2} = 0,5 \cdot 2,5 \cdot (-250) = \underline{-312,5 \text{ kNm}^2}$$

$$A_{MP,3} = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 250 = \underline{312,5 \text{ kNm}^2}$$

2. Vytvoření základní staticky určité soustavy, zatížené jednotkovou silou v místě odstraněné vnější vazby



- Základní staticky určitá soustava: virtuální nosník zatížený jednotkovou silou  $F$  v místě odstraněné vazby.

- Lineární funkce: – momentový obrazec  $\bar{M}_F$

$$\bar{M}_F = R_a \cdot 10,0 = \frac{1,0}{2} \cdot 10,0 = \underline{5,0 \text{ m}}$$

3. Stanovení pořadnice u lineární funkce v těžišti obrazce hladké spojitě funkce – momentového obrazce  $M_P(x)$

$$\bar{M}_{cg,i} = \frac{\bar{M}_F}{0,5 \cdot L_{a,b}} \cdot x_{cg,i} : \quad \bar{M}_{cg,1} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5,0\right) = \underline{1,25 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,2} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(5,0 + \frac{1}{3} \cdot 2,5\right) = \underline{2,92 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,3} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(5,0 + 2,5 + \frac{2}{3} \cdot 2,5\right) = \underline{4,58 \text{ m}}$$

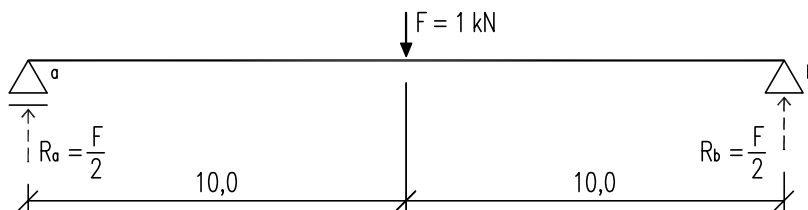
$$\delta = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L M \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{M,i} \cdot \bar{M}_{cg,i}$$

$\frac{\text{kNm}^3}{(\text{kN/m}^2) \cdot \text{m}^4}$

4. Výpočet svislé deformace od předpětí

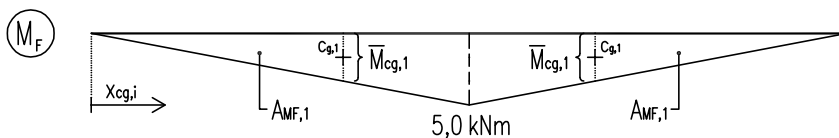
$$\delta_P = \int_0^L M_P \cdot \bar{M}_F \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{M_P,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} = 2 \cdot [(-1250) \cdot 1,25 + (-312,5) \cdot 2,92 + 312,5 \cdot 4,58] = \underline{-2087,5 \text{ m}}$$

- Výpočet deformací konstrukce od jednotkové síly  $F$  působící na základní soustavě:  $\delta_F = \int_0^L M_F \cdot \bar{M}_F \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{M_F,i} \cdot \bar{M}_{cg,i}$



- Základní staticky určitá soustava: nosník zatížený jednotkovou silou  $F$  v místě odstraněné vazby

1. Vykreslení průběhu ohybových momentů od jednotkové síly  $F$ :  $M_F(x)$



- Hladká spojitá funkce: – momentový obrazec  $M_F(x)$

$$M_F = R_a \cdot 10,0 = \frac{1,0}{2} \cdot 10,0 = \underline{5,0 \text{ m}}$$

$$A_{M_F,1} = 0,5 \cdot 10,0 \cdot 5,0 = \underline{25 \text{ kNm}^2}$$

**Poznámka:** Průběh ohybových momentů je pro základní soustavu (hladká spojitá funkce) a virtuální nosník (lineární funkce) stejný  $M_F = \bar{M}_F$ . V obou případech je nosník zatížen jednotkovou silou, proto je možné odečíst pořadnici u lineární funkce v těžišti obrazce hladké spojitě funkce přímo.



2. Stanovení pořadnice u lineární funkce v těžišti obrazce hladké spojitě funkce – momentového obrazce  $M_F(x)$

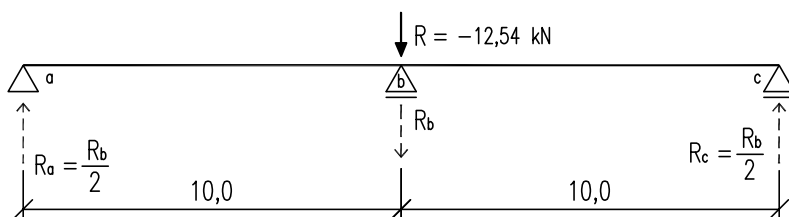
$$\bar{M}_{cg,i} = \frac{\bar{M}_F}{0,5 \cdot L_{a,b}} \cdot x_{cg,i} : \quad \bar{M}_{cg,1} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10,0\right) = \underline{3,33 \text{ m}}$$

3. Výpočet svislé deformace od jednotkové síly  $F$

$$\delta_1 = \int_0^l M_F \cdot \bar{M}_F \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{M_F,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} = 2 \cdot (25 \cdot 3,33) = \underline{166,5 \text{ m} / \text{kN}}$$

• Výpočet staticky neurčitě reakce  $R$  bránící volné deformaci nosníku:

$$\delta_P = R \cdot \delta_1 \Rightarrow R = \frac{\delta_P}{\delta_1} = \frac{(-2087,5)}{166,5} = \underline{-12,54 \text{ kN}}$$

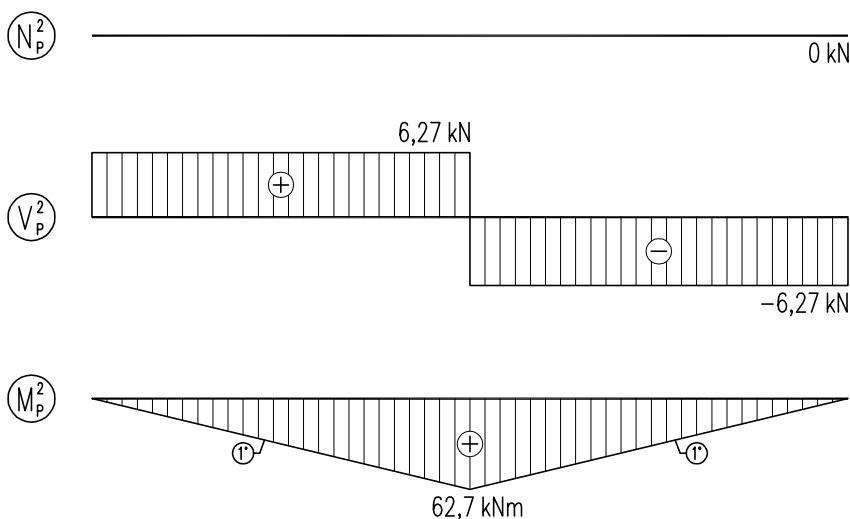


$$R_b = R = \underline{-12,54 \text{ kNm}}$$

$$R_a = R_c = -\frac{R_b}{2} = -\frac{-12,54}{2} = \underline{6,27 \text{ kN}}$$

**Poznámka:** Staticky neurčitá reakce stanovená na základě deformační rovnice (6.10) vyjadřuje sílu, která je nutná pro vyvození stejné velké deformace, jako vzniká působením primárních účinků od předpětí (má souhlasný směr). Skutečná podporová reakce  $R_b$ , bránící volné deformaci má stejnou velikost avšak je opačně orientovaná.

Průběh vnitřních sil – sekundární účinky od předpětí



$$N_p^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$V_{p,a}^2 = V_{p,b}^2 = R_a = \underline{6,27 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b}^2 = V_{p,b}^2 + R_b = 6,27 - 12,54$$

$$V_{p,b}^2 = V_{p,c}^2 = \underline{-6,27 \text{ kN}}$$

$$M_{p,a}^2 = M_{p,c}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b}^2 = R_a \cdot L_{a,b} = 6,27 \cdot 10 = \underline{62,7 \text{ kNm}}$$

**Závěr:** Použití Vereščaginova pravidla pro stanovení sekundárních účinků od předpětí je možné při splnění okrajových podmínek vyplývajících z požadavků této metody. Použití je vhodné zejména v případech, konstantního popřípadě lineárního průběhu vnitřních sil, kdy je možné přímo stanovit plochy obrazců  $M_P(x)$ ,  $V_P(x)$ ,  $N_P(x)$ . V případě parabolicky trasovaného kabelu dochází k problematickému a časově náročnějšímu stanovení plochy momentového obrazce a definováním polohy jejího těžiště. V těchto případech je vhodné použití spíše metody třímomentových rovnic.

### 2.4.3 METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

Metoda jednotkových sil slouží pro výpočet diskretní hodnoty deformace  $u_x, u_z$  a pootočení  $\varphi_y$ . Při výpočtu jsou vyšetřovány dva zatěžovací stavy, stav skutečný a virtuální. V prvním případě je konstrukce zatížena vnějším zatížením vyvolující posun resp. pootočení. Vnější zatížení můžeme uvažovat buď silové ( $F, M, q$ , apod.), nebo deformační (změna teploty nebo popuštění podpor). V druhém zatěžovacím stavu na konstrukci působí virtuální jednotková síla  $F = 1$  resp. virtuální ohybový moment  $M = 1$  působící ve směru hledaného posunutí resp. natočení. Výpočet je vychází z obecného Maxwellova–Mohrova vztahu:

$$\delta = \int_0^l \frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} dl + \int_0^l \kappa \cdot \frac{V \cdot \bar{V}}{G \cdot A} dl + \int_0^l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dl + \int_0^l \bar{N} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_0 \cdot dl + \int_0^l \bar{M} \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t_1}{h} dl - \Sigma(\bar{R}_x \cdot u_r + \bar{R}_z \cdot w_r + \bar{M}_r \cdot \varphi_r) \quad (2.26)$$

Výpočtová metoda je obdobně jako Vereščaginovo pravidlo velice univerzální. Používá se zejména při výpočtu sekundárních účinků od předpětí vyvozených normálovými silami na oboustranně vetknutém nosníku. Při uvažování pouze osového namáhání a zanedbáním vlivů deformačního zatížení lze Maxwellův–Mohrovův vztah zjednodušit:

$$\delta = \int_0^l N \cdot \bar{N} \cdot dl \quad (2.31)$$

V uvedeném vztahu je zahrnut předpoklad konstantních průřezových i materiálových charakteristik po délce prutu ( $E \cdot A = \text{konst.}$ ). Je-li  $N(x)$  libovolná spojitá hladká funkce a  $\bar{N}(x)$  lineární funkce od jednotkového zatížení ( $F = 1, M = 1$ ), potom platí:

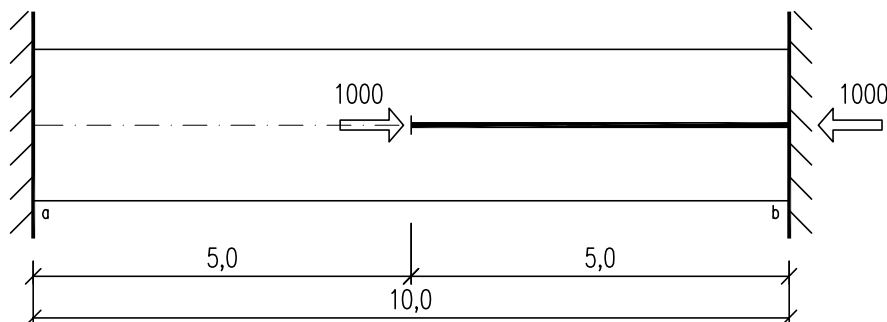
$$\delta = \int_0^l N \cdot \bar{N} \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{N,i} \cdot \bar{N}_{cg,i} \quad (2.32)$$

Slovní vyjádření vztahu lze obdobně jako v případě Vereščaginova pravidla formulovat takto: Hodnota integrálu je rovna součinu obsahu obrazce normálových sil spojitě hladké funkce a pořadnice u lineární funkce v místě těžiště spojitě hladké funkce.

### Ilustrativní příklad č. 3

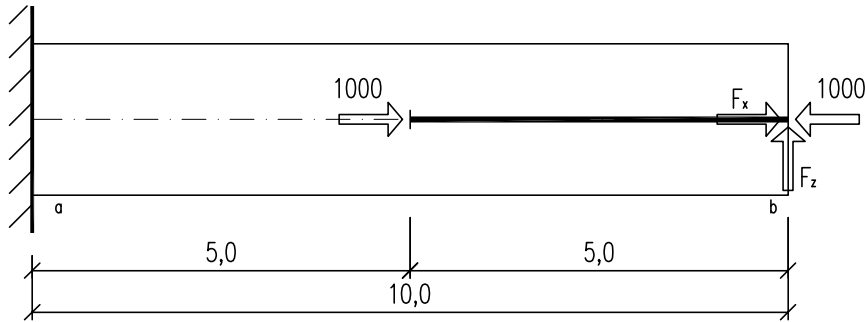
Pomocí Metody jednotkových sil stanovte sekundární účinky od předpětí pro oboustranně vetknutý nosník. Uvažujte konstantní průřezové i materiálové charakteristiky.

- Výpočet deformací konstrukce od předpětí:  $\delta_P = \int_0^l N_P \cdot \bar{N}_F \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{NP,i} \cdot \bar{N}_{cg,i}$



- Základní schéma nosníku

1. Vytvoření základní staticky určité soustavy:

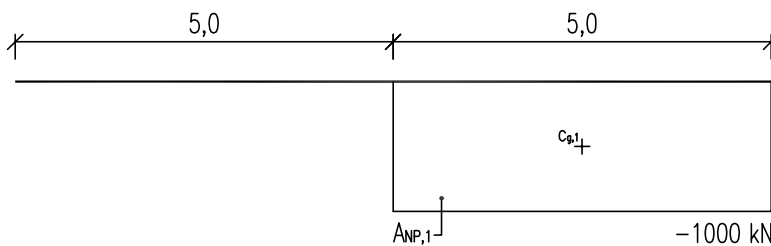


- Staticky určité schéma nosníku (základní soustava)

$$F_x = R_{b,x} \quad F_z = R_{b,z}$$

**Poznámka:** Konstrukce je zatížena pouze osovým zatížením (předpínací síla  $P$ )  $\Rightarrow R_{b,z} = 0; M_b = 0$

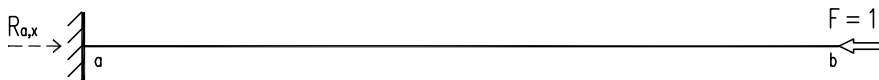
2. Vykreslení průběhu normálových sil od primárních účinků předpětí  $N_F^1(x)$  na základní soustavě:



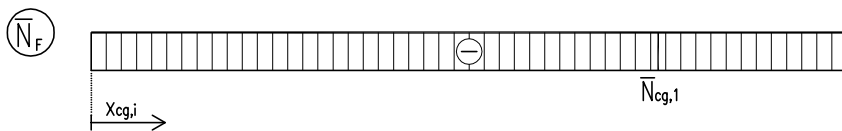
- Hladká spojitá funkce: Primární účinky od předpětí – obrazec normálových sil  $N_F^1(x)$

$$A_{NP,1} = 5,0 \cdot (-1000) = \underline{-5000 \text{ kNm}}$$

3. Zatížení virtuální staticky určité soustavy jednotkovou silou  $F = 1$  v místě odstraněné vodorovné vazby:



- Staticky určitý virtuální nosník: zatížený jednotkovou silou  $F$



$$R_a = -F = \underline{1}$$

$$N_F = \bar{N}_{cg,1} = \underline{-1}$$

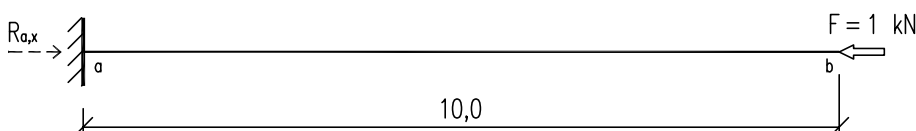
4. Výpočet vodorovné deformace od předpětí:

$$\delta_P = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L N_P \cdot \bar{N} = \sum_{i=1}^n A_{NP,i} \cdot \bar{N}_{cg,i} \quad \dots E \cdot A = \text{konst.}$$

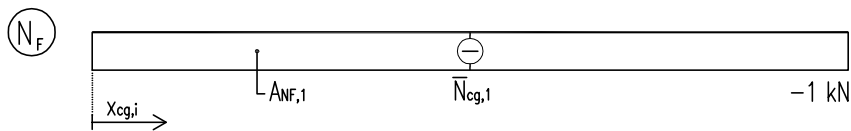
$$\delta_P = (-5000) \cdot (-1) = \underline{5000 \text{ m}} \quad \leftarrow \frac{\text{kNm} \cdot 1}{(\text{kN/m}^2) \cdot \text{m}^2}$$

- Výpočet deformací konstrukce od jednotkové síly  $F$ :  $\delta_F = \int_0^l N_F \cdot \bar{N}_F \cdot dl = \sum_{i=1}^n A_{NF,i} \cdot \bar{N}_{cg,i}$

1. Vykreslení průběhu normálových sil od jednotkové síly  $F$  na základní soustavě:



- Základní staticky určitá soustava: nosník zatížený jednotkovou silou  $F$



$$R_a = -F = \underline{1 \text{ kN}}$$

$$A_{NF,1} = -10,0 \cdot (1) = \underline{-10 \text{ kNm}}$$

$$N_F = \bar{N}_{cg,1} = -R_a = \underline{-1}$$

**Poznámka:** Průběh normálových sil je pro základní soustavu (hladká spojitá funkce) a virtuální nosník (lineární funkce) stejný  $N_F = \bar{N}_F$ . V obou případech je nosník zatížen jednotkovou silou, proto je možné odečíst pořadnici u lineární funkce v těžišti obrazce hladké spojitě funkce přímo.

2. Výpočet vodorovné deformace od jednotkové síly F:

$$\delta_1 = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L N_F \cdot \bar{N} = \sum_{i=1}^n A_{NF,i} \cdot \bar{N}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot A = \text{konst.}$$

$$\delta_1 = (-10) \cdot (-1) = \underline{10 \text{ m} / \text{kN}}$$

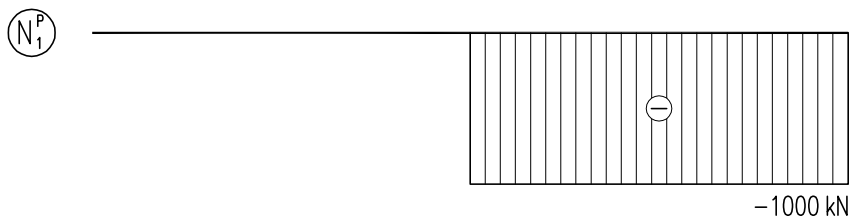
• Výpočet staticky neurčité reakce bránící volné deformaci R:

$$R \cdot \delta_1 = \delta_P \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\delta_P}{\delta_1} = \frac{5000}{10} = \underline{500 \text{ kN}}$$



$$R_{b,x} = R = \underline{500 \text{ kN}}$$

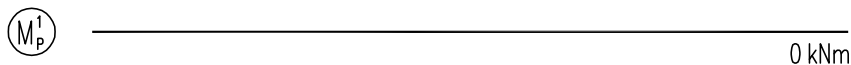
a) Primární účinky od předpětí:



$$N_{P,a}^1 = N_{P,b}^1 = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

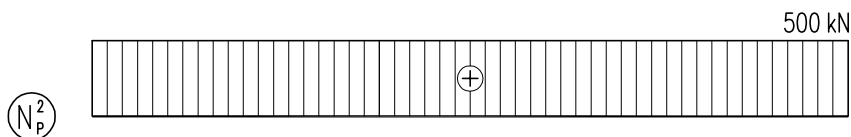


$$V_{P,a}^1 = V_{P,b}^1 = \underline{0 \text{ kN}}$$

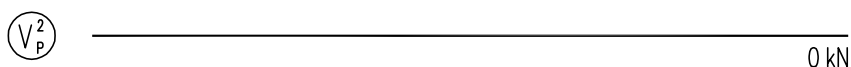


$$M_{P,a}^1 = M_{P,b}^1 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

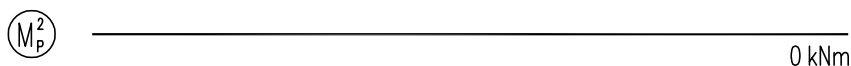
b) Sekundární účinky od předpětí:



$$N_{P,a}^2 = N_{P,b}^2 = R_{b,x} = \underline{500 \text{ kN}}$$

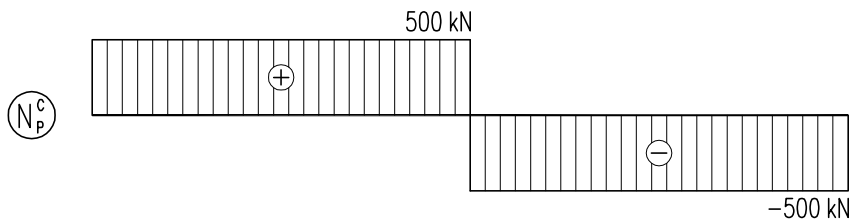


$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$M_{P,a}^2 = M_{P,b}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

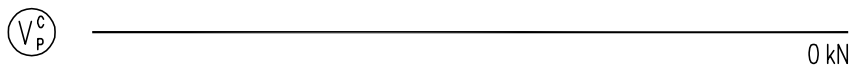
c) Celkové účinky od předpětí:



$$N_P^c = N_P^1 + N_P^2$$

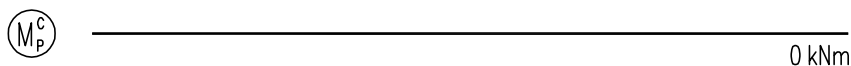
$$N_{P,a}^c = 0 + 500 = \underline{500 \text{ kNm}} = N_{P,Lab/2}^c$$

$$N_{P,Lab/2}^c = (-1000) + 500 = \underline{-500 \text{ kN}} = N_{P,b}^c$$



$$V_P^c = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^c = V_{P,b}^c = 0 + 0 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$M_P^c = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^c = M_{P,b}^c = 0 + 0 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

**Závěr:** Použití Maxwell–Mohrova vztahu pro výpočet přetvoření popřípadě pootočení nosníku je velice univerzální výpočtový aparát. Velmi výhodná je aplikace metody při řešení normálových účinků od předpětí, kdy za předpokladu konstantního průběhu normálové síly  $P = P_H$  po délce nosníku jsou hladká spojitá funkce  $N(x)$ , a lineární funkce  $\bar{N}(x)$  rovněž konstantní. Následný výpočet se tak omezuje na stanovení obdélníkové plochy obrazce normálových  $A_{w,i}$ , která je přenásobená jednotkovou silou (na virtuálním nosníku) v místě těžiště  $A_{w,i}$ .

### 2.4.4 MOHROVA ANALOGIE

Mohrova analogie je metoda umožňující výpočet průhybu a pootočení na staticky určitých konstrukcích bez použití složitých diferenciálních a integračních počtů. Metoda využívá derivačně integrační závislosti mezi zatížením, vnitřními silami a deformacemi rozepsána jako:

$$\begin{array}{l}
 \downarrow \text{derivate} \\
 w \\
 w' = \varphi \\
 w'' \cdot E \cdot I = -M \\
 w''' \cdot E \cdot I = -V \\
 w^{IV} \cdot E \cdot I = q \\
 \downarrow
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \uparrow \text{integrace} \\
 \dots \text{ průhyb} \\
 \dots \text{ pootočení} \\
 \dots \text{ ohybový moment} \\
 \dots \text{ posouvající síla} \\
 \dots \text{ příčné zatížení}
 \end{array}$$







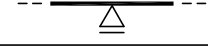
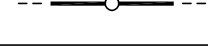
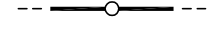
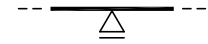
Postup řešení deformací resp. pootočení konkrétního bodu nosníku Mohrovou analogií:

- Výpočet vnitřních sil na skutečném nosníku od skutečného zatížení – získáme obrazec ohybových momentů.
- Sestrojíme přidružený fiktivní nosník a zatížíme jej momentovým obrazem od skutečného zatížení: stanoveném v kroku č.1 poděleným ohybovou tuhostí nosníku  $E \cdot I$ .

Poznámka: kladné ohybové momenty uvažujeme jako kladné zatížení (působící směrem dolů).

- Výpočet vnitřních sil na fiktivním nosníku – získáme obrazec ohybových momentu vyjadřující průhyb nosníku a obrazec posouvajících sil vyjadřující pootočení v libovolném bodě nosníku.

Při použití Mohrovy analogie resp. při nahrazení skutečného nosníku přidruženým virtuálním je nutné zaměnit počáteční kinematické okrajové podmínky za podmínky statické. Pro názornost budou v tabulce 2.1 uvedeny sobě si odpovídající okrajové podmínky pro různé typy podepření.

Skutečný nosník		Virtuální nosník	
Kinematické okrajové podmínky	Typ uložení	Statické okrajové podmínky	Typ uložení
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} \neq 0$ $\bar{V} \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi = 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} = 0$	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} = 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} \neq 0$ $\bar{V} \neq 0$	

Tabulka 2.1 – Přehled vzájemně si odpovídajících okrajových podmínek

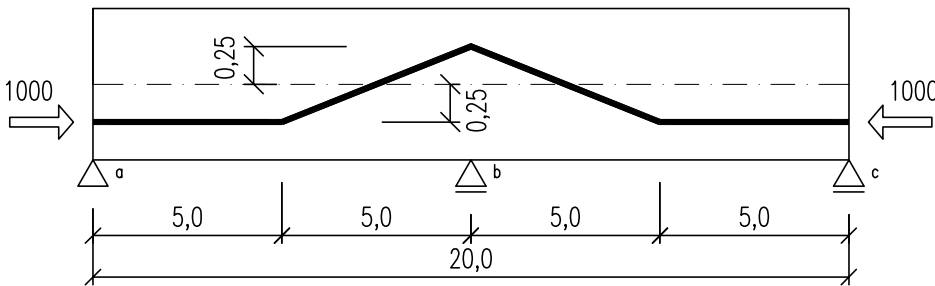
Použití Mohrovy analogie pro výpočet sekundárních účinků od předpětí bývá spojeno s použitím metody jednotkových sil. Důvodem je sestavení základní deformační podmínky,

$$\delta_P = R \cdot \delta_1 \tag{2.30}$$

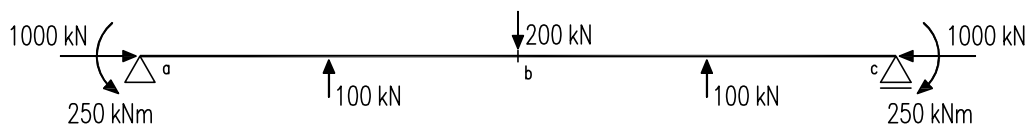
ve které vystupuje posun resp. pootočení nosníku  $\delta_1$  od jednotkového zatížení ( $F = 1$  resp.  $M = 1$ ). Stanovení jednotkového parametru  $\delta_1$  bylo vysvětleno u Metody jednotkových sil nebo Vereščaginovo pravidla. Posun nebo pootočení  $\delta_p$  se stanoví podle výše uvedených kroků jako ohybový moment  $\bar{M}$  na virtuálním nosníku zatíženého momentovým obrazcem na skutečném nosníku od skutečného zatížení poděleným ohybovou tuhostí  $E \cdot I$ .

### Ilustrativní příklad č. 4

Pomocí Mohrovy analogie stanovte sekundární účinky od předpětí pro spojitý nosník o dvou polích. Uvažujte konstantní průřezové i materiálové charakteristiky.

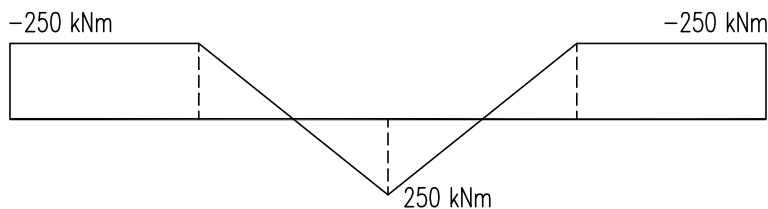


... Základní schéma nosníku



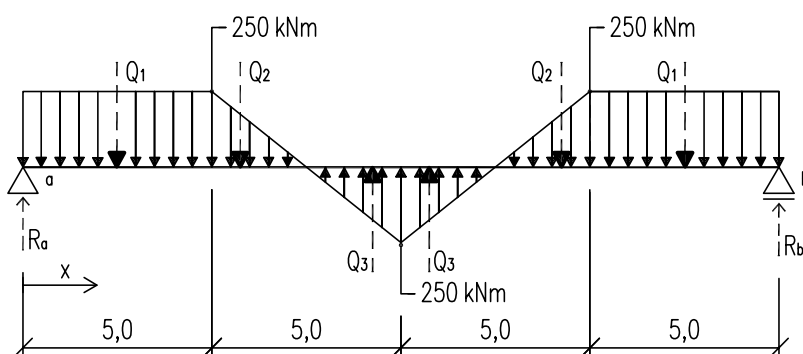
... Statické schéma prostého nosníku

1. Vykreslení průběhu ohybových momentů od primárních účinků předpětí  $M_p(x)$



**Poznámka:** Průběh ohybových momentů lze přímo vykreslit na základě polohy předpínacího kabelu vůči střednici nosníku – vycházíme z předpokladu  $M_p(x) = P_H \cdot e_p(x)$ .

2. Vytvoření základní staticky určité soustavy – virtuální nosník zatížený momentovým obrazcem na skutečném nosníku od skutečného zatížení.



Staticky určitý virtuální nosník zatížený momentovým obrazcem  $M_p$

$$Q_1 = 5,0 \cdot (-250) = \underline{-1250 \text{ kNm}^2}$$

$$Q_2 = 0,5 \cdot 2,5 \cdot (-250) = \underline{-312,5 \text{ kNm}^2}$$

$$Q_3 = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 250 = \underline{312,5 \text{ kNm}^2}$$

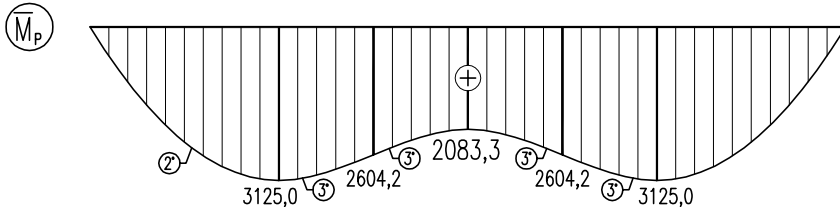
3. Výpočet vnitřních sil na virtuálním nosníku.

$$\Sigma F_{i,z} = 0: R_a + 2 \cdot (-Q_1 - Q_2 + Q_3) + R_b = 0$$

$$R_a + 2 \cdot (-1250 - 312,5 + 312,5) + R_b = 0 \quad \dots \quad R_a = R_b = \underline{1250 \text{ kNm}^2}$$

$$\bar{M}_P(x = \frac{1}{2} L_{ob}) = R_a \cdot 0,5 \cdot L_{ob} - Q_1 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 5,0 + 5,0) - Q_2 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2,5 + 2,5) + Q_3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5$$

$$\bar{M}_P(x = \frac{1}{2} L_{ob}) = 1250 \cdot 0,5 \cdot 20 - 1250 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 5,0 + 5,0) - 312,5 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2,5 + 2,5) + 312,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 = \underline{2083,33 \text{ kNm}^3}$$

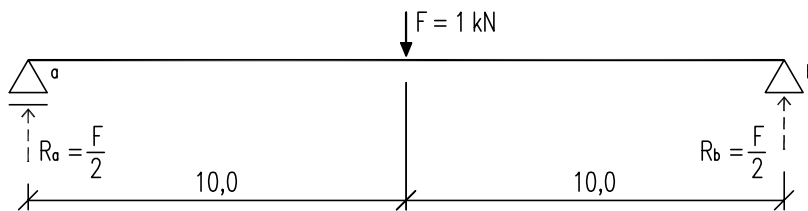


Průběh ohybových momentů na virtuálním nosníku  $\bar{M}_P$

- Výpočet svislé deformace od předpětí:  $\delta_P = -\frac{\bar{M}_P}{E \cdot I_y} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$

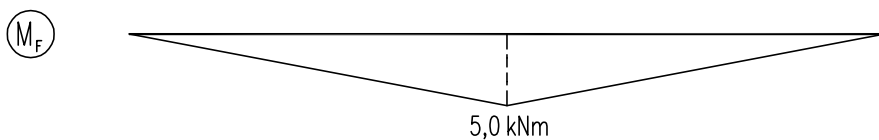
$$\delta_P = -\frac{\bar{M}_P}{E \cdot I_y} = \underline{2083,33 \text{ m}} \quad \leftarrow \frac{\text{kNm}^3}{(\text{kN/m}^2) \cdot \text{m}^4}$$

- Výpočet deformací konstrukce od jednotkové síly F působící na základní soustavě:  $\delta_F$



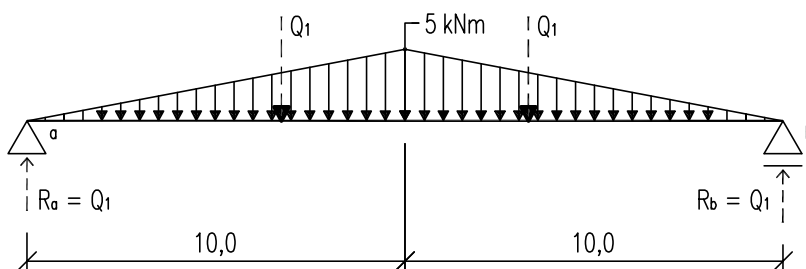
- Základní schéma konstrukce: Virtuální nosník – základní soustava: zatížený jednotkovou silou F v místě staticky neurčitých reakcí R

1. Vykreslení průběhu ohybových momentů od jednotkové síly F:  $M_F(x)$



$$M_F = R_a \cdot 10,0 = \frac{1,0}{2} \cdot 10,0 = \underline{5,0 \text{ kNm}}$$

2. Vytvoření virtuálního nosníku zatíženého momentovým obrazcem na skutečném nosníku od skutečného zatížení.



Staticky určitý virtuální nosník zatížený momentovým obrazcem  $M_F$

$$Q_1 = 0,5 \cdot 10 \cdot (-5) = \underline{-25 \text{ kNm}^2}$$

3. Výpočet vnitřních sil na virtuálním nosníku.

$$\Sigma F_{i,z} = 0: R_a + 2 \cdot (-Q_1) + R_b = 0$$

$$R_a + 2 \cdot (-25) + R_b = 0 \quad \dots \quad R_a = R_b = \underline{25 \text{ kNm}^2}$$



$$\bar{M}_F \left( x = \frac{1}{2} L_{ab} \right) = R_a \cdot 0,5 \cdot L_{ab} - Q_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot L_{ab}$$

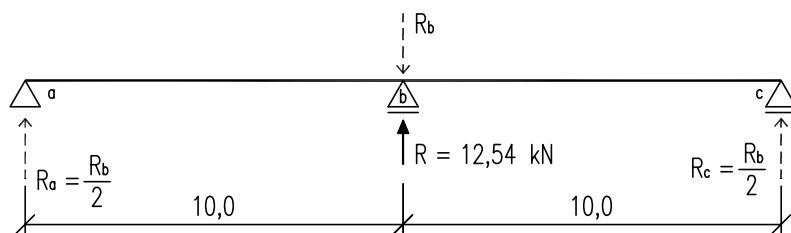
$$\bar{M}_F \left( x = \frac{1}{2} L_{ab} \right) = 25 \cdot 0,5 \cdot 20 - 25 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 20 = \underline{166,67 \text{ kNm}^3}$$

- Výpočet svislé deformace od jednotkové síly  $F$ :  $\delta_f = - \frac{\bar{M}_F}{E \cdot I_y} \dots E \cdot I_y = \text{konst.}$

$$\delta_f = - \frac{\bar{M}_F}{E \cdot I_y} = \underline{166,67 \text{ m} / \text{kN}}$$

- Výpočet staticky neurčité reakce  $R$  bránící volné deformaci nosníku:

$$\delta_p = R \cdot \delta_f \Rightarrow R = \frac{\delta_p}{\delta_f} = \frac{2083,3}{166,67} = \underline{12,50 \text{ kN}}$$



$$R_b = -R = \underline{-12,50 \text{ kNm}}$$

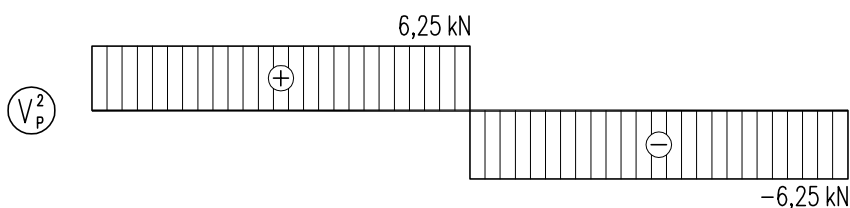
$$R_a = R_c = \frac{R_b}{2} = - \frac{-12,50}{2} = \underline{6,25 \text{ kN}}$$

**Poznámka:** Staticky neurčitá reakce stanovená na základě deformační rovnice (6.10) vyjadřuje sílu, která je nutná pro vyvození stejné velké deformace, jako vzniká působením primárních účinků od předpětí (má souhlasný směr). Skutečná podporová reakce  $R_b$ , bránící volné deformaci má stejnou velikost avšak je opačně orientovaná.

### Průběh vnitřních sil – sekundární účinky od předpětí

$$\textcircled{N_p^2} \quad \text{-----} \quad 0 \text{ kN}$$

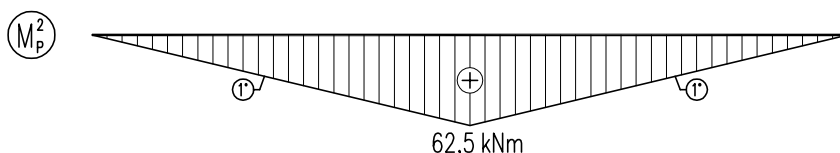
$$N_p^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$V_{p,a}^2 = V_{p,b}^2 = R_a = \underline{6,25 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b}^2 = V_{p,b}^2 - R_b = 6,25 - 12,50$$

$$V_{p,b}^2 = V_{p,c}^2 = \underline{-6,25 \text{ kN}}$$



$$M_{p,a}^2 = M_{p,c}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

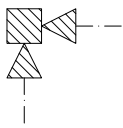
$$M_{p,b}^2 = R_a \cdot L_{a,b} = 6,25 \cdot 10 = \underline{62,6 \text{ kNm}}$$

**Závěr:** Použití Mohrovy analogie pro výpočet přetvoření konstrukce a následné stanovení sekundárních účinků od předpětí je výhodné zejména v případech, kdy lze přímo (bez použití složitých derivačního a integračního počtu) vyjádřit intenzitu zatížení na virtuálním nosníku (momentový obrazec na skutečném nosníku). Příkladem je konstantní nebo lineární průběh ohybových momentů na skutečném nosníku, který v je v další fázi výpočtu převeden jako momentový obrazec na stranu zatížení fiktivního nosníku.

## 2.4.6 ZJEDNODUŠENÁ DEFORMAČNÍ METODA

Tato metoda je vhodná pro výpočet náročnějších rovinných prutových konstrukcí (spojitých nosníků o více polích a rámu). Deformační metoda je metoda nepřímá, za neznámé volí přetvárné neurčité veličiny (posunutí a pootočení). Obecná deformační metoda (ODM) předpokládá, že přetvoření prutu je způsobeno pouze ohybovými momenty a normálovými silami, zanedbává vliv posouvajících sil. Zjednodušená deformační metoda (ZDM) zanedbává i vliv normálových sil a předpokládá, že přetvoření prutu je způsobeno pouze ohybovými momenty.

Základním prvkem je oboustranně vetknutý prut, jehož veškeré posunutí a pootočení jsou nulová. Při tvorbě základní deformačně určité soustavy vkládáme do prutové konstrukce fiktivní vazby tak, aby bylo zabráněno přemístění styčnicku. Je tomu přesně naopak než u silové metody (metoda třímomentových rovnic...), kde odebíráme tak, aby nám vznikla staticky určitá konstrukce.



Obr. 2.9 – Tři fiktivní vazby volného styčnicku

Fiktivní vazby rozlišíme na fiktivní momentovou vazbu – zabraňuje pootočení styčnicku (budeme ji značit čtverečkem) a na fiktivní silovou vazbu – zabraňuje posunutí styčnicku (budeme ji značit trojúhelníkem). Pro určení počtu fiktivních vazeb je nutné určit stupeň statické přetvárnosti. U DM je pak roven počtu fiktivních vazeb. U ZDM lze tento počet snížit tím že sloučíme některá posunutí.

Vnější vazby prutové soustavy:

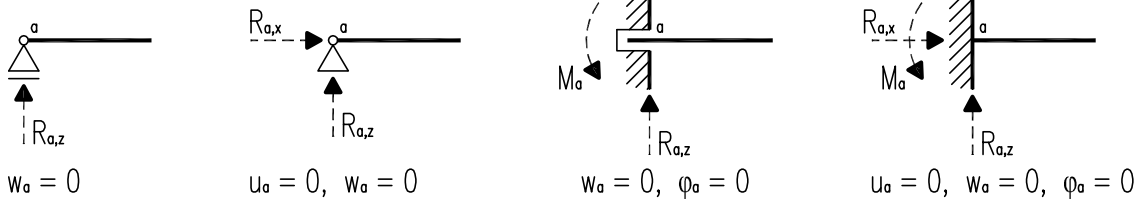


Schéma připojení	Popis připojení	Neznámé deformace		Schéma připojení	Popis připojení	Neznámé deformace	
		počet	druh			počet	druh
	monolitický styčnick	3	$u, w, \varphi$		monolitický styčnick vetknutý	0	–
	kloubový styčnick	2	$u, w$		vetknutí	0	–
	monolitický styčnick podepřený kyvným prutem	2	$w, \varphi$		neposuvný kloub (*)	<sup>1</sup> 1	$\varphi$
						<sup>2</sup> 0	–
	kloubový styčnick podepřený kyvným prutem	1	$u$		posuvný kloub (*)	<sup>1</sup> 2	$u, \varphi$
						<sup>2</sup> 1	$u$
	monolitický styčnick podepřený pevným kloubem	1	$\varphi$	(*) varianta 1 se uvažuje při výpočtu varianty oboustranně vetknutého prutu, 2 pak jednostranně vetknutého prutu			

Tabulka 2.2 – Počet neznámých parametrů deformace

Na zrušení tří složek přemístění  $u$ ,  $w$ ,  $\varphi$  je třeba jedna fiktivní momentová vazba a dvě fiktivní silové vazby. Výjimkou je krajní kloubové uložení, tam pootočení neuvažujeme jako neznámou a na zrušení přemístění stačí pouze dvě fiktivní silové vazby.

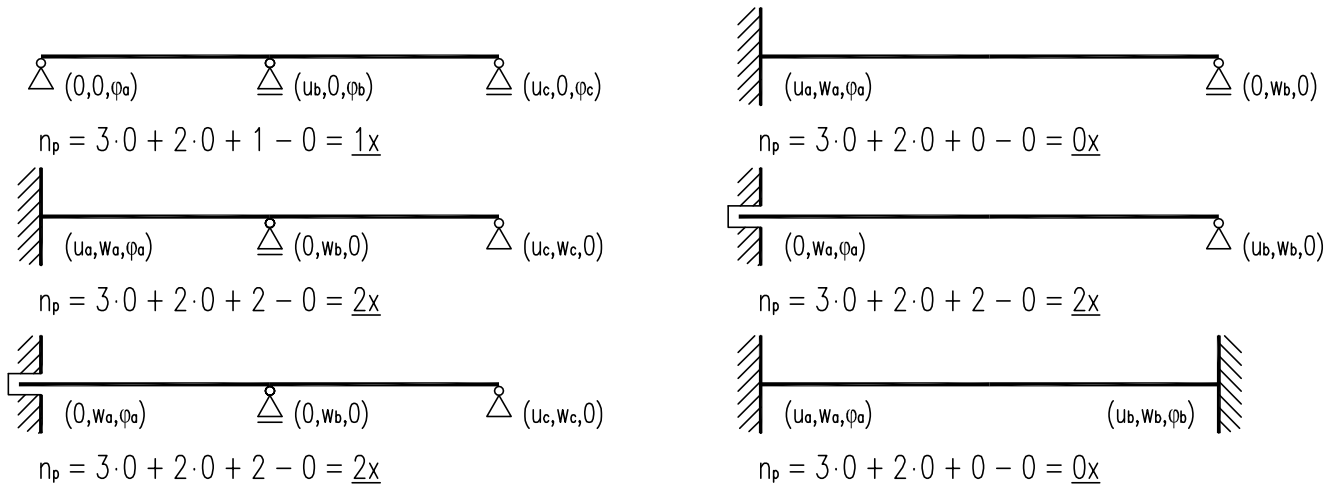
U ODM je počet fiktivních vazeb roven stupni statické přetvárnosti. U ZDM fiktivními silovými vazbami zabraňujeme pouze těm posunům, které nezachytí přímo pruty nebo vnější vazby. Tedy můžeme odebrat některé fiktivní vazby, a tím snížit stupeň statické přetvárnosti.

Určení stupně statické přetvárnosti:

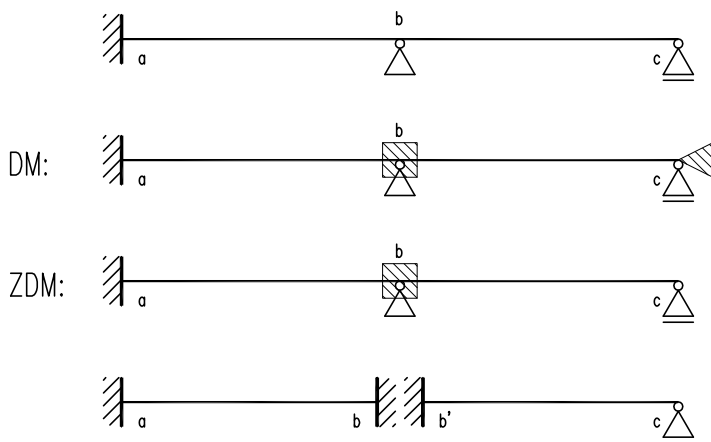
$$n_p = 3 \cdot t + 2 \cdot k + p - p_v \quad (2.33)$$

- kde:  $n_p$  ... stupeň přetvárné neurčitosti  
 $t$  ... počet monolitických (tuhých) styčníků  
 $k$  ... počet kloubových styčníků  
 $p$  ... počet jednoduchých posuvných podepření – posuvný kloub  
 $p_v$  ... počet vnějších vazeb umístěných u styčníků

obr. 2.10 – Příklady výpočtu stupně přetvárné neurčitosti pro typická schémata předpjatých konstrukcí



obr. 2.11 – Tvorba základní deformačně určité soustavy spojitého nosníku



Určení stupně statické přetvárnosti:

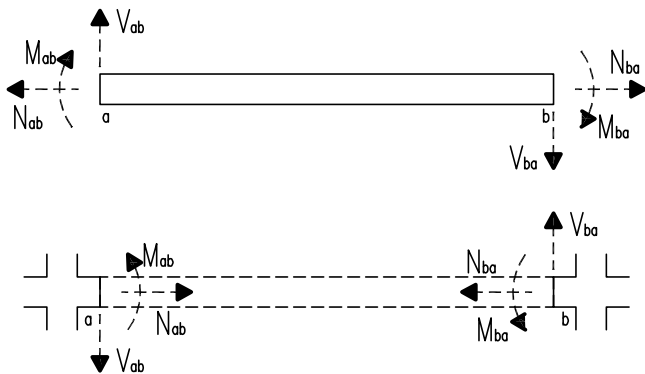
$$n_p = 3 \cdot t + 2 \cdot k + p - p_v$$

$$n_p = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 - 0 = \underline{2}$$

U DM je počet fiktivních přetvárných vazeb 2, tedy pootočení v uzlu  $b$  a vodorovný posun v uzlu  $c$ .

U ZDM vodorovný posun uzlu  $c$  zachytí ostatní vazby, proto s ní nemusíme uvažovat, jako jediná fiktivní přetvárná vazba zůstává pouze pootočení v uzlu  $b$ .

Pro koncové účinky na prutu (normálové síly  $N_{ab}$ ,  $N_{ba}$ , posouvající síly  $V_{ab}$ ,  $V_{ba}$  a momenty  $M_{ab}$ ,  $M_{ba}$ ) zavádí tato metoda následující znaménkovou konvenci. Pro normálové síly je to stejné jako u silové metody tedy ty, které vyvolávají tah, jsou kladné: Posouvající síly jsou kladné, pokud se snaží prutem pootočit ve směru hodinových ručiček. Také momenty jsou kladné, otáčeli se ve směru hodinových ručiček, tedy ve smyslu kladných pootočení  $\varphi$ .



akce styčnicků na konce prutů

akce konců prutů na styčnick

obr. 2.12 – Složky vnitřních sil v koncových průřezech

Koncové  $M_{ab}$ ,  $M_{ba}$  získáme superpozicí primárního a sekundárního zatěžovacího stavu. V tomto případě se nejedná o primární a sekundární stav ve smyslu řešení předpětí, pouze terminologie je podobná, značení však bude pro lepší přehlednost jiná.

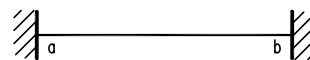
–Primární stav ( $\bar{M}_{ab}$ ,  $\bar{M}_{ba}$ ) zatížení necháme působit na dané konstrukci. Monolitické styčníky jsou upnuty proti pootočení tak i proti posunutí, volné konce prutů jsou pak dokonale vetknuté, nebo kloubově připojené.

–Sekundární stav ( $\hat{M}_{ab}$ ,  $\hat{M}_{ba}$ ) nezatížené konstrukci udělíme všechny složky styčnickového přemístění (posuny a pootočení), které vyvolají sekundární koncové momenty

Základní vztahy zjednodušené deformační metody:

- Pro prut oboustranně vetknutý

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + \hat{M}_{ab} = \bar{M}_{ab} + k_{r,ab} \cdot (2 \cdot \varphi_a + \varphi_b - 3 \cdot \psi_{ab})$$



(2.34)

$$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = \bar{M}_{ba} + k_{r,ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b + \varphi_a - 3 \cdot \psi_{ab})$$

(2.35)

kde:  $\bar{M}_{ab}$ ,  $\bar{M}_{ba}$  ... primární koncové momenty, proběžné typy zatížení jsou hodnoty tabelovány  
 $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  ... pootočení koncových průřezů  
 $\psi_{ab}$  ... prutové pootočení, je funkcí svislých posunů koncových průřezů

$$\psi_{ab} = \frac{W_b - W_a}{L_{ab}} \quad (2.36)$$

$k_{r,ab}$ ,  $k_{r,ba}$  ... ohybová tuhost prutu stálého průřezu

$$k_{r,ab} = \frac{2 \cdot E_y \cdot I_{ab}}{L_{ab}} \quad (2.37)$$

- Pro prut vetknutý z jedné strany, kloubově uložený z druhé

$$M_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + \hat{M}_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + k_{r',ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{ab})$$



(2.38)

kde:  $k_{r',ba}$  ... ohybová tuhost prutu stálého průřezu

$$k_{r',ba} = \frac{3}{4} \cdot k_{r,ba} \quad (2.39)$$

Při řešení konstrukcí s pruty stálého průřezu nemusíme počítat se skutečnou ohybovou tuhostí, ale můžeme ji zjednodušit na poměrnou ohybovou tuhost

$$k_{ba} = \frac{I_{ab}}{L_{ab}} \cdot c \quad (2.40)$$

kde:  $I_{ob}$  ... momenty setrvačnosti průřezu nosníku  
 $L_{ob}$  ... délka nosníku  
 $c$  ... konstanta, kterou volíme v závislosti na velikosti  $I_{ob}$  pro ulehčení výpočtu, je-li např. moment setrvačnosti  $6 \cdot 10^{-3}$  potom  $c$  zvolíme  $1 \cdot 10^3$

Při tomto zjednodušení též platí převod poměrné ohybové tuhosti mezi oboustranně vetknutým nosníkem a nosníkem uloženým kloubově z jedné a vetknutým z druhé strany.

$$k'_{ba} = \frac{3}{4} \cdot k_{ba} \quad (2.41)$$

Nakonec určení vnitřních sil na nosníku. Vnitřní síly na oboustranně, či jednostranně vetknutém nosníku můžeme stanovit z prostého nosníku zatíženého vnějším zatížením a koncovými momenty.

• Ohybový moment:

$$M_x = M_{x,0} + \Delta M_x = M_{x,0} + \frac{M_{ab} \cdot x' - M_{ba} \cdot x}{L_{ab}} \quad (2.42)$$

kde:  $M_{x,0}$  ... ohybový moment na prostém nosníku od vnějšího zatížení v místě  $x$   
 $M_{ab}, M_{ba}$  ... koncové momenty prutu zjištěné ZDM  
 $L_{ab}$  ... délka prutu

• Posouvající síla:

$$V_x = V_{x,0} + \Delta V_x = V_{x,0} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{L_{ab}} \quad (2.43)$$

kde:  $V_{x,0}$  ... posouvající síla na prostém nosníku od vnějšího zatížení v místě  $x$   
 $M_{ab}, M_{ba}$  ... koncové momenty prutu zjištěné ZDM  
 $L_{ab}$  ... délka prutu

• Posouvající síla koncového průřezu:

$$V_{ab} = V_{ab,0} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{L_{ab}}; \quad V_{ba} = V_{ba,0} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{L_{ab}} \quad (2.44)$$

kde:  $V_{ab,0} = R_{a,0}$  ... koncové posouvající síly na prostém nosníku od vnějšího zatížení, tedy nadpodporové reakce  
 $V_{ba,0} = -R_{b,0}$

Po dosazení za koncové momenty dostaneme výrazy pro oboustranně vetknutý prut:

$$V_{ab} = \bar{V}_{ab} - \frac{k_{ab}}{L_{ab}} \cdot (3 \cdot \varphi_a + 3 \cdot \varphi_b - 6 \cdot \psi_{ab}) \quad (2.45)$$

$$V_{ba} = \bar{V}_{ba} - \frac{k_{ab}}{L_{ab}} \cdot (3 \cdot \varphi_a + 3 \cdot \varphi_b - 6 \cdot \psi_{ab}) \quad (2.46)$$

pro jednostranně vetknutý prut:

$$V_{ab} = \bar{V}_{ab} - \frac{3 \cdot k_{ab}}{2 \cdot L_{ab}} \cdot (\varphi_b - \psi_{ab}) \quad (2.47)$$

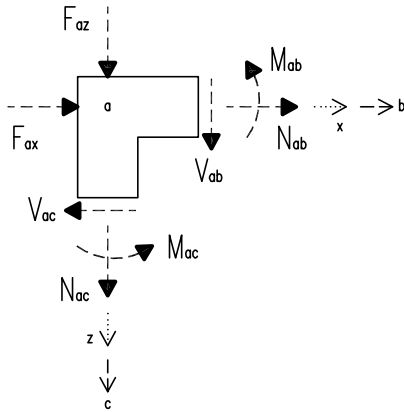
$$V_{ba} = \bar{V}_{ba} - \frac{3 \cdot k_{ab}}{2 \cdot L_{ab}} \cdot (\varphi_b - \psi_{ab}) \quad (2.48)$$

kde:  $\bar{V}_{ab} = \bar{R}_a$  ... primární podporové reakce, které jsou pro účely výpočtu tabelovány  
 $\bar{V}_{ba} = -\bar{R}_b$

• Normálová síla:

Normálové síly v koncových průřezích ve většině případů řešíme ze statických podmínek rovnováhy vodorovných a svislých sil působících na styčnících.

Pro uvolněný koncový styčník platí:



$$\Sigma F_{ix} = 0: N_{ab} - V_{ac} + F_{ax} = 0$$

$$N_{ab} = V_{ac} - F_{ax}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: N_{ac} + V_{ab} + F_{az} = 0$$

$$N_{ac} = -V_{ab} - F_{az}$$

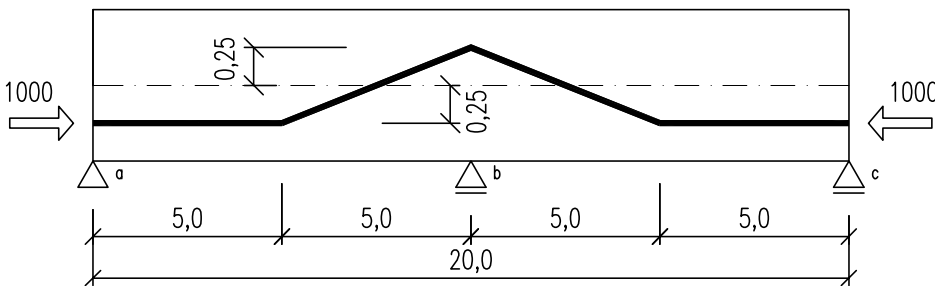
U rovinných rámců s posuvnými styčníky lze sestavit silovou podmínku rovnováhy ve směru příslušného nezávislého posunu. Tuto podmínku nazýváme "Patrová rovnice"

$$\Sigma M_{ia} = 0: M_{ab} + M_{ac} = 0$$

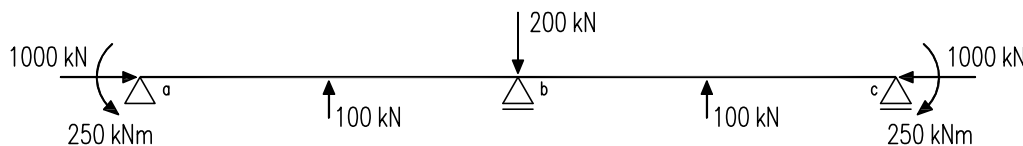
$$M_{ab} = -M_{ac}$$

### Ilustrativní příklad č. 5

Pomocí zjednodušené deformační metody stanovte sekundární účinky od předpětí pro spojitý nosník o dvou polích. Uvažujte konstantní průřezové i materiálové charakteristiky. Moment setrvačnosti  $I_{ob} = I_{oc} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$



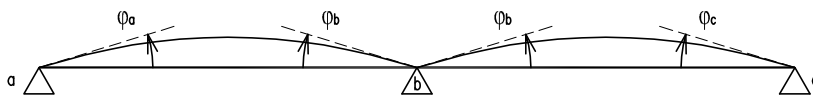
... Základní schéma nosníku



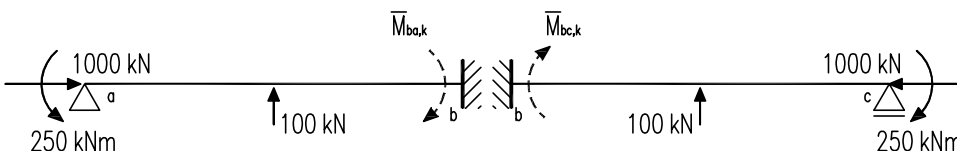
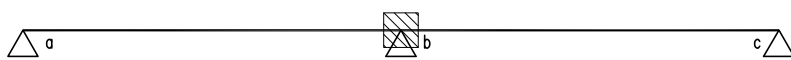
... Statické schéma nosníku

1. Určení stupně statické přetvárnosti:  $n_p = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$

počet fiktivních přetvárných vazeb je 1, fiktivní momentovou vazbu umístíme do podpory b a za neznámou volíme pootočení v podpoře b  $\varphi_b$ .



... zajímá nás  $\varphi_b$ , pootočení  $\varphi_a$  ani  $\varphi_c$  do výpočtu neuvažujeme



... konvence pro určení primárního momentu

2. Stanovení poměrné ohybové tuhosti:

$$k_{ba} = k_{bc} = \frac{I_{ab}}{L_{a,b}} \cdot c = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{10} \cdot 1 \cdot 10^3 = \underline{0,6} \quad \dots c \text{ volím } 1 \cdot 10^3$$

3. Výpočet primárních momentů:

$$\bar{M}_{ab,k} = \underline{0,0 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{ba,k} = -\bar{M}_{bc,k} = -\frac{M_{P,a}}{2} - \frac{3}{16} \cdot F_{P,1/2} \cdot L_{a,b} = -\frac{250}{2} - \frac{3}{16} \cdot 100 \cdot 10,0 = -125 - 187,5 = \underline{-312,5 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{bc,k} = \underline{312,5 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{cb,k} = \underline{0,0 \text{ kNm}}$$

4. Sestavení styčnickové rovnice pro styčnick b:

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{ab})$$

$$M_{bc,k} = \bar{M}_{bc,k} + k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{bc}) \quad \dots \text{svislé posuny styčnicků } w_a, w_b \text{ a } w_c \text{ jsou nulová proto } \psi_{ab} = \psi_{bc} = 0,0$$

po dosazení získáme rovnici

$$-(\bar{M}_{ab,k} + \bar{M}_{bc,k}) = \frac{3}{4} \cdot k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$-(-312,5 + 312,5) = \frac{3}{4} \cdot 0,6 \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot 0,6 \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$0,0 = 1,8 \cdot \varphi_b \Rightarrow \varphi_b = \underline{0}$$

5. Výpočet podporového momentu pomocí styčnickové rovnice pro styčnick b

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = -312,5 + \frac{3}{4} \cdot 0,6(2 \cdot 0,0 - 2 \cdot 0,0) = \underline{-312,5 \text{ kNm}}$$

$$M_{bc,k} = 312,5 + \frac{3}{4} \cdot 0,6(2 \cdot 0,0 - 2 \cdot 0,0) = \underline{312,5 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^c = -M_{ba,k} = \underline{312,5 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^2 = M_{P,b}^c - M_{P,b} = 312,5 - 250 = \underline{62,5 \text{ kNm}}$$

6. Výpočet staticky neurčité reakce od sekundárních účinků předpětí R:

reakce a posouvající síly můžeme určit z klasické rovnováhy nebo pomocí ZDM

$$V_{ab} = V_{ab,0} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{L_{ab}} = 0 - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{L_{ab}} = 0 - \frac{0 + 312,5}{10} = \underline{6,25 \text{ kN}}$$

$$V_{ba} = V_{ba,0} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{L_{ab}} = 0 - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{L_{ab}} = 0 - \frac{0 - 312,5}{10} = \underline{6,25 \text{ kN}}$$

$$V_{bc} = V_{bc,0} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{L_{cb}} = 0 - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{L_{cb}} = 0 - \frac{312,5 + 0}{10} = \underline{-6,25 \text{ kN}}$$

$$V_{cb} = V_{cb,0} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{L_{cb}} = 0 - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{L_{cb}} = 0 - \frac{312,5 + 0}{10} = \underline{-6,25 \text{ kN}}$$

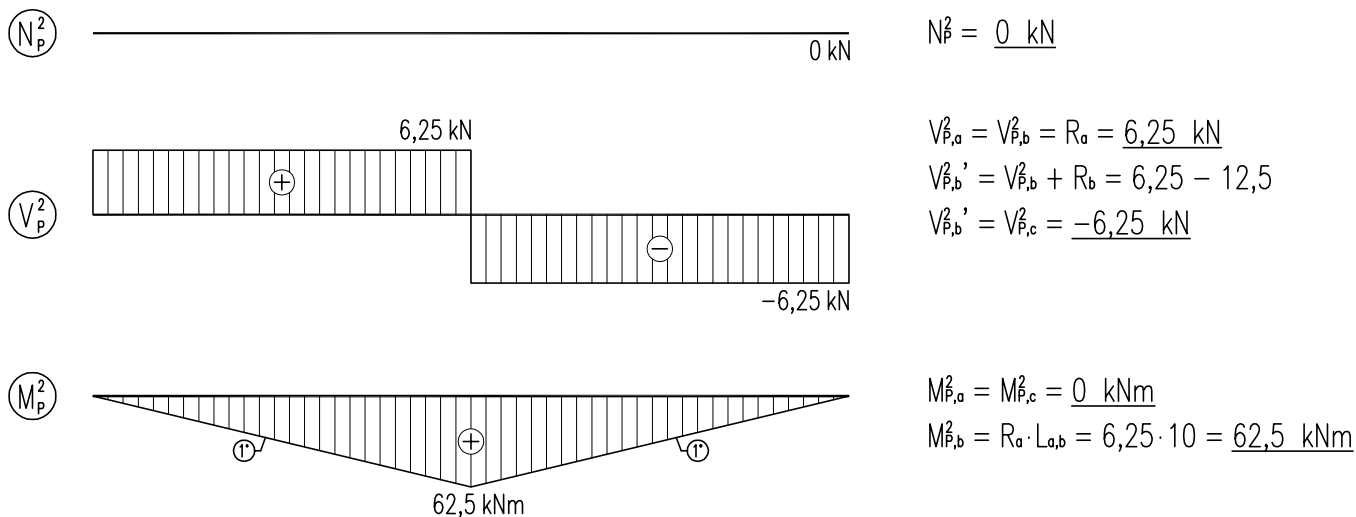
Při vykreslování je nutné dbát jiné konvence deformační metody

$$R_a = V_{ab} = \underline{6,25 \text{ kN}}$$

$$R_b = -V_{ba} + V_{bc} = -6,25 + (-6,25) = \underline{-12,5 \text{ kN}}$$

$$R_c = -V_{cb} = \underline{6,25 \text{ kN}}$$

### Průběh vnitřních sil – sekundární účinky od předpětí



**Závěr:** Jak je vidět ze vzorového příkladu je řešení velmi rychlé a jednoduché, protože primární momenty  $M_{ab,k}$  a  $M_{bc,k}$  jsou rovny celkovým momentům od účinků předpětí, je však nutné mít na paměti, že takové řešení je možné pouze na symetrické konstrukci o dvou polích zatížené symetrickým zatížením. Tato metoda je vhodná zejména pro složitější rovinné prutové konstrukce. Má však také svá specifika a vyžaduje alespoň základní zkušenosti s touto metodou, tedy spočítat dostatečné množství příkladů. Je třeba dát velký pozor na správnou konvenci, která je rozdílná od silové metody.

Metody 2.4.1, 2.4.2, 2.4.4, 2.4.5, byly představeny na jednom konkrétním případě, výsledky by tedy měli být stejné. Ve výsledcích našeho případu jsou však drobné rozdíly. Tyto rozdíly jsou ale jen nepatrné a jsou způsobeny hlavně zaokrouhlováním při výpočtech a přesností užitých metod. Stejně tomu je i u příkladu č. 12 ve kterém jsou také pro porovnání použity různé metody řešení.



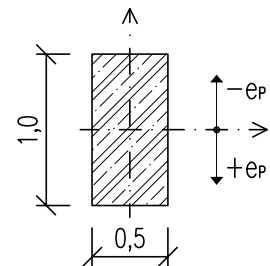
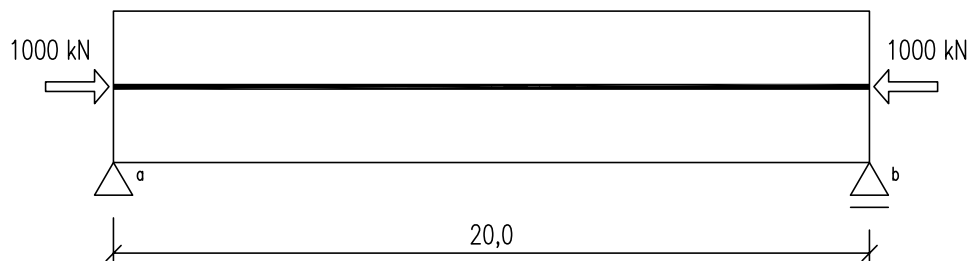
### 3. VÝPOČTOVÁ ČÁST

#### 3.1 PŘÍKLAD Č.1

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- a) ekvivalentní silové účinky od předpětí
- b) celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 20,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = e_{P,b} = 0,0 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$

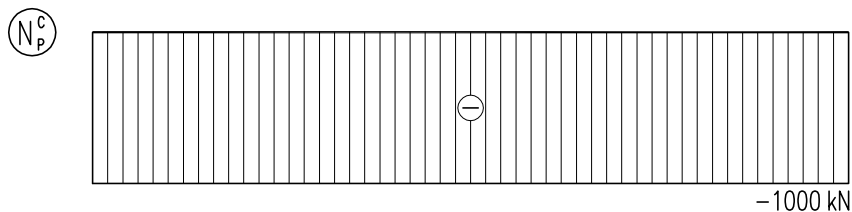


#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

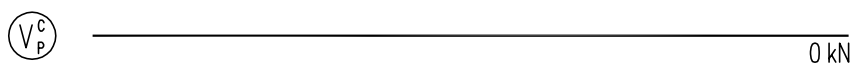
$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}} \quad P_{V,a} = P_{V,b} = \underline{0 \text{ kN}} \quad M_{P,a} = M_{P,b} = \underline{0 \text{ kNm}}$$



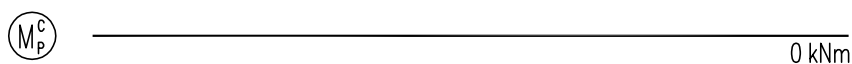
#### b) Celkové účinky od předpětí:



$$N_P^b = N_P^s = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_{P,a} = V_{P,a}^s = V_{P,b}^s = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$M_{P,a}^b = M_{P,a}^s = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0$$

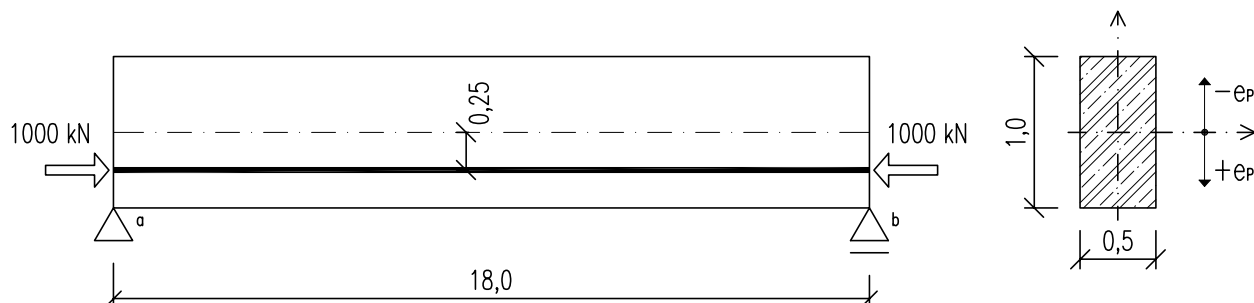
$$M_{P,a}^s = M_{P,b}^s = \underline{0 \text{ kNm}}$$

### 3.2 PŘÍKLAD Č.2

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- a) ekvivalentní silové účinky od předpětí
- b) celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 18,0$  m  
 $b_c = 0,5$  m  
 $h_c = 1,0$  m  
 $e_{p,a} = e_{p,b} = 0,25$  m  
 $P = 1000$  kN

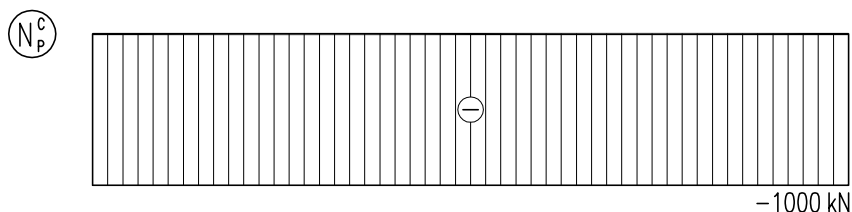


#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

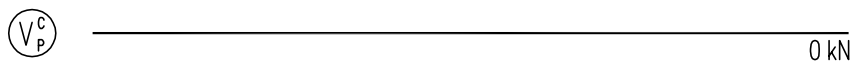
$P_H = -P = -1000$  kN       $P_{v,a} = P_{v,b} = 0$  kN       $M_{p,a} = M_{p,b} = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0,25 = -250$  kNm



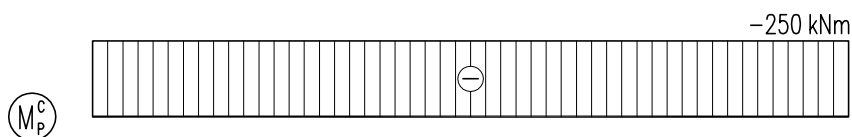
#### b) Celkové účinky od předpětí:



$N_P^b = N_P^s = P_H = -1000$  kN



$V_{P,a}^b = V_{P,a}^s = V_{P,b}^s = 0$  kN



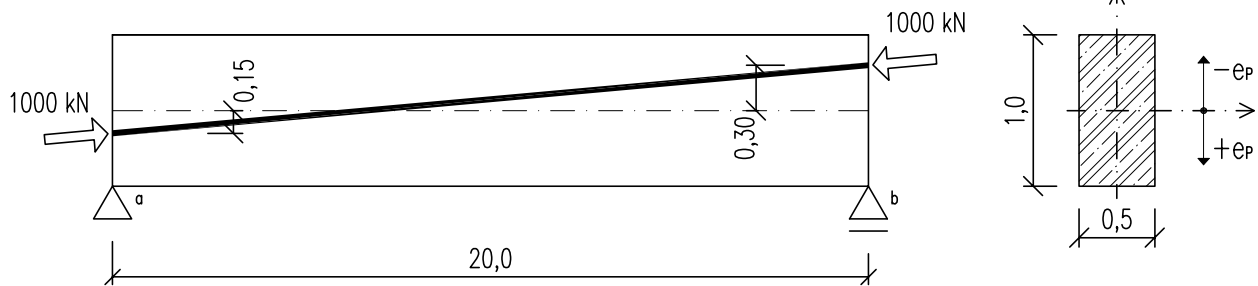
$M_{P,a}^b = M_{P,a}^s = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0,25$   
 $M_{P,a}^s = M_{P,b}^s = -250$  kNm

### 3.3 PŘÍKLAD Č.3

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 20,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = 0,15 \text{ m}$   
 $e_{P,b} = -0,30 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

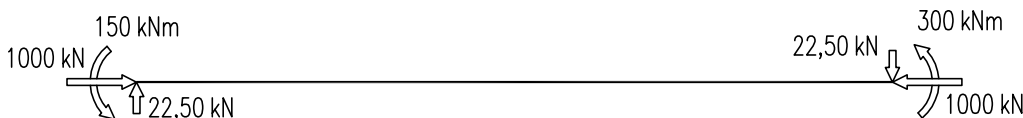
$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$P_{V,a} = -P_{V,b} = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 1,29 = \underline{22,50 \text{ kN}}$$

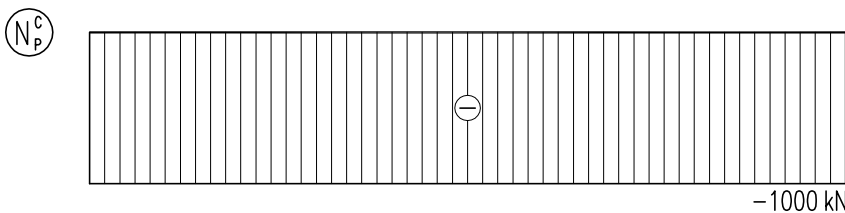
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{P,a} - e_{P,b}}{L_{a,b}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e_{P,a} - e_{P,b}}{L_{a,b}} = \operatorname{arctg} \frac{0,15 - (-0,30)}{20,0} = \underline{1,29^\circ}$$

$$M_{P,a} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,15 = \underline{-150 \text{ kNm}}$$

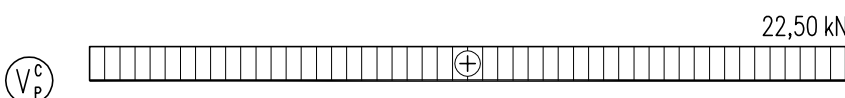
$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,30) = \underline{350 \text{ kNm}}$$



#### b) Celkové účinky od předpětí:

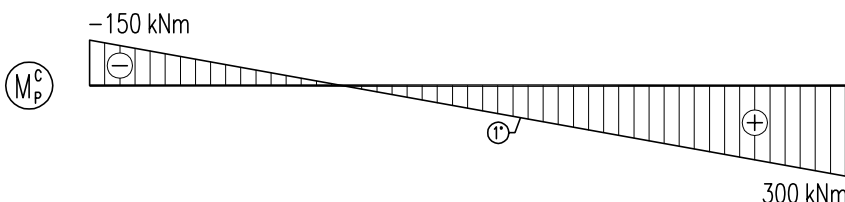


$$N_P^b = N_P^s = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_{P,a}^b = V_{P,a}^s = P_{V,a} = \underline{22,50 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^b = V_{P,b}^s = P_{V,a} = \underline{22,50 \text{ kN}}$$



$$M_{P,a}^b = M_{P,a}^s = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,15$$

$$M_{P,a}^b = M_{P,a}^s = \underline{-150 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^b = M_{P,b}^s = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,30)$$

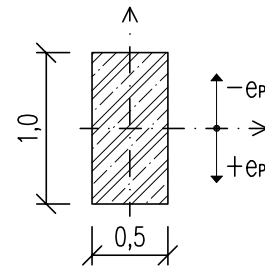
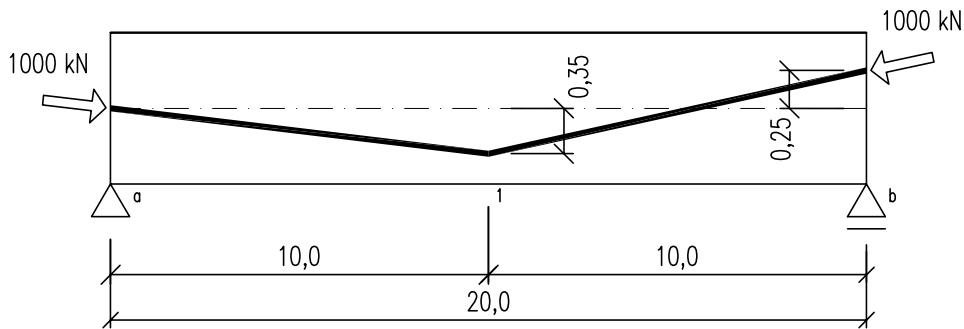
$$M_{P,b}^b = M_{P,b}^s = \underline{300,0 \text{ kNm}}$$

### 3.4 PŘÍKLAD Č.4

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 20,0$  m  
 $b_c = 0,5$  m  
 $h_c = 1,0$  m  
 $e_{p,a} = 0$  m  
 $e_{p,b} = -0,25$  m  
 $e_{p,1} = 0,35$  m  
 $P = 1000$  kN



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$P_{V,a} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 2,00 = \underline{-34,98 \text{ kN}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{p,1}}{L_{a,1}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e_{p,1}}{L_{a,1}} = \operatorname{arctg} \frac{0,35}{10,0} = \underline{2,00^\circ}$$

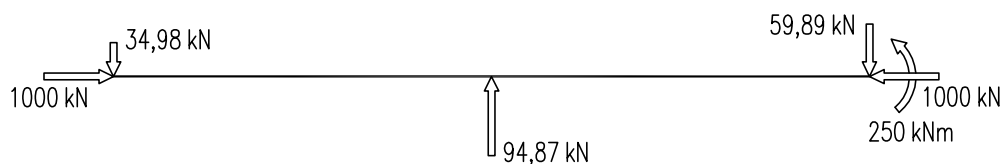
$$P_{V,b} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin (-3,43) = \underline{-59,89 \text{ kN}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e_{p,1} - e_{p,b}}{L_{1,b}} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \frac{e_{p,1} - e_{p,b}}{L_{1,b}} = \operatorname{arctg} \frac{0,35 - (-0,25)}{10,0} = \underline{-3,43^\circ}$$

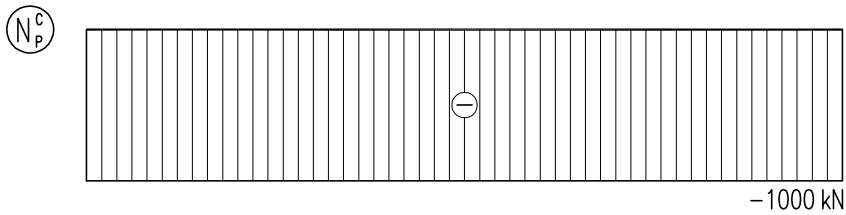
$$P_{V,1} = P_{V,a} + P_{V,b} = -(-34,98 - 59,89) = \underline{94,87 \text{ kN}}$$

$$M_{P,a} = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

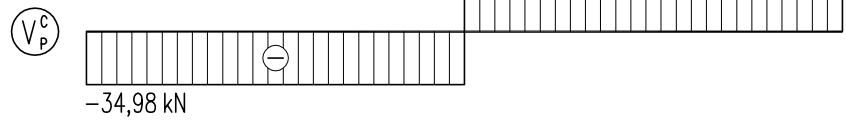
$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot (-0,25) = \underline{250 \text{ kNm}}$$



**b) Celkové účinky od předpětí:**



$$N_p^b = N_p^c = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



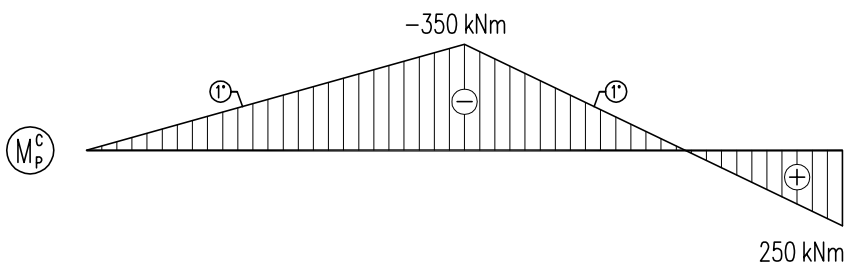
$$V_{p,a}^b = V_{p,a}^c = P_{v,a} = \underline{-34,98 \text{ kN}}$$

$$V_{p,1}^b = V_{p,1}^c = P_{v,a} = \underline{-34,98 \text{ kN}}$$

$$V_{p,1}'^b = V_{p,1}'^c = P_{v,a} + P_{v,1}$$

$$V_{p,1}'^b = V_{p,1}'^c = -34,98 + 94,87$$

$$V_{p,1}'^b = V_{p,1}'^c = \underline{59,89 \text{ kN}} = V_{p,c}^c$$



$$M_{p,a}^b = M_{p,a}^c = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0$$

$$M_{p,a}^b = M_{p,a}^c = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,1}^b = M_{p,1}^c = P_H \cdot e_{p,1} = -1000 \cdot 0,35$$

$$M_{p,1}^b = M_{p,1}^c = \underline{-350 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b}^b = M_{p,b}^c = P_H \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot (-0,25)$$

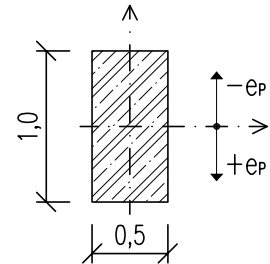
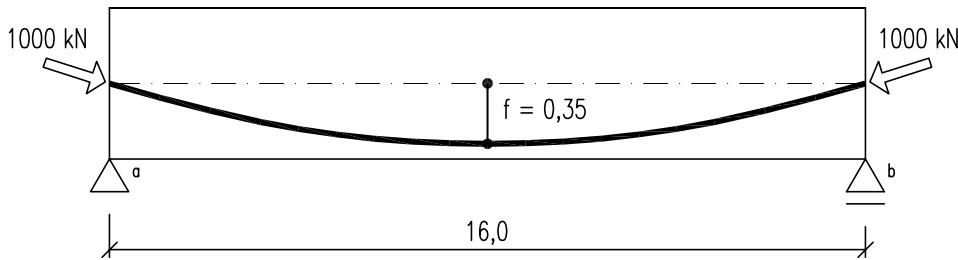
$$M_{p,b}^b = M_{p,b}^c = \underline{250 \text{ kNm}}$$

### 3.5 PŘÍKLAD Č.5

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- a) ekvivalentní silové účinky od předpětí
- b) celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 16,0$  m  
 $b_c = 0,5$  m  
 $h_c = 1,0$  m  
 $e_{p,a} = e_{p,b} = 0$  m  
 $P = 1000$  kN  
 $f = 0,35$  m



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,35}{16,0} = \frac{7}{320} \leq \frac{1}{15} \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f}{L} \cdot x$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod a)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot 0,35}{16,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,35}{16,0} = \underline{0,088} \Rightarrow \alpha = \underline{5,00^\circ}$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$  (bod b)

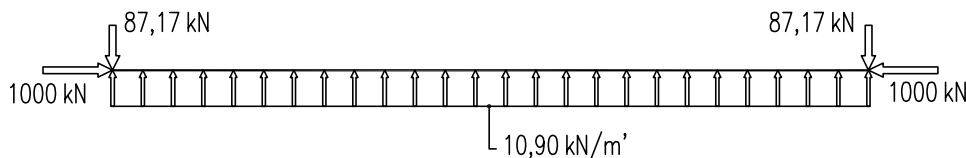
$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot 0,35}{16,0^2} \cdot 16,0 + \frac{4 \cdot 0,35}{16,0} = \underline{-0,088} \Rightarrow \beta = \underline{-5,00^\circ}$$

$$P_{v,a} = P_{v,b} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 5,00 = \underline{-87,17 \text{ kN}}$$

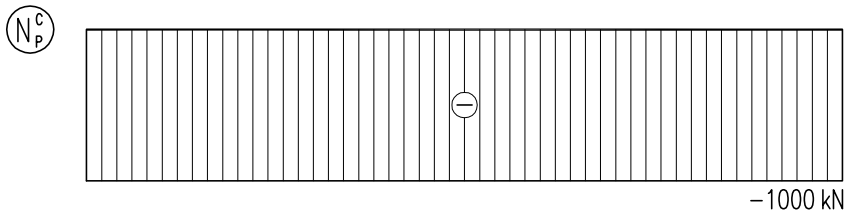
$$P_{v,1} = P_{v,2} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin (-5,00) = \underline{-87,17 \text{ kN}}$$

$$\rho_{a,b} = \frac{-(P_{v,a} + P_{v,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(-87,17 - 87,17)}{16,0} = \underline{10,90 \text{ kN/m'}}$$

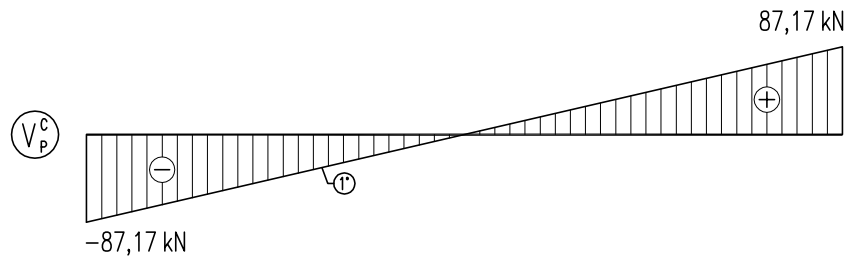
$$M_{p,a} = M_{p,b} = P \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0 = \underline{0 \text{ kNm}}$$



b) Celkové účinky od předpětí:



$$N_p^1 = N_p^2 = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

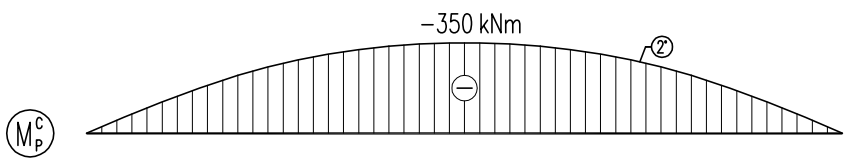


$$V_{p,a}^1 = V_{p,a}^2 = P_{V,a} = \underline{-87,17 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b}^1 = V_{p,b}^2 = P_{V,a} + p_{a,b} \cdot L_{a,b}$$

$$V_{p,b}^1 = V_{p,b}^2 = -87,17 + 10,90 \cdot 16,0$$

$$V_{p,b}^1 = V_{p,b}^2 = \underline{87,17 \text{ kN}}$$



$$M_{p,a}^1 = M_{p,a}^2 = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0$$

$$M_{p,a}^1 = M_{p,a}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,L/2}^1 = M_{p,L/2}^2 = P_H \cdot e_{P,L/2} = -1000 \cdot 0,35$$

$$M_{p,L/2}^1 = M_{p,L/2}^2 = \underline{-350 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b}^1 = M_{p,b}^2 = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot 0$$

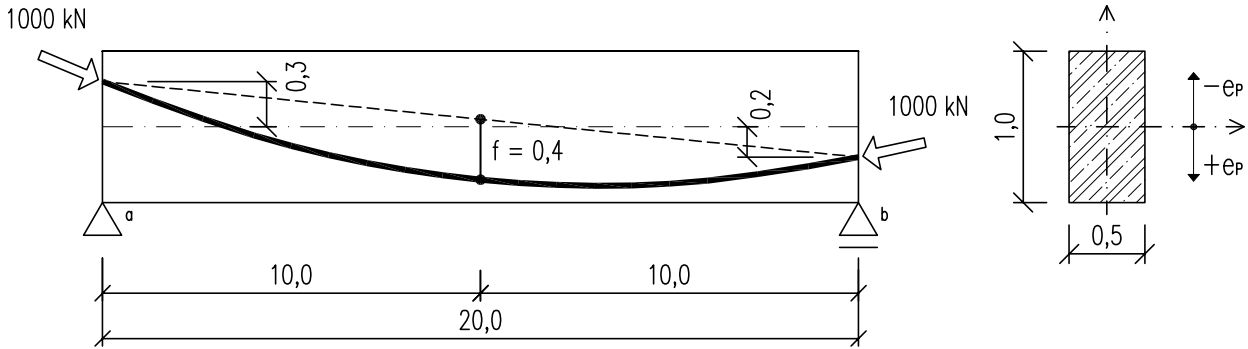
$$M_{p,b}^1 = M_{p,b}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

### 3.6 PŘÍKLAD Č.6

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí na konstrukci
- maximální předpínací sílu pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu

$L_{a,b} = 20,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{p,a} = -0,3 \text{ m}$   
 $e_{p,b} = 0,2 \text{ m}$   
 $f = 0,4 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,4}{20,0} = \frac{1}{50} \leq \frac{1}{15} \quad \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{p,a}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \quad \dots e = e_{p,b} - e_{p,a}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod a)

$$\text{tg } \alpha = y'(x=0) = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,4}{20,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,4 + 0,5}{20,0} = \underline{0,105} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \underline{5,99^\circ}$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$  (bod b)

$$\text{tg } \beta = y'(x=L) = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,4}{20,0^2} \cdot 20,0 + \frac{4 \cdot 0,4 + 0,5}{20,0} = \underline{-0,055} \quad \Rightarrow \quad \beta = \underline{-3,15^\circ}$$

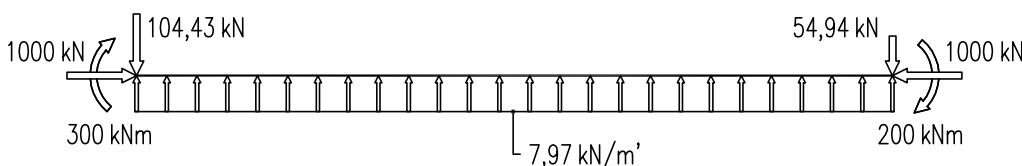
$$P_{V,a} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 5,99 = \underline{-104,43 \text{ kN}}$$

$$P_{V,b} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin (-3,15) = \underline{-54,92 \text{ kN}}$$

$$p_{a,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(-104,43 - 54,92)}{20,0} = \underline{7,97 \text{ kN/m'}}$$

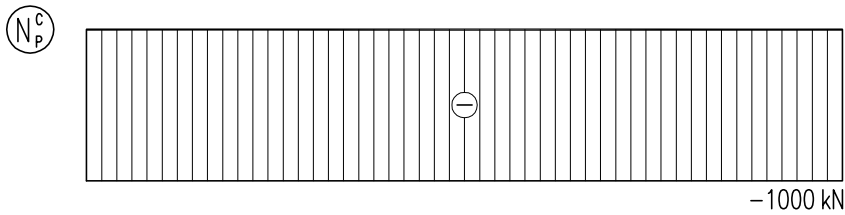
$$M_{P,a} = P \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot (-0,30) = \underline{300 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b} = P \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot 0,20 = \underline{-200 \text{ kNm}}$$

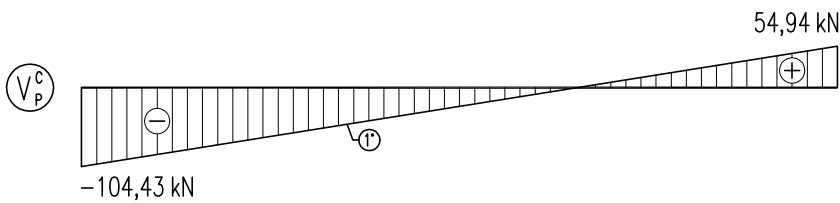




**b) Celkové účinky od předpětí:**



$$N_p^b = N_p^a = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

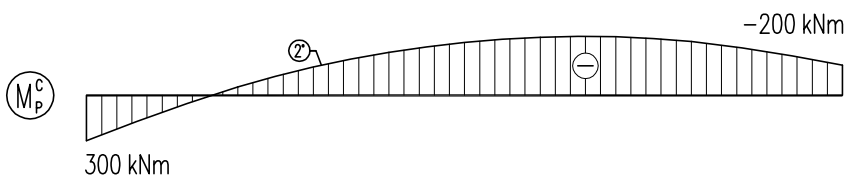


$$V_{p,a}^1 = V_{p,a}^c = P_{V,a} = \underline{-104,43 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b}^1 = V_{p,b}^c = P_{V,a} + p_{a,b} \cdot L_{a,b}$$

$$V_{p,b}^1 = V_{p,b}^c = -104,43 + 7,97 \cdot 20,0$$

$$V_{p,b}^1 = V_{p,b}^c = \underline{54,94 \text{ kN}}$$



$$M_{p,a}^1 = M_{p,a}^c = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot (-0,30)$$

$$M_{p,a}^1 = M_{p,a}^c = \underline{300 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b}^1 = M_{p,b}^c = P_H \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot 0,20$$

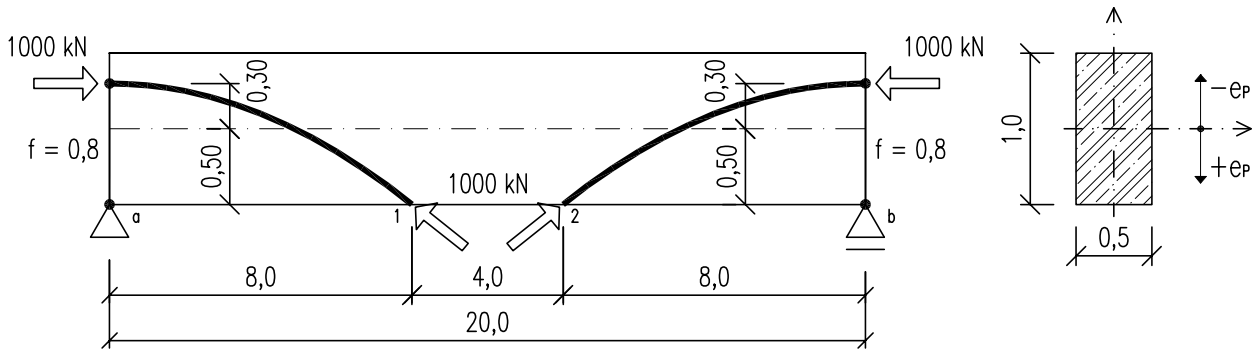
$$M_{p,b}^1 = M_{p,b}^c = \underline{-200 \text{ kNm}}$$

### 3.7 PŘÍKLAD Č.7

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- a) ekvivalentní silové účinky od předpětí
- b) celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 20,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = e_{P,b} = -0,30 \text{ m}$   
 $e_{P,1} = e_{P,2} = 0,50 \text{ m}$   
 $f = -0,80 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,8}{16,0} = 0,050 \leq \frac{1}{15} = 0,067 \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f}{L} \cdot x$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L}$$

Sklon tečny v místě:  $x = L/2$  (bod a,b)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=L/2)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,80)}{16,0^2} \cdot 8,0 + \frac{4 \cdot (-0,80)}{16,0} = 0,00 \Rightarrow \alpha = 0,00^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$  (bod 1,2)

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,80)}{16,0^2} \cdot 16,0 + \frac{4 \cdot (-0,80)}{16,0} = 0,20 \Rightarrow \beta = 11,31^\circ$$

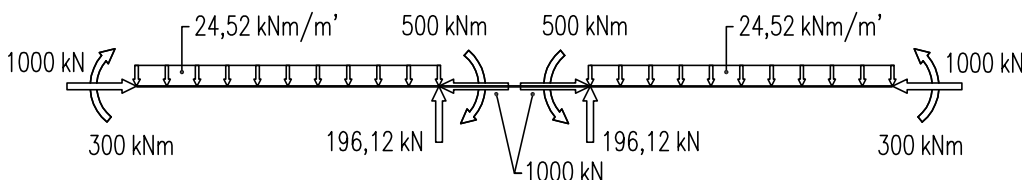
$$P_{V,a} = P_{V,b} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 0 = 0,0 \text{ kN}$$

$$P_{V,1} = P_{V,2} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin 11,31 = 196,12 \text{ kN}$$

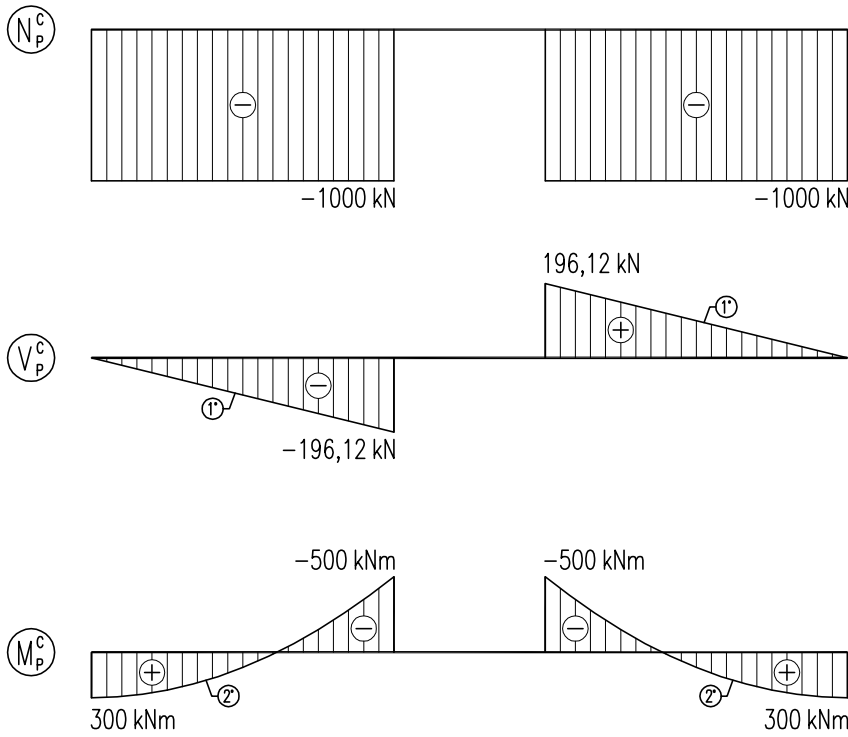
$$p_{a,1} = p_{2,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(0,0 + 196,12)}{8,0} = -24,52 \text{ kN/m'}$$

$$M_{P,a} = M_{P,b} = P \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,30) = 300 \text{ kNm}$$

$$M_{P,1} = M_{P,2} = P \cdot e_{P,1} = -1000 \cdot 0,50 = -500 \text{ kNm}$$



b) Celkové účinky od předpětí:



$$N_P^1 = N_P^2 = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$V_{P,a}^1 = V_{P,a}^2 = P_{V,a} = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$V_{P,1}^1 = -V_{P,2}^2 = -P_{V,1} = \underline{-196,12 \text{ kN}}$$

$$M_{P,a}^1 = M_{P,a}^2 = P \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,30)$$

$$M_{P,a}^1 = M_{P,a}^2 = \underline{300 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,1}^1 = M_{P,1}^2 = P \cdot e_{P,1} = -1000 \cdot 0,50$$

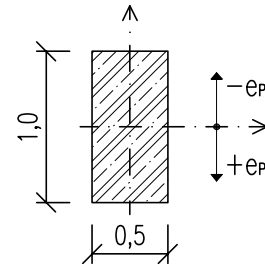
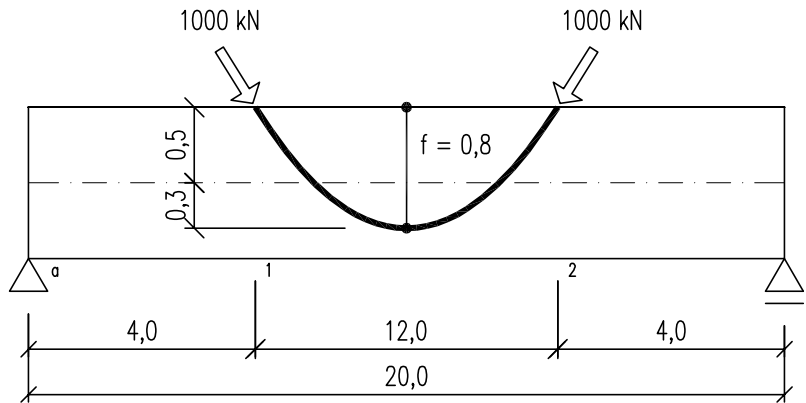
$$M_{P,1}^1 = M_{P,1}^2 = \underline{-500 \text{ kNm}}$$

### 3.8 PŘÍKLAD Č.8

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí na konstrukci

$$\begin{aligned} L_{a,b} &= 20,0 \text{ m} \\ b_c &= 0,5 \text{ m} \\ h_c &= 1,0 \text{ m} \\ e_{p,1} &= e_{p,2} = -0,5 \text{ m} \\ f &= 0,8 \text{ m} \\ P &= 1000 \text{ kN} \end{aligned}$$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,8}{12,0} = 0,066 \leq \frac{1}{15} = 0,067 \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f}{L} \cdot x + e_{p,1}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod 1)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot 0,8}{12,0^2} \cdot 0,0 + \frac{4 \cdot 0,8}{12,0} = 0,27 \Rightarrow \alpha = 14,93^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$  (bod 2)

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot 0,8}{12,0^2} \cdot 12,0 + \frac{4 \cdot 0,8}{12,0} = -0,27 \Rightarrow \beta = -14,93^\circ$$

$$P_{V,a} = P_{V,b} = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

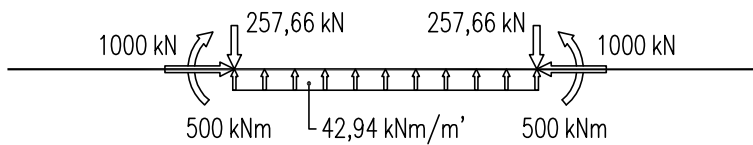
$$P_{V,1} = P_{V,2} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 14,93 = \underline{-257,66 \text{ kN}}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(-257,66 - 257,66)}{12,0} = \underline{42,94 \text{ kN/m'}}$$

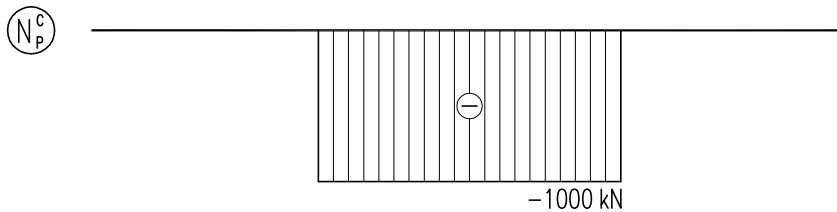
$$M_{P,a} = M_{P,b} = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,1} = M_{P,2} = P \cdot e_{p,1} = -1000 \cdot (-0,50) = \underline{500 \text{ kNm}}$$

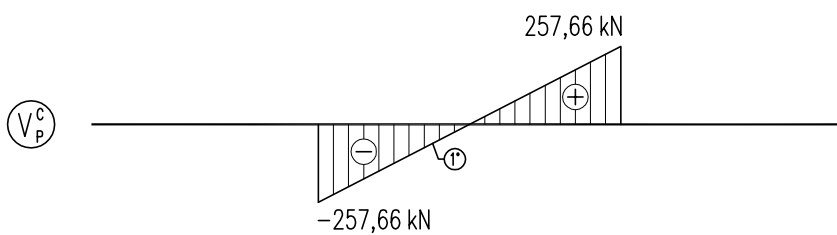
$$M_{P,L/2} = P \cdot e_{p,L/2} = -1000 \cdot 0,30 = \underline{-300 \text{ kNm}}$$



b) Celkové účinky od předpětí:



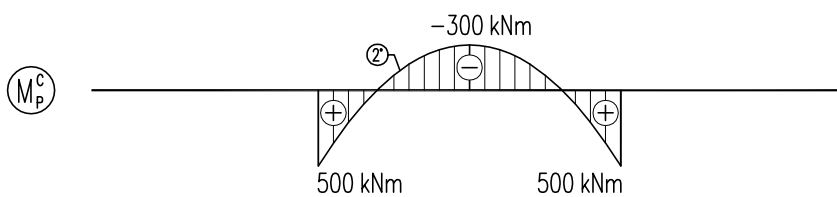
$$N_P^1 = N_P^2 = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_{P,a} = V_{P,a}^1 = P_{V,a} = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$V_{P,1}^1 = V_{P,1}^1 = P_{V,1} = \underline{-257,66 \text{ kN}}$$

$$V_{P,2}^1 = V_{P,2}^1 = -P_{V,2} = \underline{257,66 \text{ kN}}$$



$$M_{P,1}^1 = M_{P,1}^1 = P \cdot e_{P,1} = -1000 \cdot (-0,50)$$

$$M_{P,1}^1 = M_{P,1}^1 = \underline{500 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,L/2}^1 = M_{P,L/2}^1 = P \cdot e_{P,L/2} = -1000 \cdot 0,30$$

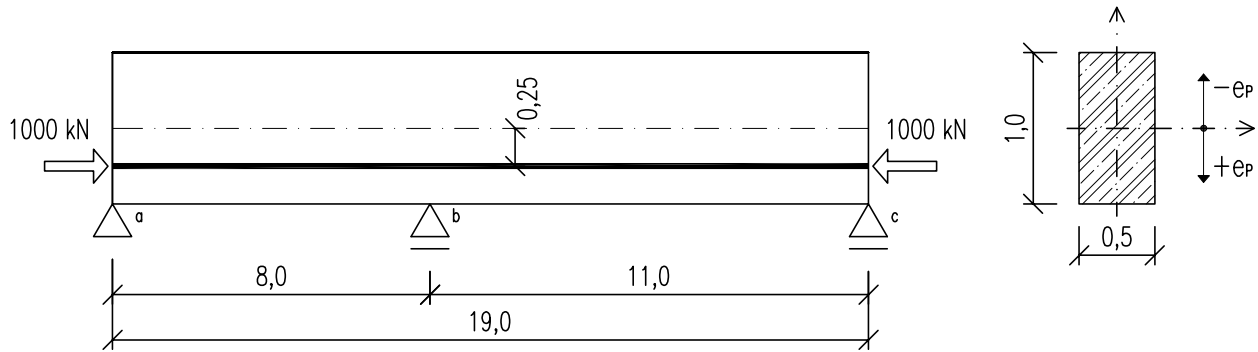
$$M_{P,L/2}^1 = M_{P,L/2}^1 = \underline{-300 \text{ kNm}}$$

### 3.9 PŘÍKLAD Č.9

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro spojitý nosník o dvou polích:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

$L_{a,b} = 8,0 \text{ m}$   
 $L_{b,c} = 11,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,c} = e_{P,b} = e_{P,a} = 0,25 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

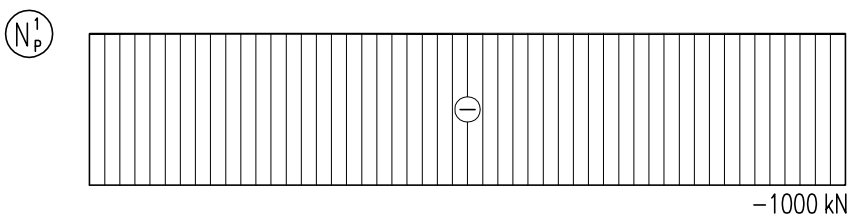
$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$P_{V,a} = P_{V,c} = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 0 = \underline{0 \text{ kN}} \quad \alpha \dots \text{odklon lana od střednice nosníku}$$

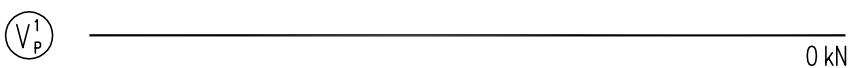
$$M_{P,a} = M_{P,b} = M_{P,c} = P \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,25 = \underline{-250 \text{ kNm}}$$



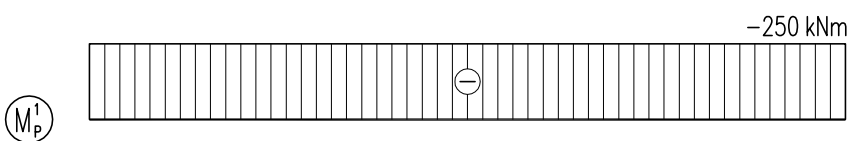
#### b) Primární účinky od předpětí:



$$N_P^I = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_{P,a}^I = V_{P,c}^I = P_{V,a} = \underline{0 \text{ kN}}$$

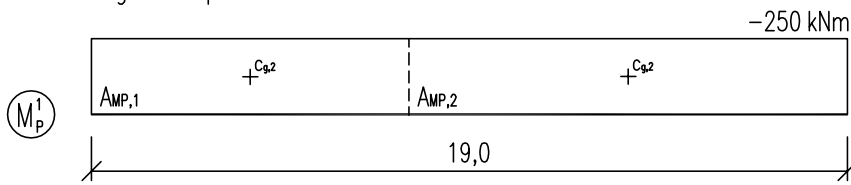


$$M_{P,a}^I = M_{P,c}^I = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,25$$

$$M_{P,a}^I = M_{P,c}^I = \underline{-250 \text{ kNm}}$$

c) Sekundární účinky od předpětí:

– Vereščaginovo pravidlo



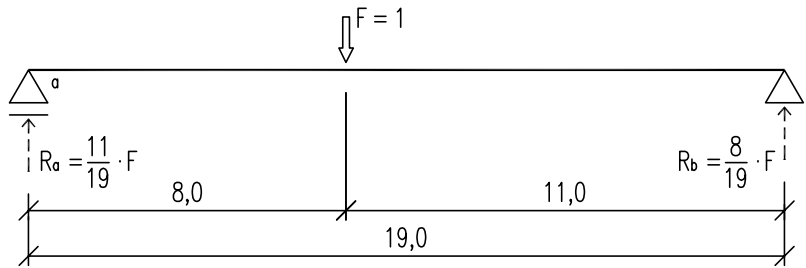
Primární účinky od předpětí  
– momentovým obrazec  $M_P$

$$AMP,1 = L_{a,b} \cdot M_P = 8,0 \cdot (-250)$$

$$AMP,1 = \underline{-2000 \text{ kNm}^2}$$

$$AMP,2 = L_{b,c} \cdot M_P = 11,0 \cdot (-250)$$

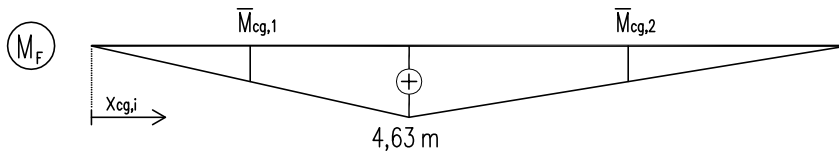
$$AMP,2 = \underline{-2750 \text{ kNm}^2}$$



Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou  $F$

$$R_a = \frac{L_{b,c}}{L_{a,b} + L_{b,c}} \cdot F = \frac{11,0}{19,0} \cdot 1,0 = \underline{0,58}$$

$$R_b = \frac{L_{a,b}}{L_{a,b} + L_{b,c}} \cdot F = \frac{8,0}{19,0} \cdot 1,0 = \underline{0,42}$$



$$M_F = R_a \cdot L_{a,b} = 0,58 \cdot 8,00 = \underline{4,63 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{M_F}{L_{a,b}} \cdot 0,5 \cdot L_{a,b} = \frac{4,63}{8,0} \cdot 0,5 \cdot 8,0$$

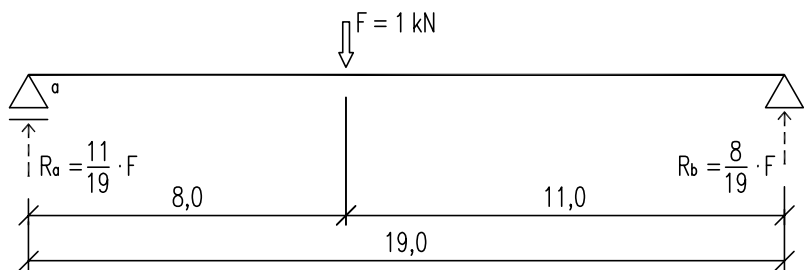
$$\bar{M}_{cg,1} = \underline{2,32 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,2} = \frac{M_F}{L_{b,c}} \cdot 0,5 \cdot L_{b,c} = \frac{4,63}{11,0} \cdot 0,5 \cdot 11,0$$

$$\bar{M}_{cg,2} = \underline{2,32 \text{ m}}$$

$$\delta_P = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_L M_P \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n AMP,i \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_P = (-2000) \cdot 2,32 + (-2750) \cdot 2,32 = \underline{-11000,0 \text{ m}}$$



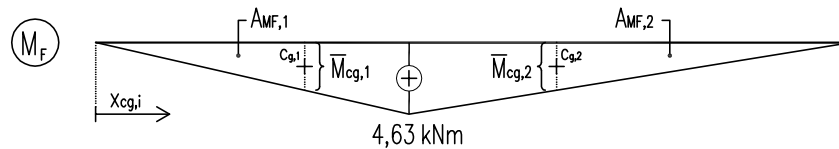
Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou  $F$

$$AMF,1 = 0,5 \cdot L_{a,b} \cdot M_F = 0,5 \cdot 8,0 \cdot 4,63$$

$$AMF,1 = \underline{18,52 \text{ kNm}^2}$$

$$AMF,2 = 0,5 \cdot L_{b,c} \cdot M_F = 0,5 \cdot 11,0 \cdot 4,63$$

$$AMF,2 = \underline{25,47 \text{ kNm}^2}$$



$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{M_F}{L_{a,b}} \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{a,b} = \frac{4,63}{8,00} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,00 = \underline{3,09 \text{ m}}$$

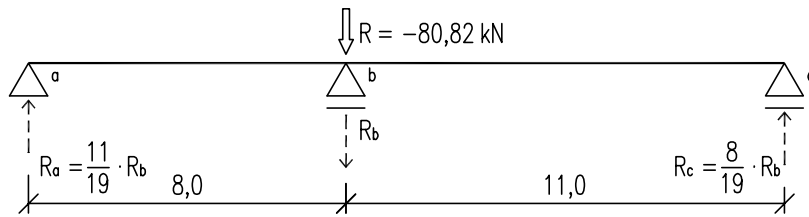
$$\bar{M}_{cg,2} = \frac{M_F}{L_{b,c}} \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{b,c} = \frac{4,63}{11,00} \cdot \frac{2}{3} \cdot 11,00 = \underline{3,09 \text{ m}}$$

$$\delta_I = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_L M_F \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n AMF,i \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_I = 18,52 \cdot 3,09 + 25,47 \cdot 3,09 = \underline{136,11 \text{ m} / \text{kN}}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí R:

$$R \cdot \delta_1 = \delta_P \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\delta_P}{\delta_1} = \frac{(-11000,00)}{136,11} = \underline{-80,82 \text{ kN}}$$

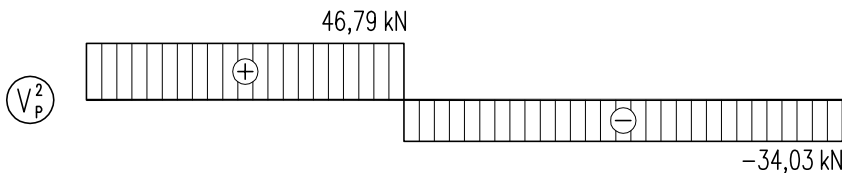


$$R_b = R = \underline{-80,82 \text{ kNm}}$$

$$R_a = \frac{11,0}{19,0} \cdot 139,60 = \underline{46,79 \text{ kN}}$$

$$R_c = \frac{8,0}{19,0} \cdot 139,60 = \underline{34,03 \text{ kN}}$$

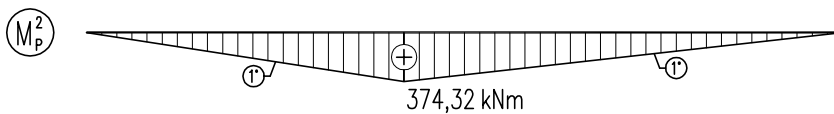
$$\textcircled{N_P^2} \quad \text{---} \quad 0 \text{ kN} \quad N_P^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = R_a = \underline{46,79 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^{2'} = V_{P,b} + R_b = 46,79 + (-80,82)$$

$$V_{P,b}^{2'} = V_{P,c}^2 = \underline{-34,04 \text{ kN}}$$

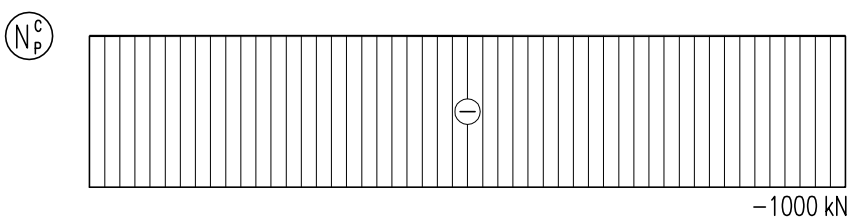


$$M_{P,a}^2 = M_{P,c}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^2 = R_a \cdot L_{a,b} = 46,79 \cdot 8,0$$

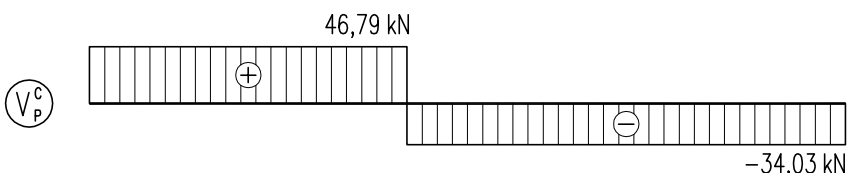
$$M_{P,b}^2 = \underline{374,32 \text{ kNm}}$$

d) Celkové účinky od předpětí:



$$N_P^C = N_P^1 + N_P^2$$

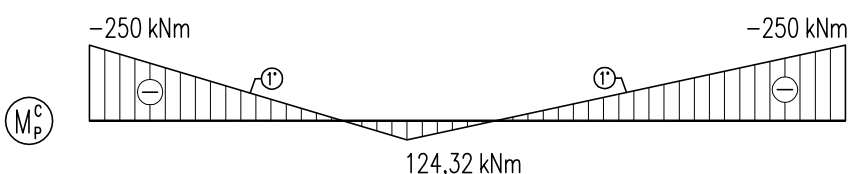
$$N_{P,a}^C = N_{P,c}^C = -1000 + 0 = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_P^C = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^C = V_{P,b}^C = 0 + 46,79 = \underline{46,79 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^{C'} = V_{P,c}^C = 0 + (-34,03) = \underline{-34,03 \text{ kN}}$$



$$M_P^C = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^C = M_{P,c}^C = -250 + 0 = \underline{-250 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^C = -250 + 374,32 = \underline{-124,32 \text{ kNm}}$$

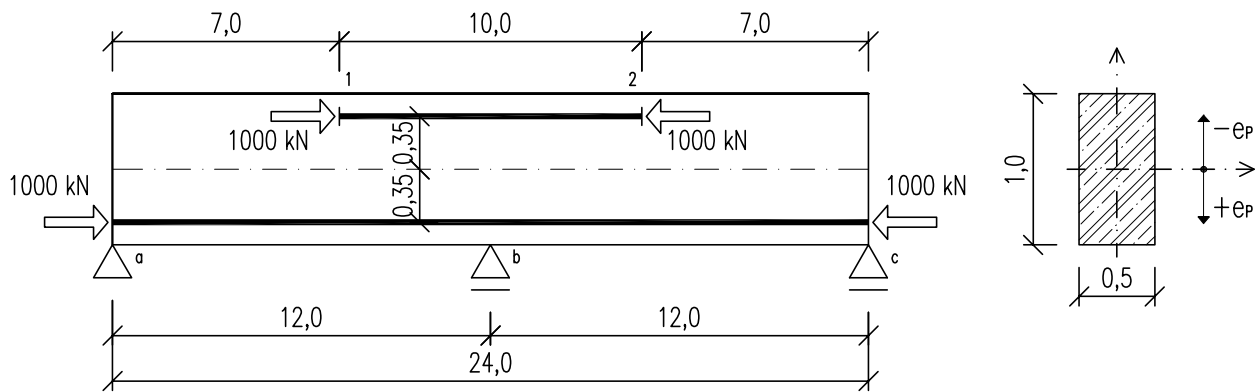


### 3.10 PŘÍKLAD Č.10

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro spojitý nosník o dvou polích:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

$L_{a,b} = 12,0 \text{ m} = L_{b,c} = 12,0 \text{ m}$   
 $L_{1,2} = 10,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = e_{P,b} = e_{P,c} = 0,35 \text{ m}$   
 $e_{P,1} = e_{P,2} = -0,35 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_{H,a} = P_{H,c} = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

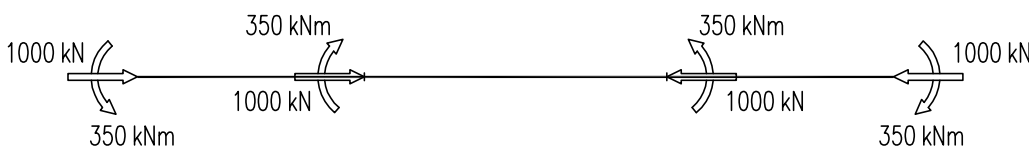
$$P_{H,1} = P_{H,2} = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$P_{V,a} = P_{V,c} = P_{V,1} = P_{V,2} = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 0 = \underline{0 \text{ kN}}$$

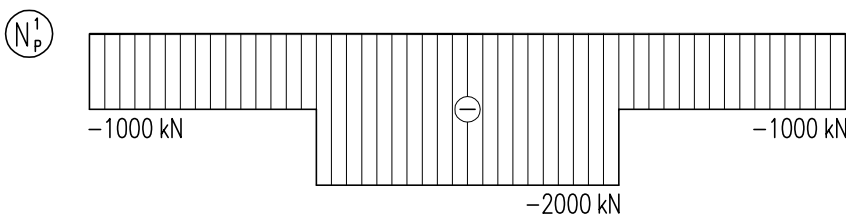
$\alpha$  ... odklon lana od střednice nosníku

$$M_{P,a} = M_{P,b} = M_{P,c} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,35 = \underline{-350 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,1} = M_{P,2} = P_H \cdot e_{P,1} = -1000 \cdot (-0,35) = \underline{350 \text{ kNm}}$$



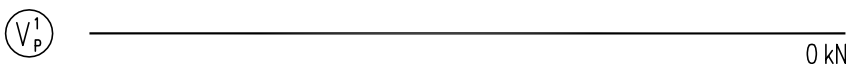
#### b) Primární účinky od předpětí:



$$N_{P,a}^1 = N_{P,c}^1 = P_{H,a} = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$N_{P,1}^1 = N_{P,2}^1 = N_{P,a}^1 + P_{H,1} = -1000 + (-1000)$$

$$N_{P,1}^1 = N_{P,2}^1 = \underline{-2000 \text{ kN}}$$



$$V_{P,a}^1 = V_{P,c}^1 = P_{V,a} = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$M_{P,a}^1 = M_{P,c}^1 = P_{H,a} \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,35$$

$$M_{P,a}^1 = M_{P,c}^1 = -350 \text{ kNm}$$

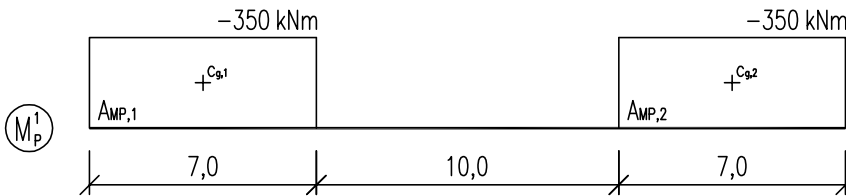
$$M_{P,1}^1 = M_{P,2}^1 = P_{H,a} \cdot e_{P,a} + P_{H,1} \cdot e_{P,1}$$

$$M_{P,1}^1 = M_{P,2}^1 = -1000 \cdot 0,35 + (-1000) \cdot (-0,35)$$

$$M_{P,1}^1 = M_{P,2}^1 = 0 \text{ kNm}$$

c) Sekundární účinky od předpětí:

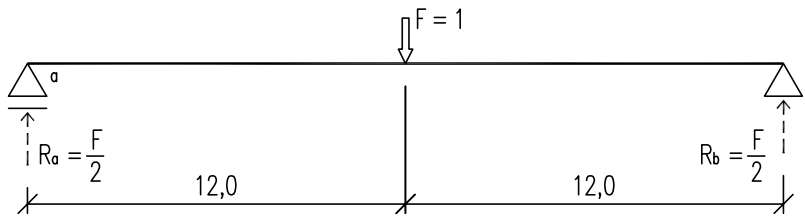
– Vereščaginovo pravidlo



Primární účinky od předpětí  
– momentovým obrazec  $M^b$

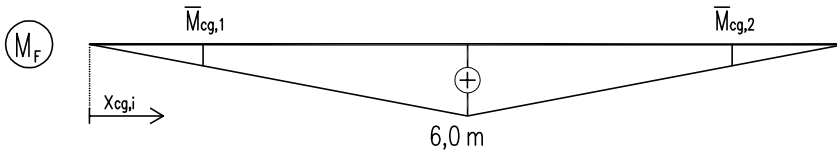
$$A_{MP,1} = A_{MP,2} = 7,0 \cdot M_P^1 = 7,0 \cdot (-350)$$

$$A_{MP,1} = A_{MP,2} = -2450 \text{ kNm}^2$$



Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou F

$$M_F = R_a \cdot 12,0 = \frac{1,0}{2} \cdot 12,0 = 6,0 \text{ m}$$

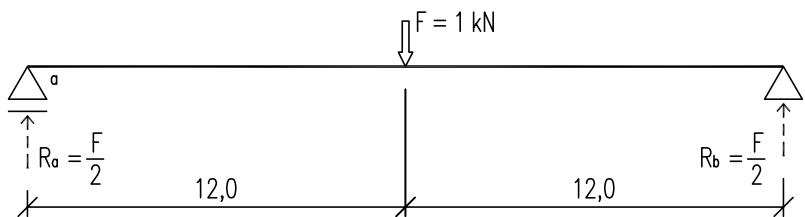


$$\bar{M}_{cg,1} = \bar{M}_{cg,2} = \frac{M_F}{L_{a,b}} \cdot x_{cg,1} = \frac{6,0}{12,0} \cdot 3,5$$

$$\bar{M}_{cg,1} = \bar{M}_{cg,2} = 1,75 \text{ m}$$

$$\delta_P = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_L M_P \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{MP,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_P = 2 \cdot (-2450) \cdot 1,75 = -8575,0 \text{ m}$$

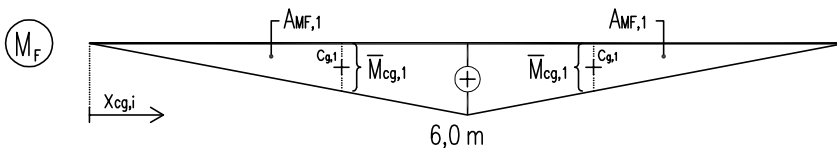


Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou F

$$A_{MF,1} = 0,5 \cdot 12,0 \cdot 6,0 = 36,0 \text{ kNm}^2$$

$$M_F = R_a \cdot 12,0 = \frac{1,0}{2} \cdot 12,0 = 6,0 \text{ m}$$

$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{6,0}{12,0} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 12,0\right) = 4,0 \text{ m}$$

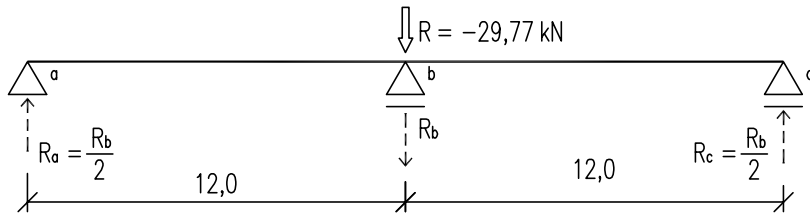


$$\delta_I = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_L M_F \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{MF,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_I = 2 \cdot 36,0 \cdot 4,0 = 288,0 \text{ m / kN}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí R:

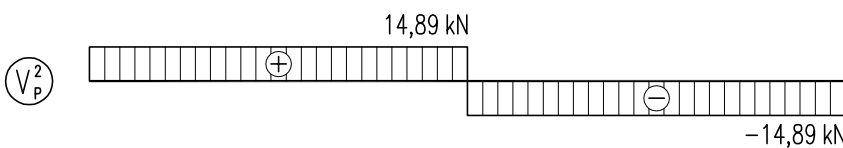
$$R \cdot \delta_1 = \delta_P \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\delta_P}{\delta_1} = \frac{(-8575,0)}{288,0} = \underline{\underline{-29,77 \text{ kN}}}$$



$$R_b = R = \underline{\underline{-29,77 \text{ kNm}}}$$

$$R_a = R_c = -\frac{R_b}{2} = -\frac{-29,77}{2} = \underline{\underline{14,89 \text{ kN}}}$$

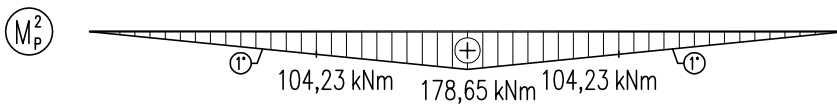
$$N_P^2 = 0 \text{ kN} \quad N_P^2 = \underline{\underline{0 \text{ kN}}}$$



$$V_{P,a} = R_a = \underline{\underline{14,89 \text{ kN}}}$$

$$V_{P,b} = \pm R_b / 2 = \underline{\underline{\pm 14,89 \text{ kN}}}$$

$$V_{P,c} = -R_c = \underline{\underline{-14,89 \text{ kN}}}$$



$$M_{P,a} = M_{P,c} = \underline{\underline{0 \text{ kNm}}}$$

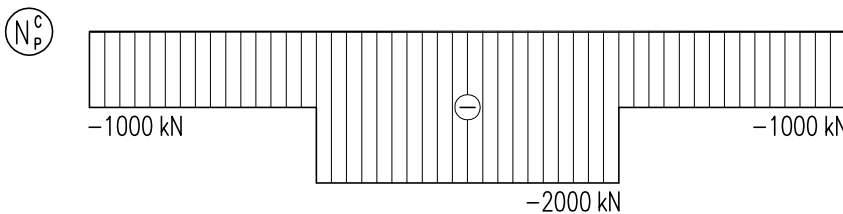
$$M_{P,x} = R_a \cdot 7,0 = 14,89 \cdot 7,0$$

$$M_{P,x} = \underline{\underline{104,23 \text{ kNm}}}$$

$$M_{P,b} = R_a \cdot 12,0 = 14,89 \cdot 12,0$$

$$M_{P,b} = \underline{\underline{178,65 \text{ kNm}}}$$

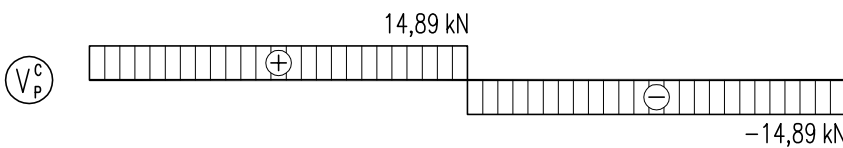
**d) Celkové účinky od předpětí:**



$$N_P^c = N_P^1 + N_P^2$$

$$N_{P,a} = N_{P,c} = -1000 + 0 = \underline{\underline{-1000 \text{ kN}}}$$

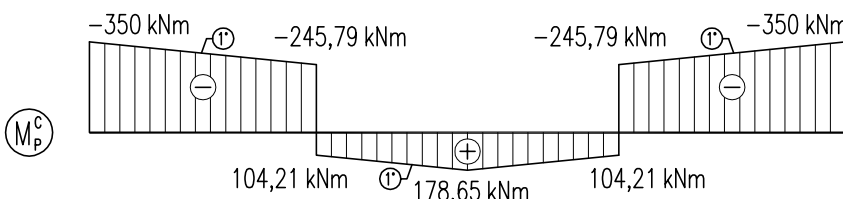
$$N_{P,1} = N_{P,2} = -2000 + 0 = \underline{\underline{-2000 \text{ kN}}}$$



$$V_P^c = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^c = 0 + 14,89 = \underline{\underline{14,89 \text{ kN}}}$$

$$V_{P,a}^c = 0 + (-14,89) = \underline{\underline{-14,89 \text{ kN}}}$$



$$M_P^c = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^c = M_{P,c}^c = -350 + 0 = \underline{\underline{-350 \text{ kNm}}}$$

$$M_{P,b}^c = 0 + 178,65 = \underline{\underline{178,65 \text{ kNm}}}$$

$$M_{P,1}^c = M_{P,2}^c = -350 + \frac{178,65}{12,0} \cdot 7,0$$

$$M_{P,1}^c = M_{P,2}^c = \underline{\underline{-245,79 \text{ kNm}}}$$

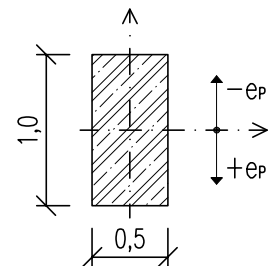
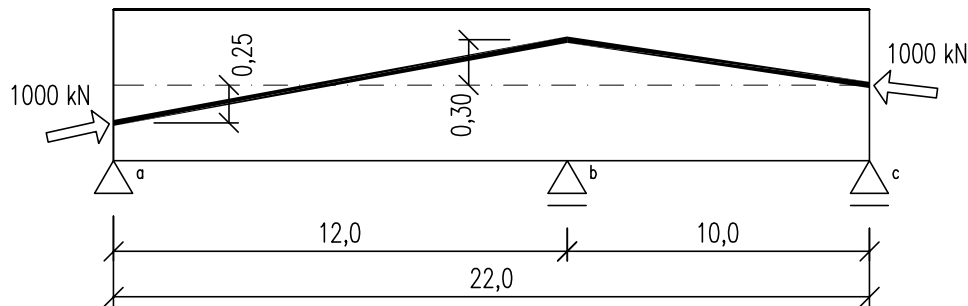
$$M_{P,1}^c = M_{P,2}^c = \frac{178,65}{12,0} \cdot 7,0 = \underline{\underline{104,21 \text{ kNm}}}$$

### 3.11 PŘÍKLAD Č.11

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro spojitý nosník o dvou polích:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

$L_{a,b} = 12,0 \text{ m}$   
 $L_{b,c} = 10,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{p,a} = 0,25 \text{ m}$   
 $e_{p,b} = -0,30 \text{ m}$   
 $e_{p,c} = 0,00 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$P_{V,a} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin (-2,62) = 45,79 \text{ kN}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{p,a} - e_{p,b}}{L_{a,b}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{0,25 - (-0,30)}{12,0} = \operatorname{arctg} \frac{0,55}{12,0} = -2,62^\circ$$

$$P_{V,c} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin 1,72 = 30,02 \text{ kN}$$

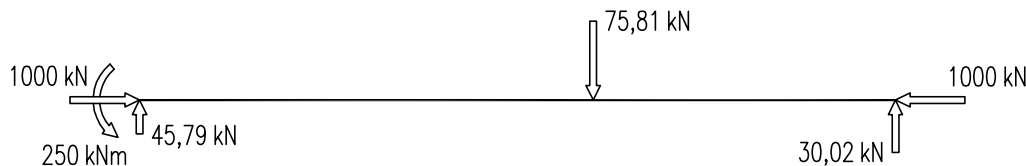
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e_{p,b}}{L_{b,c}} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \frac{0,30}{10,0} = 1,72^\circ$$

$$P_{V,b} = P_{V,a} + P_{V,c} = -(45,79 + 30,02) = -75,81 \text{ kN}$$

$$M_{P,a} = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0,25 = -250 \text{ kNm}$$

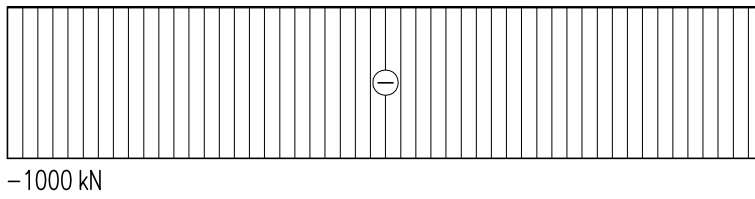
$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot (-0,30) = 300 \text{ kNm}$$

$$M_{P,c} = P_H \cdot e_{p,c} = -1000 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$



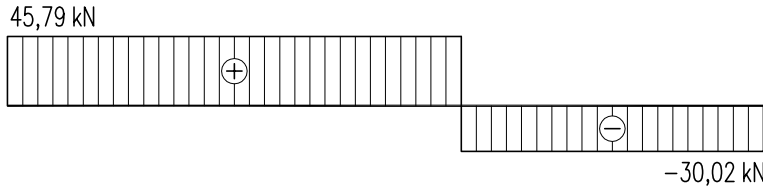
**b) Primární účinky od předpětí:**

(N<sub>P</sub><sup>1</sup>)



$$N_P^1 = P_H = -1000 \text{ kN}$$

(V<sub>P</sub><sup>1</sup>)

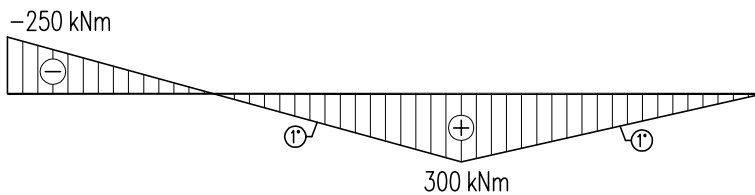


$$V_{P,a}^1 = V_{P,b}^1 = P_{v,a} = 45,79 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^1 = V_{P,b}^1 + P_{v,b} = 45,79 + (-75,81)$$

$$V_{P,b}^1 = V_{P,c}^1 = -30,02 \text{ kN}$$

(M<sub>P</sub><sup>1</sup>)



$$M_{P,a}^1 = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0,25 = -250 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b}^1 = P_H \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot (-0,30)$$

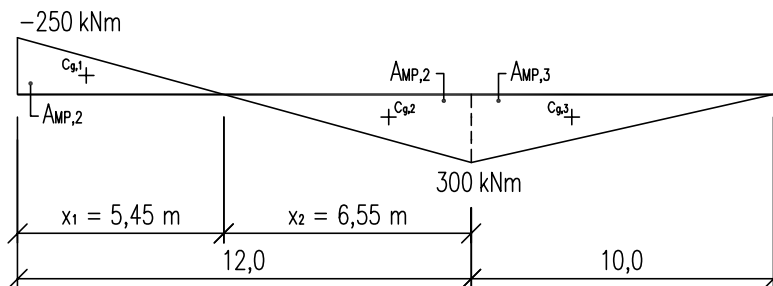
$$M_{P,b}^1 = 300 \text{ kNm}$$

$$M_{P,c}^1 = P_H \cdot e_{p,c} = -1000 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

**b) Sekundární účinky od předpětí:**

– Vereščaginovo pravidlo

(M<sub>P</sub><sup>1</sup>)



Primární účinky od předpětí  
– momentovým obrazec M<sub>P</sub>

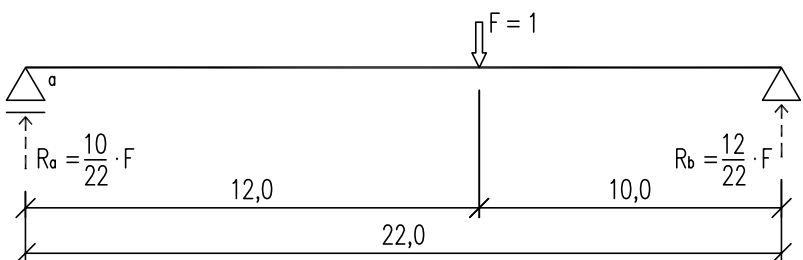
$$x_1 = \frac{12,0}{250 + 300} \cdot 250 = 5,45 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{12,0}{250 + 300} \cdot 300 = 6,55 \text{ m}$$

$$AMP,1 = 0,5 \cdot x_1 \cdot M_{P,a}^1 = 0,5 \cdot 5,45 \cdot (-250) = -681,25 \text{ kNm}^2$$

$$AMP,2 = 0,5 \cdot x_2 \cdot M_{P,b}^1 = 0,5 \cdot 6,55 \cdot 300 = 982,50 \text{ kNm}^2$$

$$AMP,3 = 0,5 \cdot L_{b,c} \cdot M_{P,b}^1 = 0,5 \cdot 10,0 \cdot 300 = 1500,00 \text{ kNm}^2$$

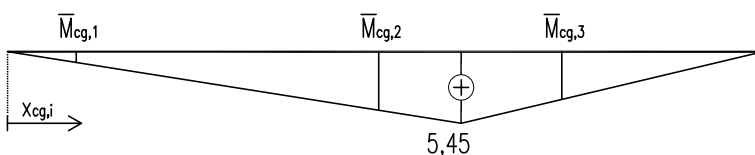


Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou F

$$R_a = \frac{L_{b,c}}{L_{a,b} + L_{b,c}} \cdot F = \frac{10,0}{22,0} \cdot 1,0 = 0,45$$

$$R_b = \frac{L_{a,b}}{L_{a,b} + L_{b,c}} \cdot F = \frac{12,0}{22,0} \cdot 1,0 = 0,55$$

(M<sub>F</sub>)



$$M_F = R_a \cdot L_{a,b} = 0,45 \cdot 12,00 = 5,45 \text{ m}$$

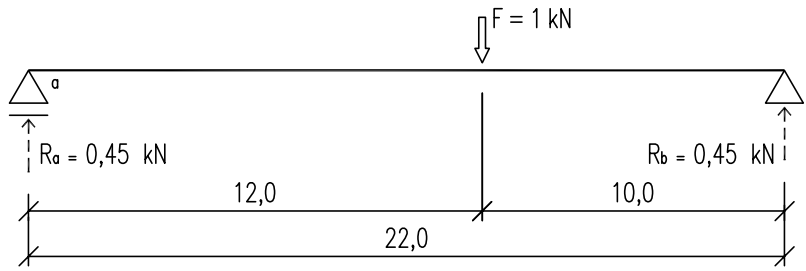
$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{M_F}{L_{a,b}} \cdot \frac{1}{3} \cdot x_1 = \frac{5,45}{12,00} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,45 = \underline{0,83 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,2} = \frac{M_F}{L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} - \frac{1}{3} \cdot x_2) = \frac{5,45}{12,00} \cdot (12,00 - \frac{1}{3} \cdot 6,55) = \underline{4,46 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,3} = \frac{M_F}{L_{b,c}} \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{b,c} = \frac{5,45}{10,00} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10,00 = \underline{3,63 \text{ m}}$$

$$\delta_P = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_L M_P \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{M_P,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_P = - 681,25 \cdot 0,83 + 982,50 \cdot 4,46 + 1500,00 \cdot 3,63 = \underline{9261,51 \text{ kNm}^3}$$



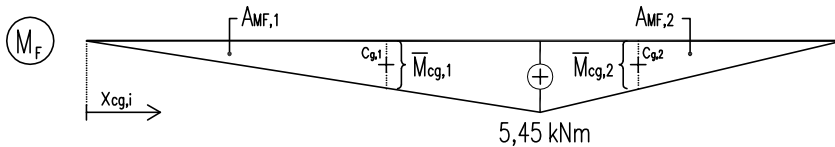
Statically určitý virtuální nosník zatížený jednotkovou silou F

$$A_{M_F,1} = 0,5 \cdot L_{a,b} \cdot M_F = 0,5 \cdot 12,0 \cdot 5,45$$

$$A_{M_F,1} = \underline{32,70 \text{ kNm}^2}$$

$$A_{M_F,2} = 0,5 \cdot L_{b,c} \cdot M_F = 0,5 \cdot 10,0 \cdot 5,45$$

$$A_{M_F,2} = \underline{27,25 \text{ kNm}^2}$$



$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{M_F}{L_{a,b}} \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{a,b} = \frac{5,45}{12,00} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12,00 = \underline{3,63 \text{ m}}$$

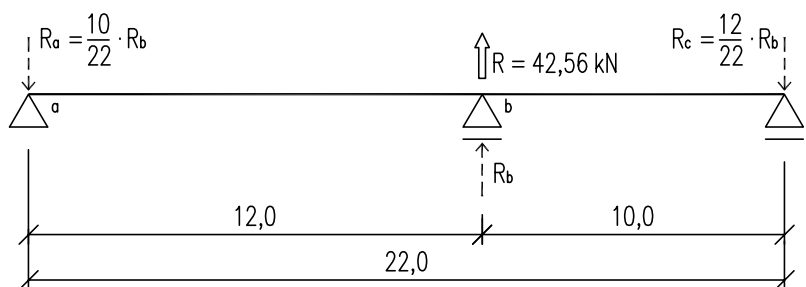
$$\bar{M}_{cg,2} = \frac{M_F}{L_{b,c}} \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{b,c} = \frac{5,45}{10,00} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10,00 = \underline{3,63 \text{ m}}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{E^* I_y} \cdot \int_L M_F \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{M_F,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_1 = 32,70 \cdot 3,63 + 27,25 \cdot 3,63 = \underline{217,62 \text{ kNm}^3}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí R:

$$R^* \delta_1 = \delta_P \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\delta_P}{\delta_1} = \frac{9261,51}{217,62} = \underline{42,56 \text{ kN}}$$



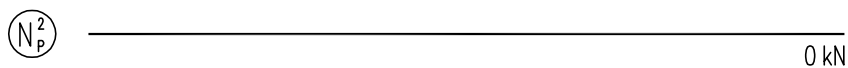
$$R_b = R = \underline{42,56 \text{ kNm}}$$

$$R_a = - \frac{L_{b,c}}{L_{a,b} + L_{b,c}} \cdot R_b = \frac{10,0}{22,0} \cdot 42,56$$

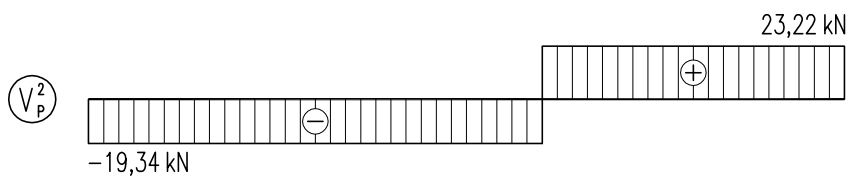
$$R_a = \underline{-19,34 \text{ kN}}$$

$$R_c = - \frac{L_{a,b}}{L_{a,b} + L_{b,c}} \cdot R_b = \frac{12,0}{22,0} \cdot 42,56$$

$$R_c = \underline{-23,22 \text{ kN}}$$



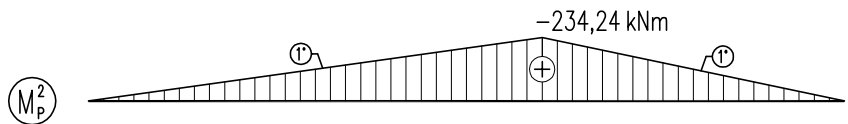
$$N_p^2 = 0 \text{ kN}$$



$$V_{p,a}^2 = V_{p,b}^2 = R_a = -19,34 \text{ kN}$$

$$V_{p,b}^{\prime 2} = V_{p,c}^2 = V_{p,b}^2 + R_b = -19,34 + 42,56$$

$$V_{p,b}^{\prime 2} = V_{p,c}^2 = 23,22 \text{ kN}$$

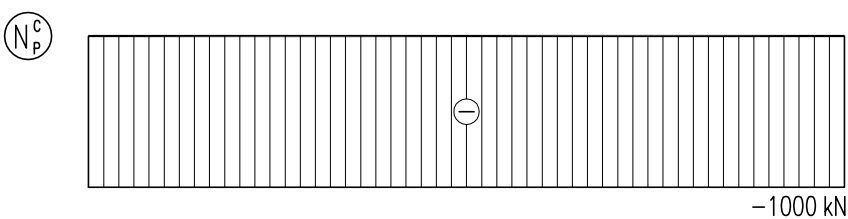


$$M_{p,a}^2 = M_{p,c}^2 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{p,b}^2 = R_a \cdot L_{a,b} = -19,34 \cdot 12,0$$

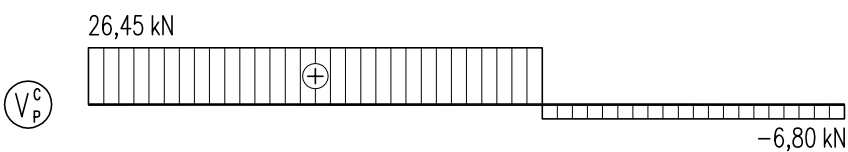
$$M_{p,b}^2 = -232,08 \text{ kNm}$$

d) Celkové účinky od předpětí:



$$N_p^c = N_p^1 + N_p^2$$

$$N_{p,a}^c = N_{p,c}^c = -1000 + 0 = -1000 \text{ kN}$$

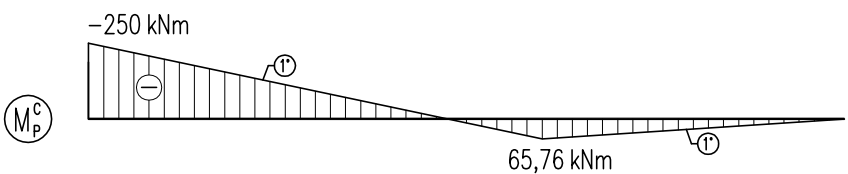


$$V_p^c = V_p^1 + V_p^2$$

$$V_{p,a}^c = V_{p,b}^c = 45,79 - 19,34 = 26,45 \text{ kN}$$

$$V_{p,b}^{\prime c} = V_{p,c}^c = -30,02 + 23,22$$

$$V_{p,b}^{\prime c} = V_{p,c}^c = -6,80 \text{ kN}$$



$$M_p^c = M_p^1 + M_p^2$$

$$M_{p,a}^c = -250 + 0 = -250 \text{ kNm}$$

$$M_{p,b}^c = 300 + (-232,08) = 67,92 \text{ kNm}$$

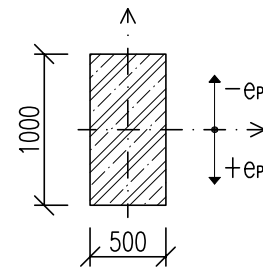
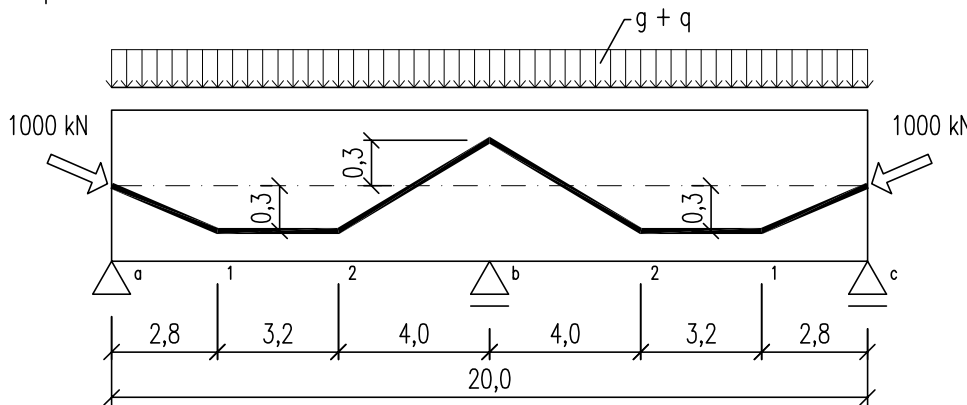
$$M_{p,c}^c = 0 + 0 = 0 \text{ kNm}$$

### 3.12 PŘÍKLAD Č.12

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro spojitý nosník o dvou polích:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí na konstrukci
- celkové účinky od předpětí na konstrukci
- maximální předpínací sílu pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu

$L_{a,b} = L_{b,c} = 10,0$  m  
 $b_c = 0,3$  m  
 $h_c = 1,0$  m  
 $e_{p,a} = e_{p,c} = 0,0$  m  
 $e_{p,b} = -0,3$  m  
 $e_{p,1} = e_{p,2} = 0,3$  m  
 $P = 1000$  kN  
 $g + q = 50,0$  kN/m'



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

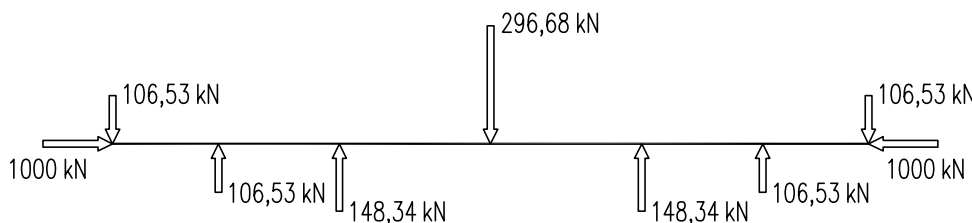
$$P_{v,1} = -P_{v,a} = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 6,12 = 106,53 \text{ kN}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{p,1}}{L_{a,1}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e_{p,1}}{L_{a,1}} = \operatorname{arctg} \frac{0,3}{2,8} = 6,12^\circ$$

$$P_{v,2} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin 8,53 = 148,34 \text{ kN}$$

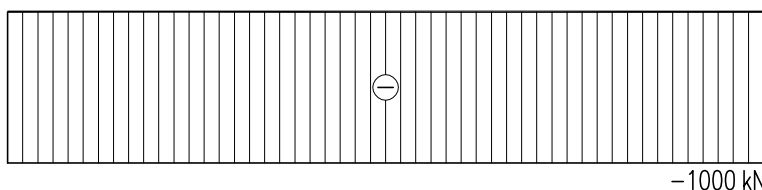
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e_{p,2} - e_{p,b}}{L_{2,b}} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \frac{e_{p,2} - e_{p,b}}{L_{2,b}} = \operatorname{arctg} \frac{0,3 - (-0,3)}{4,0} = 8,53^\circ$$

$$P_{v,b} = -2 \cdot P_{v,2} = -2 \cdot 148,34 = -296,68 \text{ kN}$$



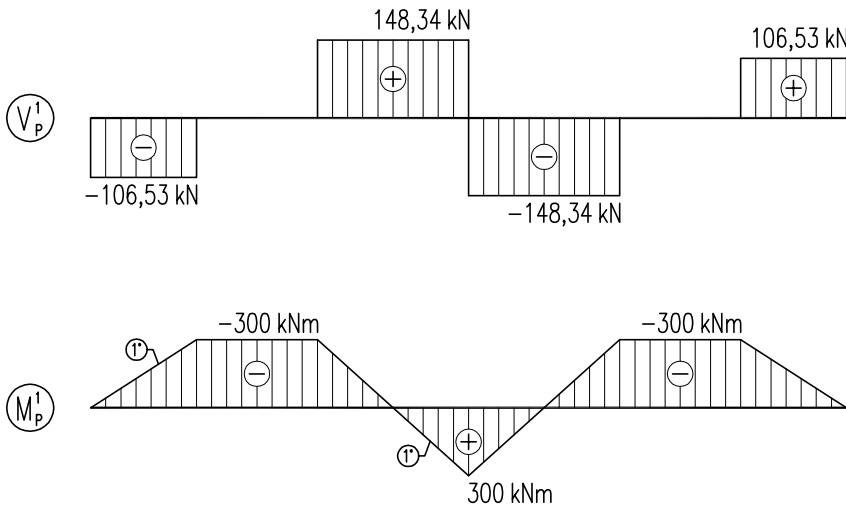
#### b) Primární účinky od předpětí:

$(N_p^i)$



$$N_p^i = P_H = -1000 \text{ kN}$$





$$V_{p,a} = P_{v,a} = \underline{-106,53 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b} = P_{v,2} = \underline{148,34 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b'} = P_{v,2} - P_{v,b} = 148,34 - 296,68$$

$$V_{p,b'} = \underline{-148,34 \text{ kN}}$$

$$V_{p,c} = -P_{v,a} = \underline{106,53 \text{ kN}}$$

$$M_{p,a} = M_{p,c} = P \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,1} = M_{p,2} = P \cdot e_{p,1} = -1000 \cdot 0,3$$

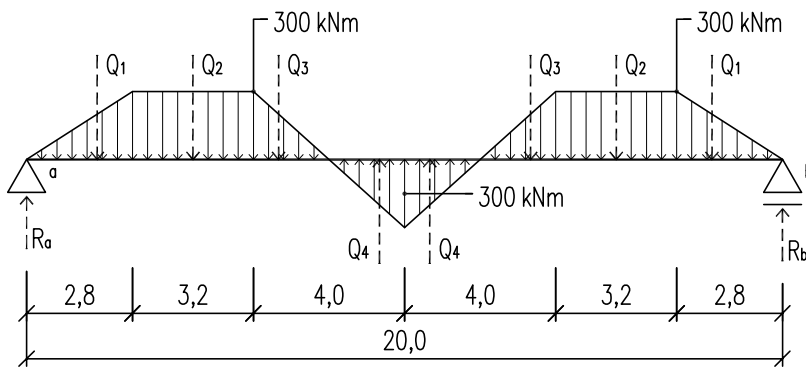
$$M_{p,1} = M_{p,2} = \underline{-300 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b} = P \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot (-0,3)$$

$$M_{p,b} = \underline{300 \text{ kNm}}$$

c) Sekundární účinky od předpětí:

c.1) Mohrova analogie



Statically určitý duální nosník zatížený momentovým obrazcem  $\bar{M}_p$

$$Q_1 = 0,5 \cdot 2,8 \cdot (-300) = \underline{-420 \text{ kNm}^2}$$

$$Q_2 = 3,2 \cdot (-300) = \underline{-960 \text{ kNm}^2}$$

$$Q_3 = 0,5 \cdot 2,0 \cdot (-300) = \underline{-300 \text{ kNm}^2}$$

$$Q_4 = 0,5 \cdot 2,0 \cdot 300 = \underline{300 \text{ kNm}^2}$$

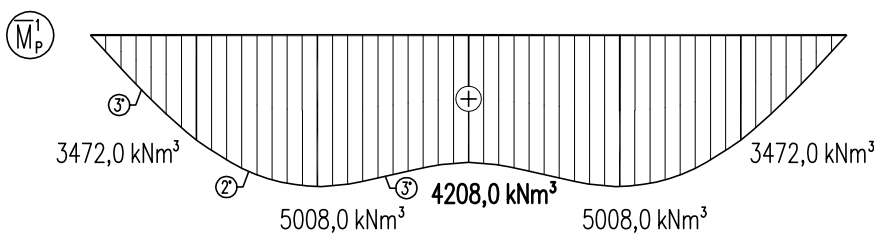
$$\Sigma F_{i,z} = 0: R_a + 2 \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) + R_b = 0$$

$$R_a + 2 \cdot (-420 - 960 - 300 + 300) + R_b = 0 \quad \dots \quad R_a = R_b = R = \underline{1380 \text{ kNm}^2}$$

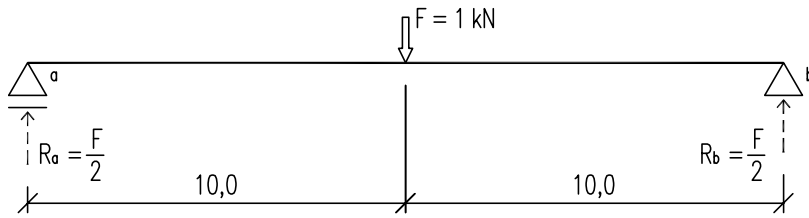
$$\bar{M}_p(x = L/2) = R_a \cdot 10,0 - Q_1 \cdot (10,0 - \frac{2}{3} \cdot 2,8) - Q_2 \cdot 5,6 - Q_3 \cdot (4,0 - \frac{1}{3} \cdot 2,0) + Q_4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,0$$

$$= 1380 \cdot 10,0 - 420 \cdot (10,0 - \frac{2}{3} \cdot 2,8) - 960 \cdot 5,6 - 300 \cdot (4,0 - \frac{1}{3} \cdot 2,0) + 300 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,0$$

$$\bar{M}_p(x = L/2) = \underline{4208,0 \text{ kNm}^3}$$

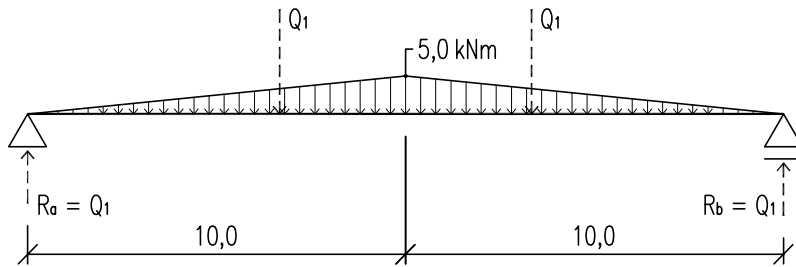
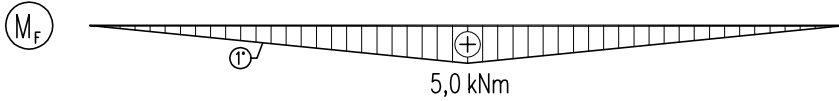


$$\delta_p^b = \frac{\bar{M}_p}{E \cdot I_y} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$



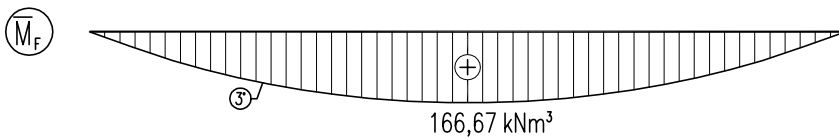
Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou  $F$

$$M_F = R_a \cdot 10,0 = \frac{1,0}{2} \cdot 10,0 = \underline{5,0 \text{ kNm}}$$



Statically určitý duální nosník  
zatížený momentovým obrazcem  $M_F$

$$R_a = Q_1 = 0,5 \cdot 10,0 \cdot 5,0 = \underline{25,0 \text{ kN}}$$



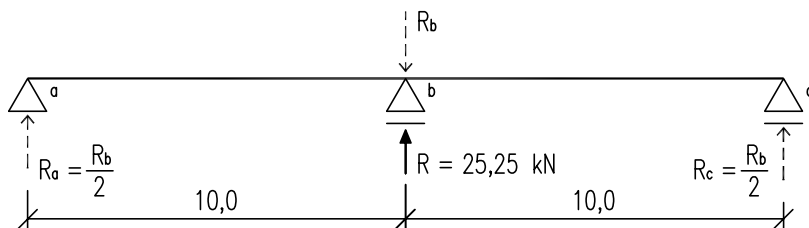
$$\bar{M}_F (x = L/2) = R_a \cdot 10,0 - Q_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10,0 = 25,0 \cdot 10 - 25,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10,0$$

$$\bar{M}_F (x = L/2) = \underline{166,67 \text{ kNm}^3 / \text{kN}}$$

$$\delta_F = \frac{\bar{M}_F}{E \cdot I_y} \dots E \cdot I_y = \text{konst.}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí  $R$ :

$$R \cdot \delta_F = \delta_P \Rightarrow R = \frac{\delta_P}{\delta_F} = \frac{\bar{M}_P}{\bar{M}_F} = \frac{4208,00}{166,67} = \underline{25,25 \text{ kN}}$$

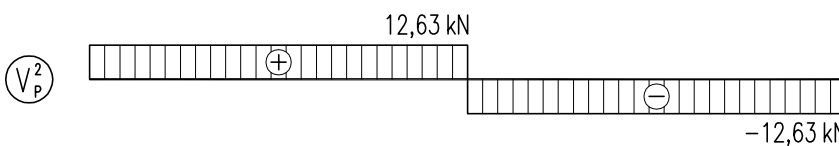


$$R_b = -R_c = \underline{-25,25 \text{ kN}}$$

$$R_a = R_c = \frac{R_b}{2} = \frac{25,25}{2} = \underline{12,63 \text{ kN}}$$



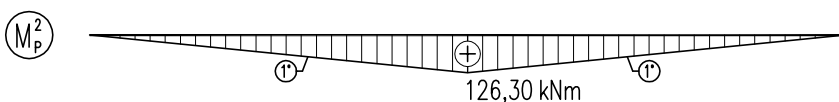
$$N_P^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = R_a = \underline{12,63 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^2 = V_{P,b}^2 + R_b = 12,63 - 25,25$$

$$V_{P,b}^2 = V_{P,c}^2 = \underline{-12,63 \text{ kN}}$$

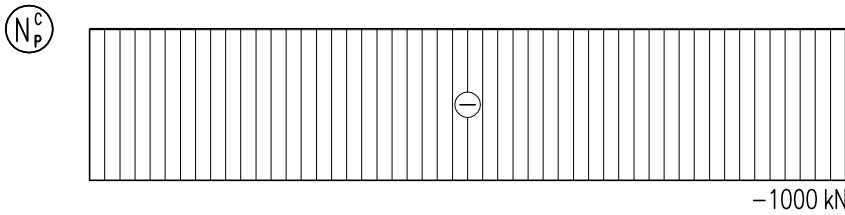


$$M_{P,a}^2 = M_{P,c}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^2 = R_a \cdot 10,0 = 12,63 \cdot 10,0$$

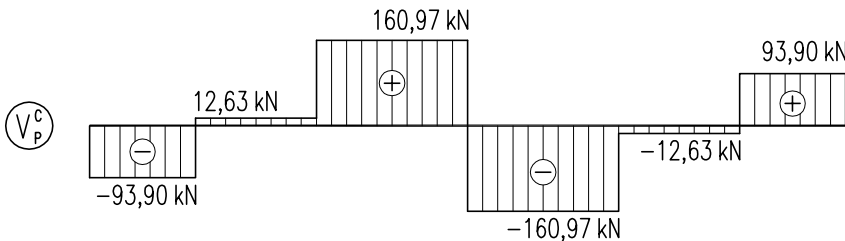
$$M_{P,b}^2 = \underline{126,30 \text{ kNm}}$$

**d) Celkové účinky od předpětí:**



$$N_p^c = N_p^1 + N_p^2$$

$$N_p^c = 1000 + 0 = \underline{1000 \text{ kN}}$$

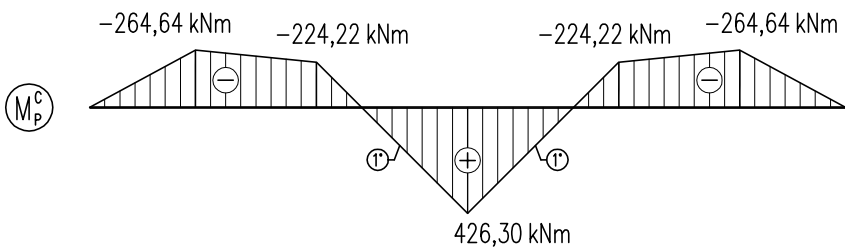


$$V_p^c = V_p^1 + V_p^2$$

$$V_{p,0}^c = -106,53 + 12,63 = \underline{-93,90 \text{ kN}}$$

$$V_{p,1}^c = 0 + 12,63 = \underline{12,63 \text{ kN}}$$

$$V_{p,2}^c = 148,34 + 12,63 = \underline{160,97 \text{ kN}}$$



$$M_p^c = M_p^1 + M_p^2$$

$$M_{p,1}^c = -300 + \frac{126,30}{10,0} \cdot 2,8$$

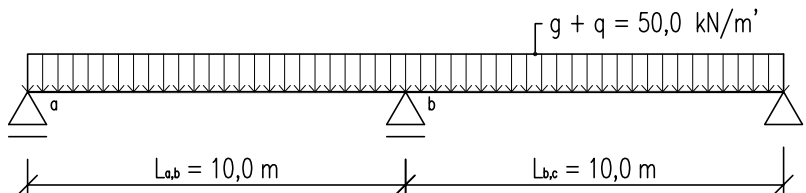
$$M_{p,1}^c = \underline{-264,64 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,2}^c = -300 + \frac{126,30}{10,0} \cdot 6,0$$

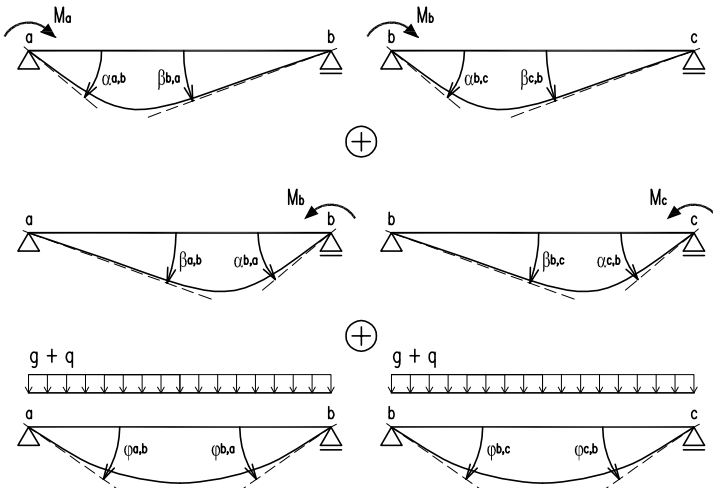
$$M_{p,2}^c = \underline{-224,22 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b}^c = 300 + 126,30 = \underline{426,30 \text{ kNm}}$$

**d) Stanovení maximální předpínací síly pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu:**



– Metoda třímomentových rovnic



$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$\dots M_a = M_c = 0$$

$$\dots E = I_y = \text{konst.}$$

$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{10,0}{3} = \underline{3,33}$$

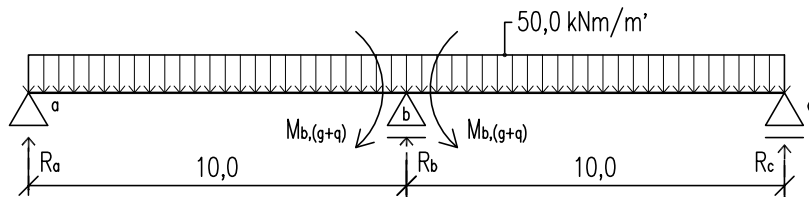
$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{10,0}{6} = \underline{1,67}$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{(g + q) \cdot L_{a,b}^3}{24 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{50,00 \cdot 10,0^3}{24} = \underline{2083,33}$$

$$M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$M_b \cdot (3,33 + 3,33) + 2 \cdot 2083,33 = 0 \quad \dots \quad M_b = M_{b,(g+q)} = \underline{-625,0 \text{ kNm}}$$



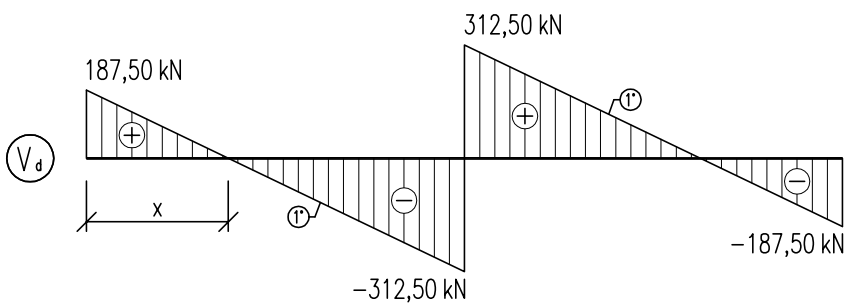
$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} - \frac{1}{2} \cdot (g + q) \cdot L_{a,b}^2 + M_{b,(g+q)} = 0$$

$$R_a \cdot 10,0 - \frac{1}{2} \cdot 50,0 \cdot 10,0^2 + 625,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = R_c = \underline{187,50 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: R_a - (g+q) \cdot L_{a,b} + R_b - (g+q) \cdot L_{b,c} + R_c = 0$$

$$187,5 - 50,0 \cdot 10,0 + R_b - 50,0 \cdot 10,0 + 187,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{625,00 \text{ kN}}$$

$$N_d = 0 \text{ kN}$$



$$V_{d,a} = -V_{d,c} = R_a = \underline{187,50 \text{ kN}}$$

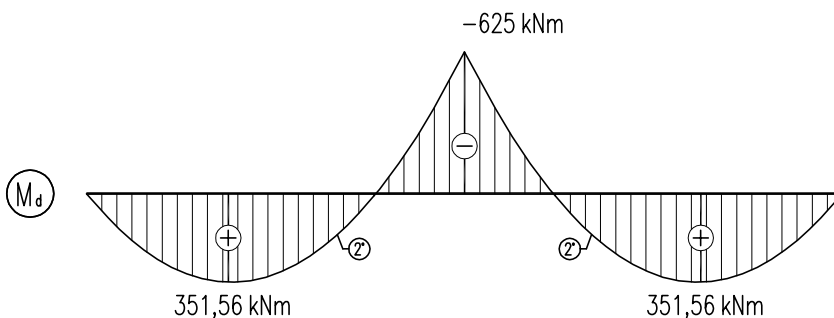
$$V_{d,b} = V_{d,a} - L_{a,b} \cdot (g + q)$$

$$V_{d,b} = 187,50 - 10,0 \cdot 50 = \underline{-312,50 \text{ kN}}$$

$$V_{d,b}' = V_{d,b} + R_b = -312,50 + 625,00$$

$$V_{d,b}' = \underline{187,50 \text{ kN}}$$

$$x = \frac{V_{d,a}}{g + q} = \frac{187,50}{50,00} = \underline{3,75 \text{ m}}$$



$$M_{d,a} = M_{d,c} = 0 \text{ kN}$$

$$M_{d,x} = R_a \cdot x - \frac{1}{2} \cdot (g + q) \cdot L_{a,b}^2$$

$$M_{d,x} = 187,50 \cdot 3,75 - \frac{1}{2} \cdot 50,00 \cdot 3,75^2$$

$$M_{d,x} = \underline{351,56 \text{ kNm}}$$

$$M_{d,b} = M_{b,(g+q)} = \underline{-625 \text{ kN}}$$

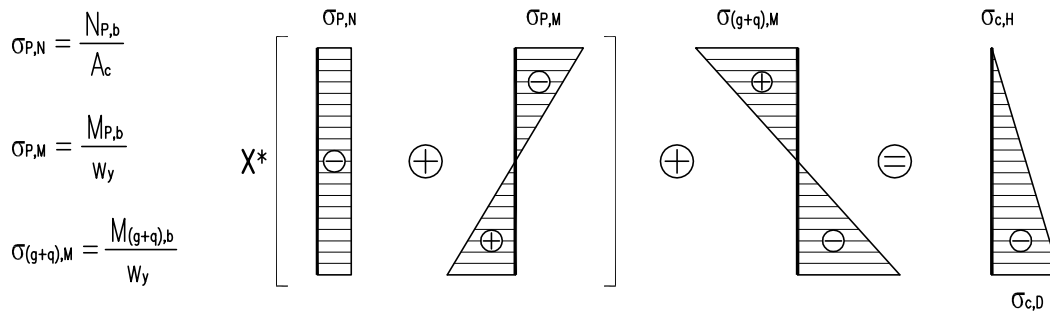
Návrh předpnací síly bude proveden pro průřez nad podporou  $M_b = 625 \text{ kNm} > M_a = 351,56 \text{ kNm}$ .

#### d.1) Průřezové charakteristiky:

$$A_c = b_c \cdot h_c = 0,3 \cdot 1,0 = \underline{0,3 \text{ m}^2}$$

$$w_y = \frac{1}{6} \cdot b_c \cdot h_c^2 = \frac{1}{6} \cdot 0,3 \cdot 1,0^2 = \underline{0,05 \text{ m}^3}$$

d.2) Výpočet napětí v kritickém průřezu (střední podpora – b):



**Poznámka:** Veličina  $X$  vyjadřuje násobek předpínací síly pro dosažení stavu dekomprese (nulové tahové napětí v přilehlých vláknech betonového průřezu).

Horní (tažená) vlákna:

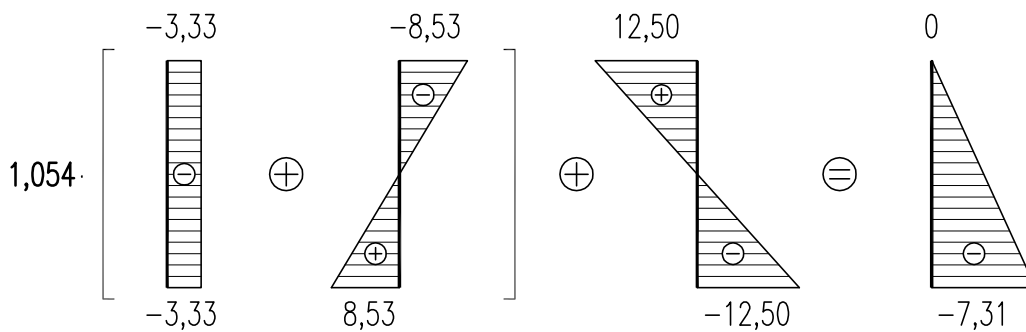
$$\sigma_{c,H} = X \cdot \left( -\frac{N_{P,b}}{A_c} - \frac{M_{P,b}}{W_y} \right) + \frac{M_{(g+q),b}}{W_y} = 0$$

$$\sigma_{c,H} = X \cdot \left( -\frac{1000}{0,3} - \frac{426,30}{0,05} \right) + \frac{625}{0,05} = 0 \quad \dots \quad X = \underline{1,054}$$

Dolní (tlačená) vlákna:

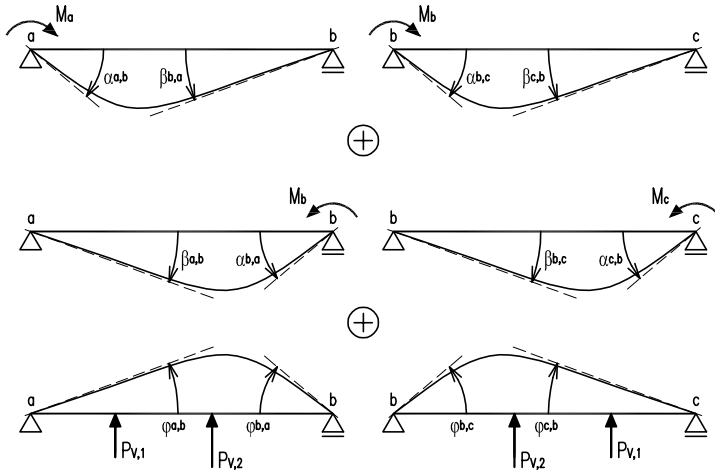
$$\sigma_{c,D} = X \cdot \left( -\frac{N_{P,b}}{A_c} + \frac{M_{P,b}}{W_y} \right) - \frac{M_{(g+q),b}}{W_y}$$

$$\sigma_{c,D} = 1,054 \cdot \left( -\frac{1000}{0,3} + \frac{426,30}{0,05} \right) - \frac{625}{0,05} = \underline{-13,17 \text{ MPa}}$$



**Závěr:** Pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu je zapotřebí předpínací síly  $P = 1054 \text{ kN}$ .

c.2 Metoda třímomentových rovnic



$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{cb} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

...  $M_a = M_c = 0$   
 ...  $E = I_y = \text{konst.}$

$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{10,0}{3} = 3,33$$

$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{10,0}{6} = 1,67$$

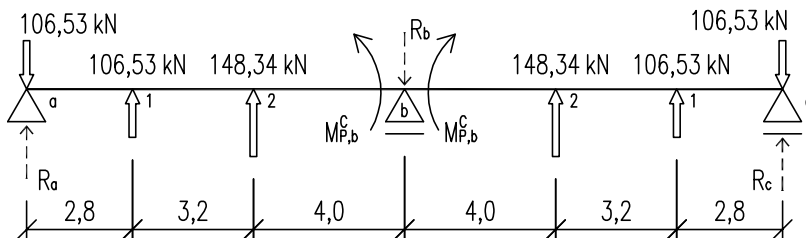
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = - \frac{P_{v,1} \cdot a_1 \cdot b_1}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} + a_1) - \frac{P_{v,2} \cdot a_2 \cdot b_2}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} + a_2)$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = - \frac{106,5 \cdot 2,8 \cdot 7,2}{6 \cdot 10,0} \cdot (10,0 + 2,8) - \frac{148,4 \cdot 6,0 \cdot 4,0}{6 \cdot 10,0} \cdot (10,0 + 6,0)$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -1407,80$$

$$M_a \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$M_a \cdot (3,33 + 3,33) + (-1407,80) + (-1407,80) = 0 \quad \dots \quad M_a = M_b^c = 422,76 \text{ kNm}$$

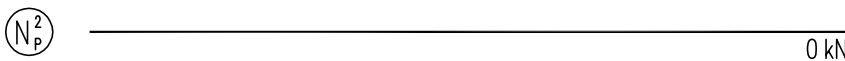


$$\sum M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} - P_{v,1} \cdot L_{a,b} + P_{v,1} \cdot (L_{1,2} + L_{2,b}) + P_{v,2} \cdot L_{2,b} - M_b^c = 0$$

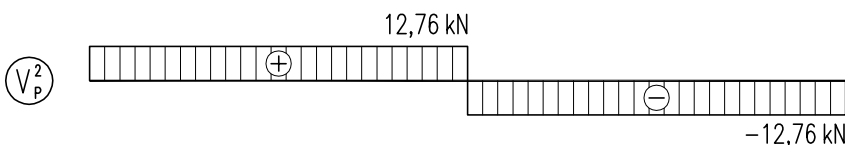
$$R_a \cdot 10,0 - 106,53 \cdot 10,0 + 106,53 \cdot 7,2 + 148,34 \cdot 4,0 - 422,76 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = 12,73 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0: R_a - R_b + R_c = 0$$

$$12,73 - R_b + 12,73 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = -25,46 \text{ kN}$$



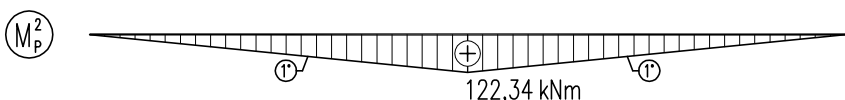
$$N_b^c = 0 \text{ kN}$$



$$V_{p,a}^c = V_{p,b}^c = R_a = 12,76 \text{ kN}$$

$$V_{p,b}^c = V_{p,b}^c + R_b = 12,76 - 25,46$$

$$V_{p,b}^c = V_{p,c}^c = -12,76 \text{ kN}$$

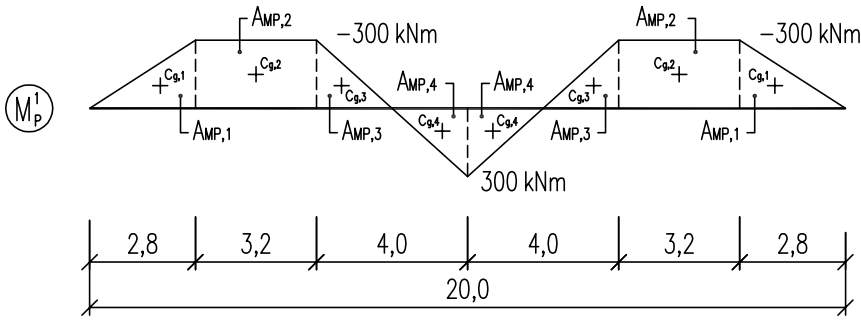


$$M_{p,a}^c = M_{p,c}^c = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{p,b}^c = M_{p,b}^c - M_{p,b}^c = 422,34 - 300$$

$$M_{p,b}^c = 122,34 \text{ kNm}$$

c.3) Vereščaginovo pravidlo



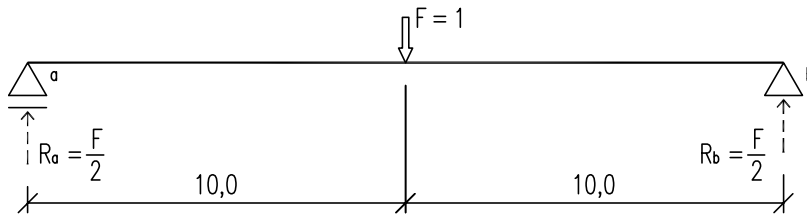
Primární účinky od předpětí – momentovým obrazec  $M_p^i$

$$AMP,1 = 0,5 \cdot 2,8 \cdot (-300) = \underline{-420 \text{ kNm}^2}$$

$$AMP,2 = 3,2 \cdot (-300) = \underline{-960 \text{ kNm}^2}$$

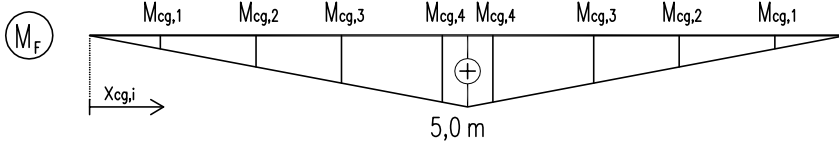
$$AMP,3 = 0,5 \cdot 2,0 \cdot (-300) = \underline{-300 \text{ kNm}^2}$$

$$AMP,4 = 0,5 \cdot 2,0 \cdot 300 = \underline{300 \text{ kNm}^2}$$



Statically určitý virtuální nosník zatížený jednotkovou silou F

$$M_F = R_a \cdot 10,0 = \frac{1,0}{2} \cdot 10,0 = \underline{5,0 \text{ m}}$$



$$\bar{M}_{cg,i} = \frac{M_F}{0,5 \cdot L_{a,b}} \cdot X_{cg,i}$$

$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2,8\right) = \underline{0,93 \text{ m}}$$

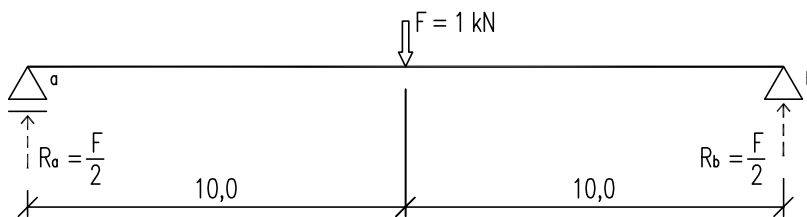
$$\bar{M}_{cg,2} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3,2 + 2,8\right) = \underline{2,20 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,3} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2,0 + 3,2 + 2,8\right) = \underline{3,33 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,4} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2,0 + 2,0 + 3,2 + 2,8\right) = \underline{4,67 \text{ m}}$$

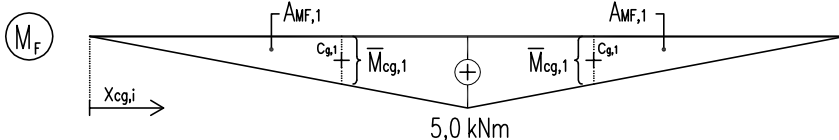
$$\delta_P = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_L M_p \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n AMP,i \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_P = 2 \cdot (-420 \cdot 0,93 - 960 \cdot 2,20 - 300 \cdot 3,33 + 300 \cdot 4,67) = \underline{-4201,20 \text{ m}}$$



Statically určitý virtuální nosník zatížený jednotkovou silou F

$$AMF,1 = 0,5 \cdot 10,0 \cdot 5,0 = \underline{25,0 \text{ kNm}^2}$$



$$M_F = R_a \cdot L_{a,b} = \frac{1,0}{2} \cdot 10,0 = \underline{5,0 \text{ m}}$$

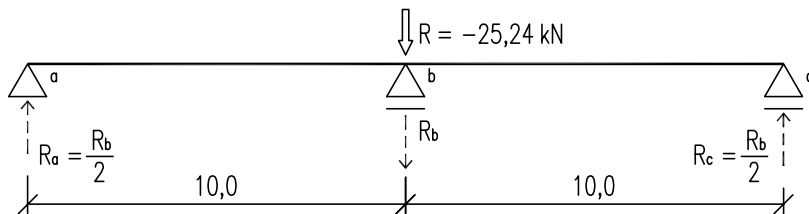
$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{5,0}{0,5 \cdot 20,0} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10,0\right) = \underline{3,33 \text{ m}}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_L M_F \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{MF,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

$$\delta_1 = 2 \cdot 25,0 \cdot 3,33 = \underline{166,50 \text{ m / kN}}$$

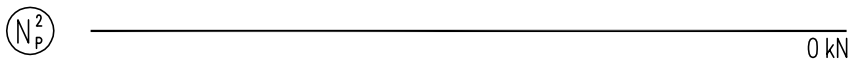
Statically neurčitá reakce od předpětí R:

$$R \cdot \delta_1 = \delta_P \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\delta_P}{\delta_1} = \frac{-4201,20}{166,50} = \underline{-25,24 \text{ kN}}$$

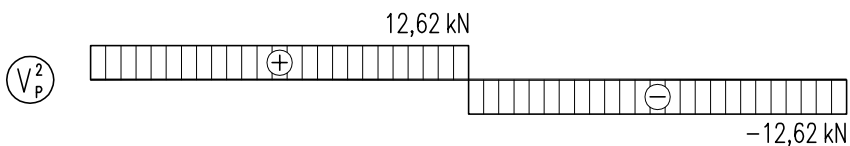


$$R_b = R = \underline{-25,24 \text{ kNm}}$$

$$R_a = R_c = -\frac{R_b}{2} = -\frac{-25,24}{2} = \underline{12,62 \text{ kN}}$$



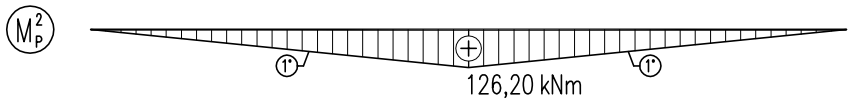
$$N^2_P = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$V^2_{P,a} = V^2_{P,b} = R_a = \underline{12,62 \text{ kN}}$$

$$V^2_{P,b'} = V^2_{P,b} + R_b = 12,62 - 25,24$$

$$V^2_{P,b'} = V^2_{P,c} = \underline{-12,62 \text{ kN}}$$



$$M^2_{P,a} = M^2_{P,c} = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M^2_{P,b} = R_a \cdot L_{a,b} = 12,62 \cdot 10,0$$

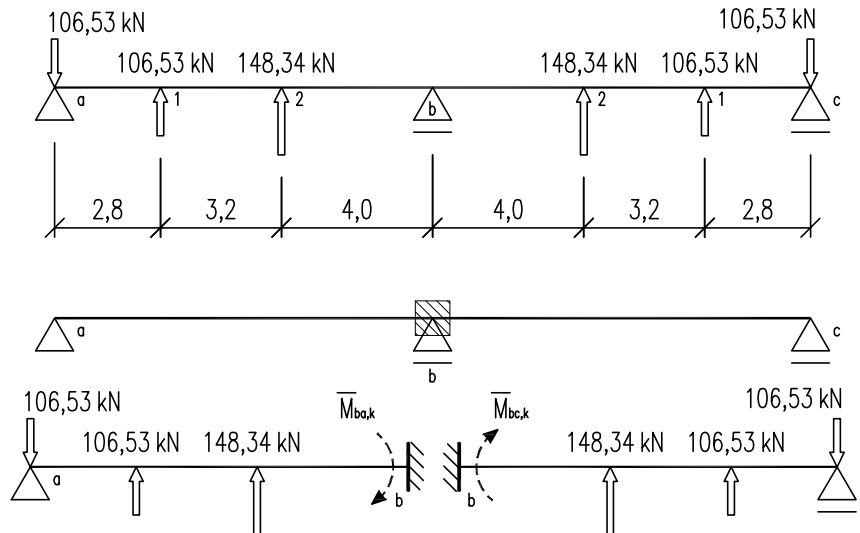
$$M^2_{P,b} = \underline{126,20 \text{ kNm}}$$



c.4) Zjednodušená deformační metoda

Určení stupně statické přetvárnosti:  $n_p = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$

počet fiktivních přetvárných vazeb je 1, fiktivní momentovou vazbu umístíme do podpory b a za neznámou volíme pootočení v podpoře b  $\varphi_b$



• Poměrná ohybová tuhost:

$$k_{ba} = k_{bc} = \frac{l_{a,b}}{L_{a,b}} \cdot c = \frac{0,025}{10} \cdot 1 \cdot 10^3 = \underline{2,6} \quad \dots \text{ c volím } 1 \cdot 10^3$$

• Primární momenty:

$$\bar{M}_{ab,k} = \underline{0,0}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ba,k} &= -\bar{M}_{bc,k} = -\frac{P_{v,1} \cdot a_1 \cdot b_1}{2 \cdot L_{a,b}^2} \cdot (L_{a,b} + a_1) - \frac{P_{v,2} \cdot a_2 \cdot b_2}{2 \cdot L_{a,b}^2} \cdot (L_{a,b} + a_2) = \\ &= -\frac{106,5 \cdot 2,8 \cdot 7,2}{2 \cdot 10,0^2} \cdot (10,0 + 2,8) - \frac{148,4 \cdot 6,0 \cdot 4,0}{2 \cdot 10,0^2} \cdot (10,0 + 6,0) = -137,45 - 284,81 = \underline{-422,26} \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{bc,k} = \underline{422,26}$$

$$\bar{M}_{cb,k} = \underline{0,0}$$

• Pootočení styčnicku b (vyjádřeno ze styčnickové rovnice pro bod b)

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + k_{ba}' \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{ab})$$

$$M_{bc,k} = \bar{M}_{bc,k} + k_{bc}' \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{bc}) \quad \dots \text{ svislé posuny styčnicků } w_a, w_b \text{ a } w_c \text{ jsou nulová proto } \psi_{ab} = \psi_{bc} = 0,0$$

po dosazení získáme rovnici

$$-(\bar{M}_{ab,k} + \bar{M}_{bc,k}) = \frac{3}{4} \cdot k_{ba}' \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot k_{bc}' \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$-(-422,26 + 422,26) = \frac{3}{4} \cdot 2,6 \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot 2,6 \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$0,0 = 1,8 \cdot \varphi_b \Rightarrow \varphi_b = \underline{0,0}$$

- Styčnicková rovnice pro styčnick b

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = -422,26 + \frac{3}{4} \cdot 2,6(2 \cdot 0,0 - 2 \cdot 0,0) = \underline{-422,26 \text{ kNm}}$$

$$M_{bc,k} = 422,26 + \frac{3}{4} \cdot 2,6(2 \cdot 0,0 - 2 \cdot 0,0) = \underline{422,26 \text{ kNm}}$$

Celkový moment od účinků předpětí je roven celkovému koncovému momentu, který jsme vypočítali pomocí zjednodušené deformační metody, dle konvence této metody vyplývá že celkový moment táhne spodní vlákna.

$$M_{pb}^{\xi} = -M_{ba,k} = \underline{422,26 \text{ kNm}}$$

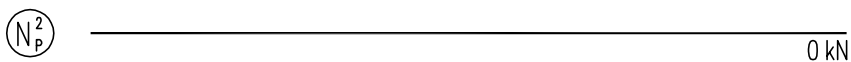
Statically neurčitá reakce od předpětí R:

$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} - P_{V,a} \cdot L_{a,b} + P_{V,1} \cdot (L_{1,2} + L_{2,b}) + P_{V,2} \cdot L_{2,b} - M_{pb}^{\xi} = 0$$

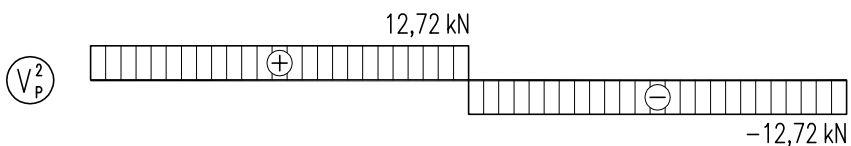
$$R_a \cdot 10,0 - 106,53 \cdot 10,0 + 106,53 \cdot 7,2 + 148,34 \cdot 4,0 - 422,26 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = \underline{12,72 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: R_a - R_b + R_c = 0$$

$$12,72 - R_b + 12,72 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{-25,44 \text{ kN}}$$



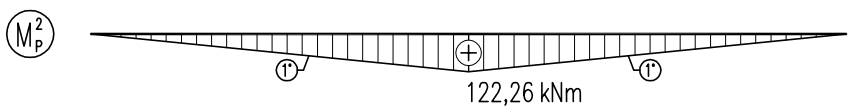
$$N_p^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$V_{p,a}^2 = V_{p,b}^2 = R_a = \underline{12,72 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b}^{\prime} = V_{p,b}^2 + R_b = 12,72 - 25,44$$

$$V_{p,b}^{\prime} = V_{p,c}^2 = \underline{-12,72 \text{ kN}}$$



$$M_{p,a}^2 = M_{p,c}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b}^2 = M_{p,b}^{\xi} - M_{p,b}^1 = 422,26 - 300$$

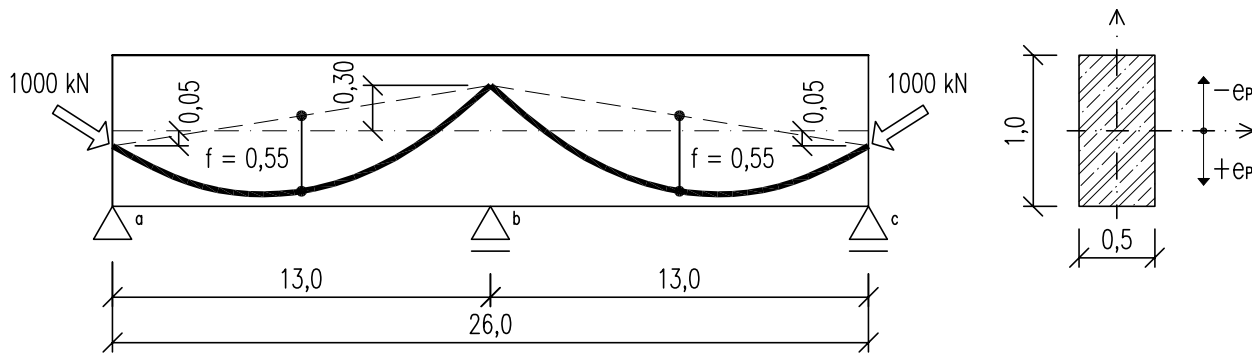
$$M_{p,b}^2 = \underline{122,26 \text{ kNm}}$$

### 3.13 PŘÍKLAD Č.13

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro spojitý nosník o dvou polích:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

$L_{a,b} = 13,0 \text{ m} = L_{b,c} = 13,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = e_{P,c} = 0,05 \text{ m}$   
 $e_{P,b} = -0,30 \text{ m}$   
 $f_1 = f_2 = 0,55 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,55}{13,0} = \underline{0,042} < \frac{1}{15} = \underline{0,067} \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,a}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \dots e = e_{P,b} - e_{P,a}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,55}{13,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,55 - 0,35}{13,0} = \underline{0,142} \Rightarrow \alpha = \underline{8,10^\circ}$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,55}{13,0^2} \cdot 13,0 + \frac{4 \cdot 0,55 - 0,35}{13,0} = \underline{-0,196} \Rightarrow \beta = \underline{-11,10^\circ}$$

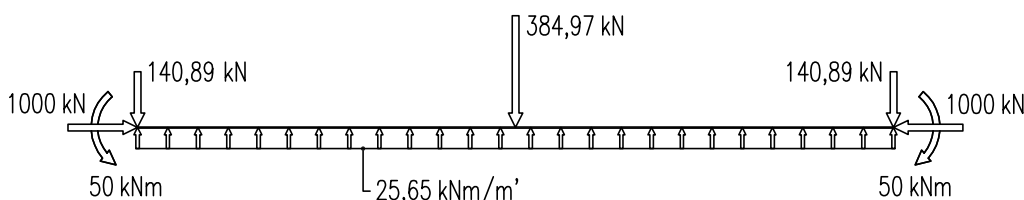
$$P_{V,a} = P_{V,c} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 8,10 = \underline{-140,89 \text{ kN}}$$

$$P_{V,b} = 2 \cdot P \cdot \sin \beta = 2 \cdot 1000 \cdot \sin (-11,10) = \underline{-384,97 \text{ kN}}$$

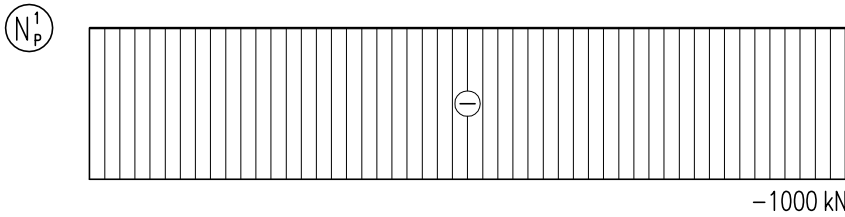
$$p_{a,b} = p_{b,c} = \frac{-(P_{V,a} + 0,5 \cdot P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(-140,89 - 0,5 \cdot 384,97)}{13,0} = \underline{25,65 \text{ kN/m'}}$$

$$M_{P,a} = M_{P,c} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,05 = \underline{-50 \text{ kNm}}$$

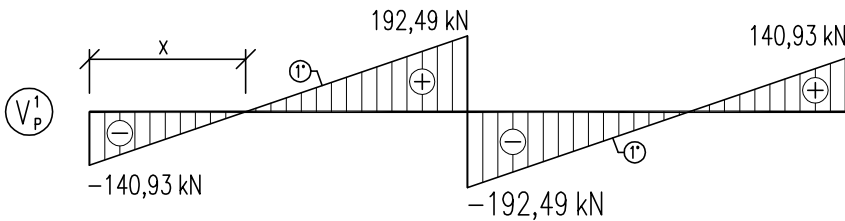
$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,30) = \underline{300 \text{ kNm}}$$



**b) Primární účinky od předpětí:**



$$N_p^1 = P_H = -1000 \text{ kN}$$



$$V_{P,a}^1 = P_{V,a} = -140,93 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^1 = V_{P,a}^1 + L_{a,b} \cdot p_{a,b} = -140,93 + 13,0 \cdot 25,65$$

$$V_{P,b}^1 = 192,49 \text{ kN}$$

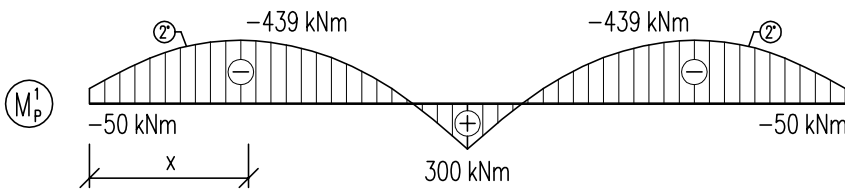
$$V_{P,b'}^1 = 192,49 - 384,97 = -140,93 \text{ kN}$$

$$V_{P,c}^1 = V_{P,b'}^1 + L_{b,c} \cdot p_{b,c} = -140,93 + 13,0 \cdot 25,65$$

$$V_{P,c}^1 = 140,93 \text{ kN}$$

$$x = \frac{V_{P,a}^1}{p_{a,b}} = \frac{140,93}{25,65} = 5,49 \text{ m}$$

$$e_{P,x} = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,a} = -\frac{4 \cdot 0,55}{13,0^2} \cdot 5,49^2 + \frac{4 \cdot 0,55 - 0,35}{13,0} \cdot 5,49 + 0,05 = 0,439 \text{ m}$$



$$M_{P,a}^1 = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,05$$

$$M_{P,a}^1 = M_{P,c}^1 = -50 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b}^1 = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,30) = 300 \text{ kNm}$$

$$M_{P,x}^1 = P_H \cdot e_{P,x} = -1000 \cdot 0,439 = -439 \text{ kNm}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

– Metoda třímomentových rovnic

$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$\dots M_a = M_c = 0$$

$$\dots E = I_y = \text{konst.}$$

$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{13,0}{3} = 4,33$$

$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{13,0}{6} = 2,17$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{p_{a,b} \cdot L_{a,b}^3}{24 \cdot E \cdot I_y}$$

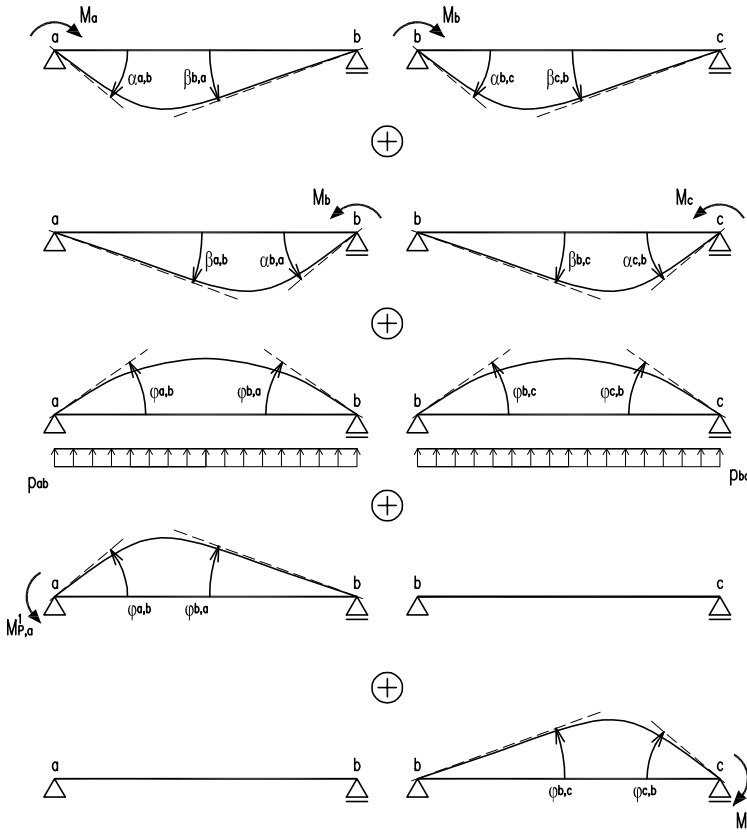
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{25,65 \cdot 13,0^3}{24} = -2348,04$$

$$\varphi_{ba} = -\frac{M_{P,a}^1 \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ba} = -\frac{50,0 \cdot 13,0}{6} = -108,33$$

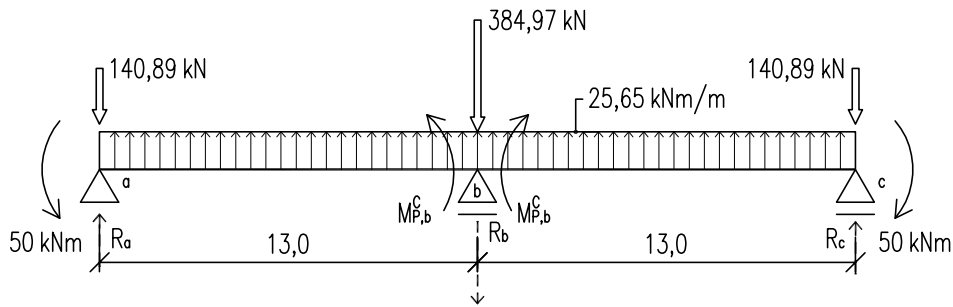
$$\varphi_{bc} = -\frac{M_{P,c}^1 \cdot L_{b,c}}{6 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{bc} = -\frac{50,0 \cdot 13,0}{6} = -108,33$$



$$M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$M_b \cdot (4,33 + 4,33) + 2 \cdot (-2348,04 - 108,33) = 0 \quad \dots \quad M_b = M_{P,b} = \underline{566,73 \text{ kNm}}$$

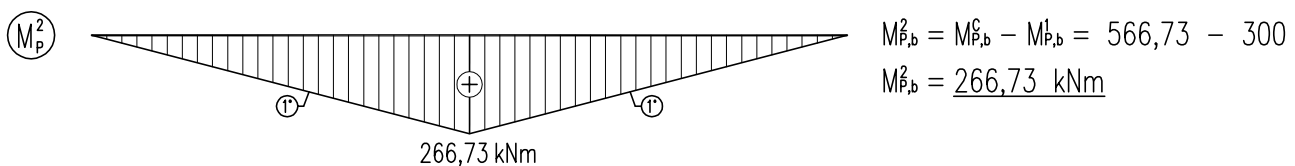
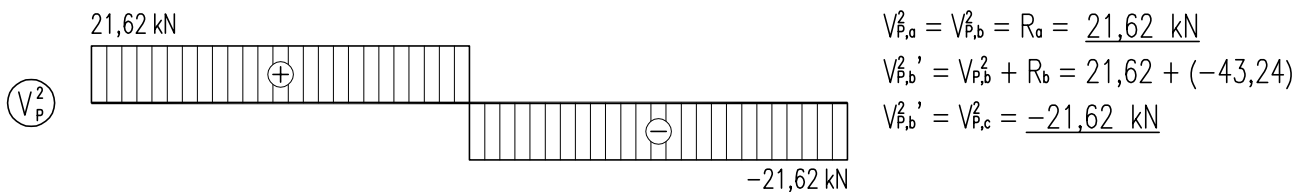


$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} - P_{V,a} \cdot L_{a,b} - M_{P,a} + \frac{1}{2} \cdot p_{a,b} \cdot L_{a,b}^2 - M_{P,b} = 0$$

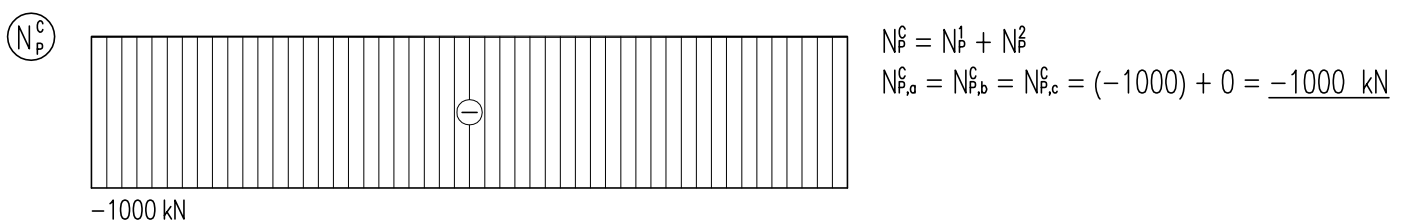
$$R_a \cdot 13,0 - 140,89 \cdot 13 - 50 + \frac{1}{2} \cdot 25,65 \cdot 13,0^2 - 566,73 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = R_c = \underline{21,62 \text{ kN}}$$

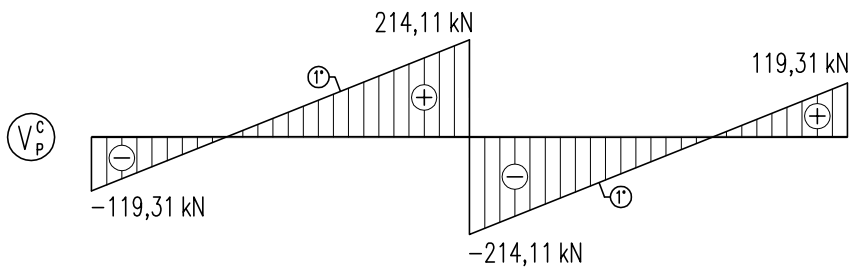
$$\Sigma F_{iz} = 0: R_a - R_b + R_c = 0$$

$$21,62 - R_b + 21,62 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{43,24 \text{ kN}}$$



d) Celkové účinky od předpětí:





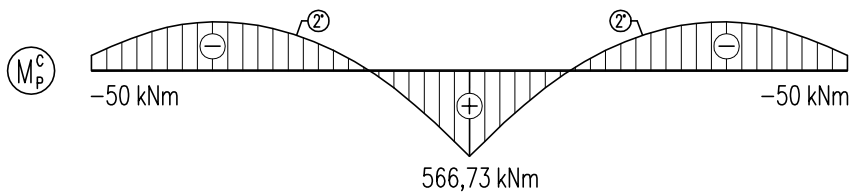
$$V_P^c = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^c = -140,93 + 21,62 = \underline{-119,31 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^c = 192,49 + 21,62 = \underline{214,11 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b'}^c = -192,49 + (-21,62) = \underline{-214,11 \text{ kN}}$$

$$V_{P,c}^c = 140,93 + (-21,62) = \underline{119,31 \text{ kN}}$$



$$M_P^c = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^c = M_{P,c}^1 = -50 + 0 = \underline{-50 \text{ kNm}}$$

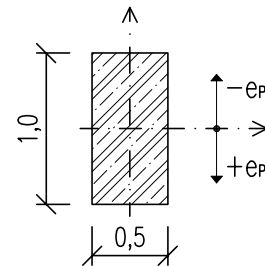
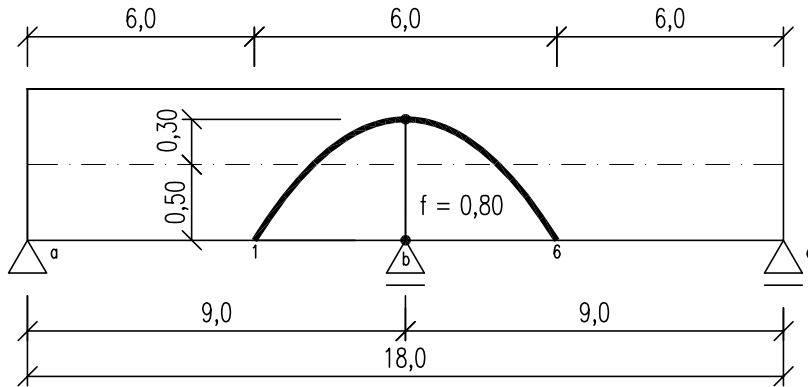
$$M_{P,b}^c = 300 + 266,73 = \underline{566,73 \text{ kNm}}$$

### 3.14 PŘÍKLAD Č.14

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro spojitý nosník o dvou polích:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí na konstrukci
- maximální předpínací sílu pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu

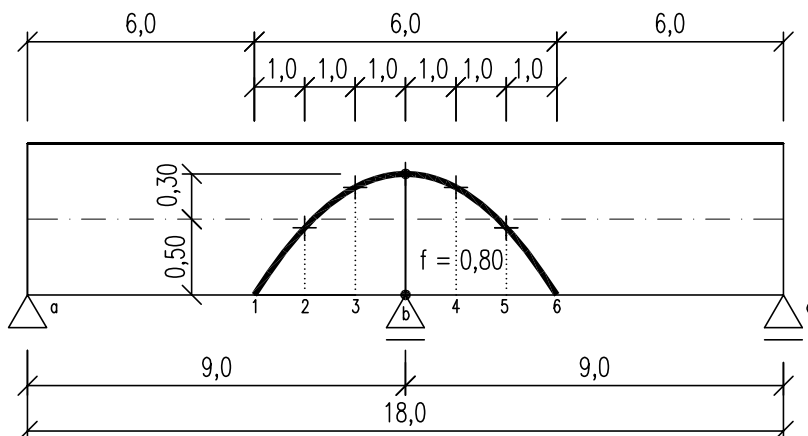
$L_{a,b} = L_{b,c} = 9,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{p,1} = e_{p,6} = 0,50 \text{ m}$   
 $e_{p,b} = -0,30 \text{ m}$   
 $f = -0,80 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P \cdot \cos \alpha \qquad \frac{f}{L} = \frac{0,8}{6,0} = 0,133 > \frac{1}{15} = 0,067 \quad \dots \quad P_H \neq P \neq \text{konst.}$$

**Poznámka:** Poměr vzepětí ku délce paraboly překročil limitní hodnotu 1/15, proto není možné uvažovat konstantní průběh normálové síly  $P_H$  po celé délce nosníku. Pro zjednodušení bude parabola pomyslně rozdělena na jednotlivé intervaly, na kterých budou stanoveny ekvivalentní účinky zatížení od předpětí.



Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f}{L} \cdot x + e_{p,1}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod 1)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,80)}{6,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot (-0,80)}{6,0} = -0,533 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -28,07^\circ$$

**Sklon tečny v místě:  $x = 1,0\text{m}$  (bod 2)**

$$\operatorname{tg} \beta = y'_{(x=1,0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,80)}{6,0^2} \cdot 1,0 + \frac{4 \cdot (-0,80)}{6,0} = \underline{-0,356} \Rightarrow \beta = \underline{-19,57^\circ}$$

**Sklon tečny v místě:  $x = 2,0\text{m}$  (bod 3)**

$$\operatorname{tg} \chi = y'_{(x=2,0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,80)}{6,0^2} \cdot 2,0 + \frac{4 \cdot (-0,80)}{6,0} = \underline{-0,178} \Rightarrow \chi = \underline{-10,08^\circ}$$

**Sklon tečny v místě:  $x = 3,0\text{m}$  (bod b)**

$$\operatorname{tg} \delta = y'_{(x=3,0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,80)}{6,0^2} \cdot 3,0 + \frac{4 \cdot (-0,80)}{6,0} = \underline{0,0} \Rightarrow \delta = \underline{0,0^\circ}$$

$$P_{H,1} = -P_{H,6} = -P \cdot \cos \alpha = -1000 \cdot \cos(-28,07) = \underline{-882,37 \text{ kN}}$$

$$P_{H,2} = -P'_{H,2} = P_{H,5} = -P'_{H,5} = -P \cdot \cos \beta = -1000 \cdot \cos(-19,57) = \underline{-942,23 \text{ kN}}$$

$$P_{H,3} = -P'_{H,3} = P_{H,4} = -P'_{H,4} = -P \cdot \cos \chi = -1000 \cdot \cos(-10,08) = \underline{-984,56 \text{ kN}}$$

$$P_{H,b} = -P \cdot \cos \delta = -1000 \cdot \cos 0 = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$P_{V,1} = P_{V,6} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin(-28,07) = \underline{470,55 \text{ kN}}$$

$$P_{V,2} = -P_{V,2} = -P_{V,5} = P_{V,5} = -P \cdot \sin \beta = -1000 \cdot \sin(-19,57) = \underline{334,95 \text{ kN}}$$

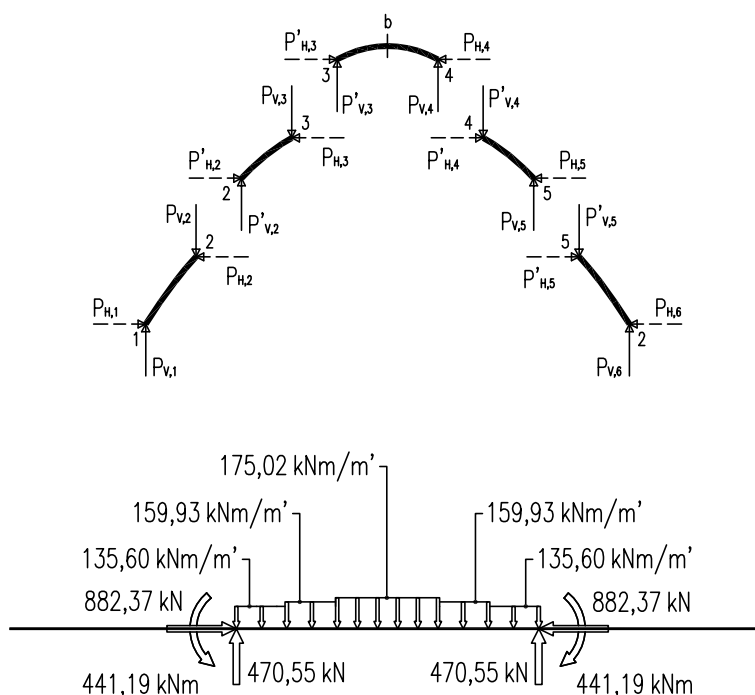
$$P_{V,3} = -P'_{V,3} = -P_{V,4} = P'_{V,4} = -P \cdot \sin \chi = -1000 \cdot \sin(-10,08) = \underline{175,02 \text{ kN}}$$

$$P_{V,b} = -P'_{V,b} = -P \cdot \sin \delta = -1000 \cdot \sin 0 = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

$$p_{1,2} = p_{5,6} = \frac{-(P_{V,1} - P_{V,2})}{L_{1,2}} = \frac{-(470,55 - 334,95)}{1,0} = \underline{-135,60 \text{ kN/m'}}$$

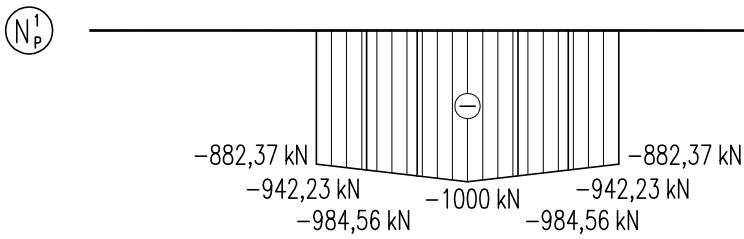
$$p_{2,3} = p_{4,5} = \frac{-(P'_{V,2} - P_{V,3})}{L_{2,3}} = \frac{-(334,95 - 175,02)}{1,0} = \underline{-159,93 \text{ kN/m'}}$$

$$p_{3,b} = p_{b,4} = \frac{-(P'_{V,3} - P_{V,b})}{L_{3,b}} = \frac{-(175,02 + 0,0)}{1,0} = \underline{-175,02 \text{ kN/m'}}$$





**b) Primární účinky od předpětí:**

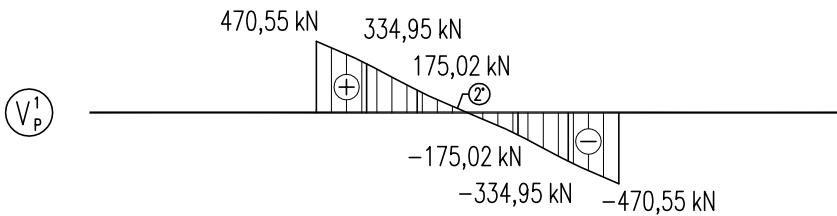


$$N_{P,1}^I = N_{P,6}^I = P_{H,1} = -882,37 \text{ kN}$$

$$N_{P,2}^I = N_{P,5}^I = P_{H,2} = -942,23 \text{ kN}$$

$$N_{P,3}^I = N_{P,4}^I = P_{H,3} = -984,56 \text{ kN}$$

$$N_{P,b}^I = P_{H,b} = -1000,0 \text{ kN}$$

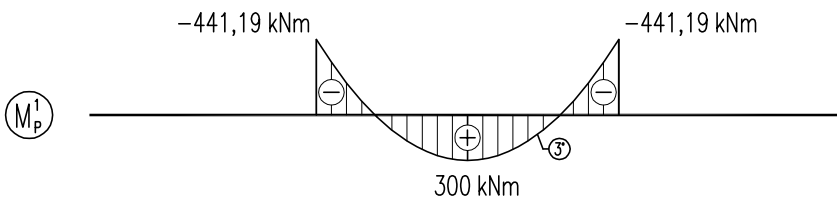


$$V_{P,1}^I = -V_{P,6}^I = P_{V,1} = 470,55 \text{ kN}$$

$$V_{P,2}^I = -V_{P,5}^I = P_{V,2} = 334,95 \text{ kN}$$

$$V_{P,3}^I = -V_{P,4}^I = P_{V,3} = 175,02 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^I = P_{V,b} = 0,0 \text{ kN}$$



$$M_{P,1}^I = -P_{H,1} \cdot e_{P,1} = -882,37 \cdot 0,50$$

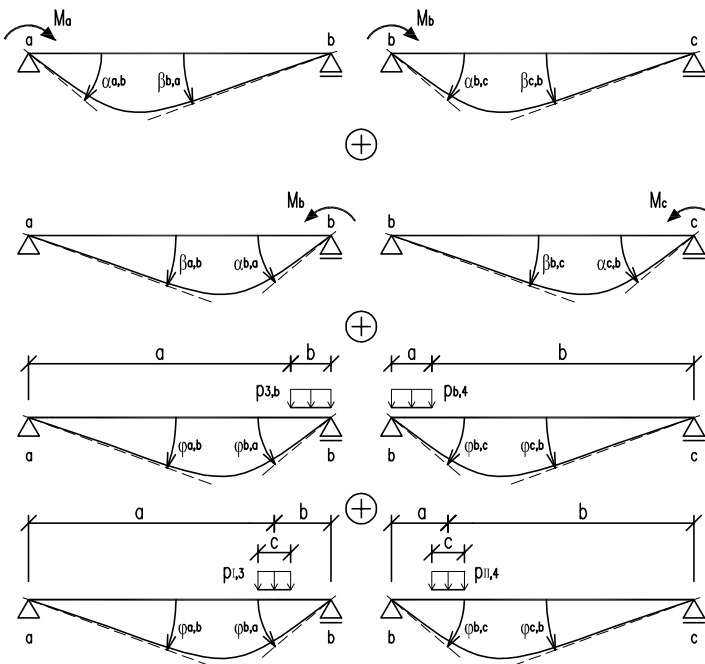
$$M_{P,1}^I = M_{P,2}^I = -441,19 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b}^I = -P_{H,b} \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,30)$$

$$M_{P,b}^I = 300 \text{ kNm}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

– Metoda třímomentových rovnic



$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$\dots M_a = M_c = 0$$

$$\dots E = I_y = \text{konst.}$$

$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{9,0}{3} = 3,00$$

$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{9,0}{6} = 1,50$$

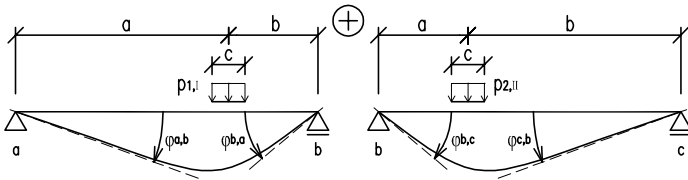
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{p_{3,b} \cdot b^2}{24 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (2 \cdot L_{a,b} - b)^2$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{175,02 \cdot 1,0^2}{24 \cdot 9,0} \cdot (2 \cdot 9,0 - 1,0)^2 = 234,17$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{p_{2,3}}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot \frac{a \cdot c}{L_{a,b}} \cdot [4 \cdot b \cdot (L_{a,b} + a) - c^2]$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{159,93}{24} \cdot \frac{7,5 \cdot 1,0}{9,0} \cdot [4 \cdot 1,5 \cdot (9,0 + 7,5) - 1,0^2]$$

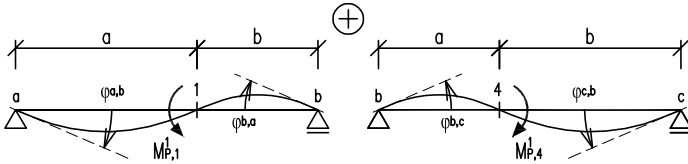
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = 544,21$$



$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{p_{1,2}}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot \frac{a \cdot c}{L_{a,b}} \cdot [4 \cdot b \cdot (L_{a,b} + a) - c^2]$$

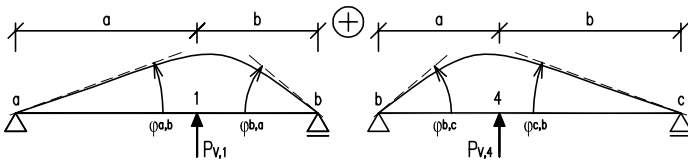
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{135,60}{24} \cdot \frac{6,5 \cdot 1,0}{9,0} \cdot [4 \cdot 2,5 \cdot (9,0 + 6,5) - 1,0^2]$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \underline{628,41}$$



$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{M_{p,1} \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{a^2}{L_{a,b}^2}\right)$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{441,19 \cdot 9,0}{6} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{6,0^2}{9,0^2}\right) = \underline{220,60}$$



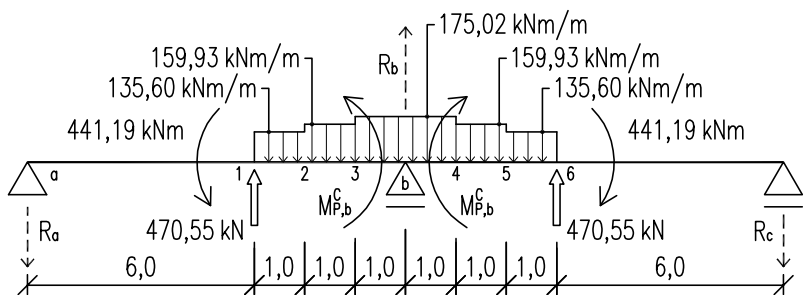
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{P_{v,1} \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} + a)$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{470,55 \cdot 6,0 \cdot 3,0}{6 \cdot 9,0} \cdot (9,0 + 6,0)$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \underline{-2352,75}$$

$$M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$M_b \cdot (3,00 + 3,00) + 2 \cdot [234,17 + 544,21 + 628,41 + 220,60 + (-2352,75)] = 0 \quad \dots \quad M_b = M_{p,b} = \underline{241,79 \text{ kNm}}$$



$$\Sigma M_b = 0: -R_a \cdot L_{a,b} + P_{v,1} \cdot L_{1,b} - M_{p,1} - p_{1,2} \cdot L_{1,2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L_{1,2} + L_{2,b}\right) - p_{2,3} \cdot L_{2,3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L_{2,3} + L_{3,b}\right) - \frac{1}{2} \cdot p_{3,b} \cdot L_{2,b}^2 - M_{p,b} = 0$$

$$-R_a \cdot 9,0 + 470,55 \cdot 3,0 - 441,19 - 135,60 \cdot 1,0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1,0 + 2,0\right) - 159,93 \cdot 1,0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1,0 + 1,0\right) - \frac{1}{2} \cdot 175,02 \cdot 1,0^2 - 241,79 = 0$$

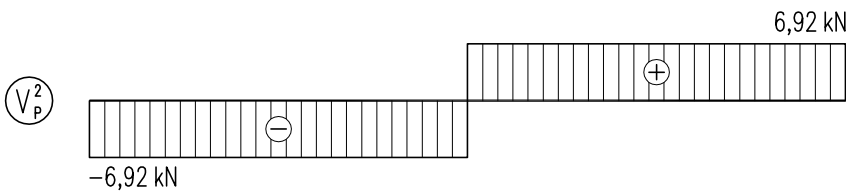
$$R_a = R_c = \underline{6,92 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: -R_a + R_b - R_c = 0$$

$$-6,92 + R_b - 6,92 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{13,84 \text{ kN}}$$



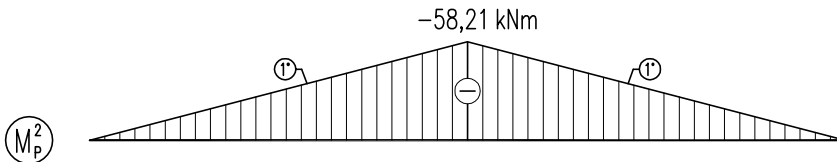
$$N_P^2 = 0 \text{ kN}$$



$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = -R_a = -6,92 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^2 = V_{P,b}^2 + R_b = -6,92 + 13,84$$

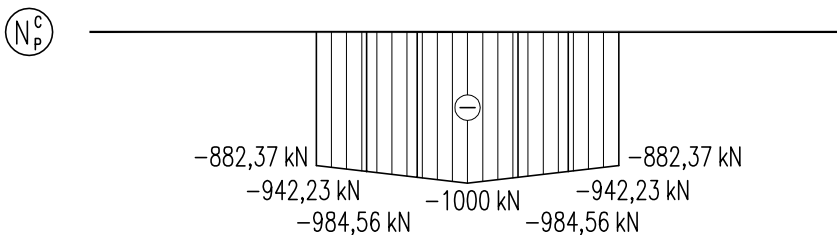
$$V_{P,b}^2 = V_{P,c}^2 = 6,92 \text{ kN}$$



$$M_{P,b}^2 = M_{P,b}^2 - M_{P,b}^2 = 241,79 - 300$$

$$M_{P,b}^2 = -58,21 \text{ kNm}$$

**d) Celkové účinky od předpětí:**



$$N_P^C = N_P^1 + N_P^2$$

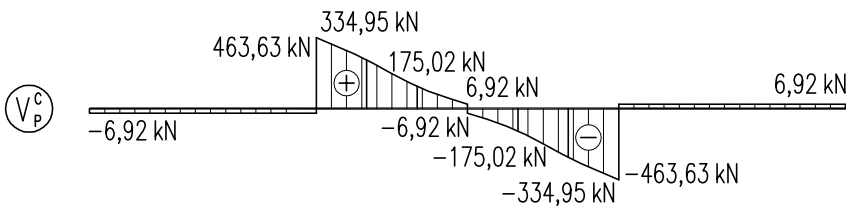
$$N_{P,a}^C = N_{P,c}^C = 0 + 0 = 0 \text{ kN}$$

$$N_{P,1}^C = N_{P,6}^C = -882,37 + 0 = -882,37 \text{ kN}$$

$$N_{P,2}^C = N_{P,5}^C = -942,23 + 0 = -942,23 \text{ kN}$$

$$N_{P,3}^C = N_{P,4}^C = -984,56 + 0 = -982,56 \text{ kN}$$

$$N_{P,3}^C = -1000 + 0 = -1000 \text{ kN}$$



$$V_P^C = V_P^1 + V_P^2$$

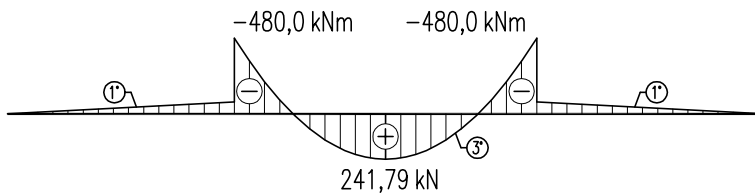
$$V_{P,a}^C = V_{P,1}^C = V_{P,6}^C = V_{P,c}^C = 0 + (-6,92) = -6,92 \text{ kN}$$

$$V_{P,1}^C = -V_{P,6}^C = 470,55 + (-6,92) = 463,63 \text{ kN}$$

$$V_{P,2}^C = -V_{P,5}^C = 334,95 + (-6,92) = 328,03 \text{ kN}$$

$$V_{P,3}^C = -V_{P,4}^C = 175,02 + (-6,92) = 168,10 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^C = -V_{P,b}^2 = 0,0 + (-6,92) = -6,92 \text{ kN}$$



$$M_P^C = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^C = M_{P,c}^C = 0 + 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{P,1}^C = 0 + \left(-\frac{58,21}{9,0} \cdot 6,0\right) = -38,81 \text{ kNm}$$

$$M_{P,1}^C = -441,19 + (-38,81)$$

$$M_{P,1}^C = -480,00 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b}^C = 300 + (-58,21) = 241,79 \text{ kNm}$$

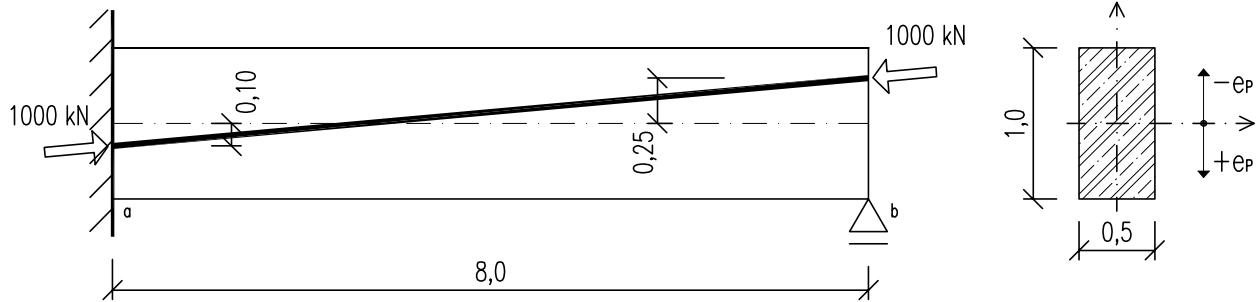
**Závěr:** Jak je vidět přesnost výpočtu závisí na množství dělení paraboly, čím je dělení menší, tím je výpočet přesnější.

### 3.15 PŘÍKLAD Č.15

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro jedenkrát staticky neurčitý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

$L_{a,b} = 8,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = 0,10 \text{ m}$   
 $e_{P,b} = -0,25 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

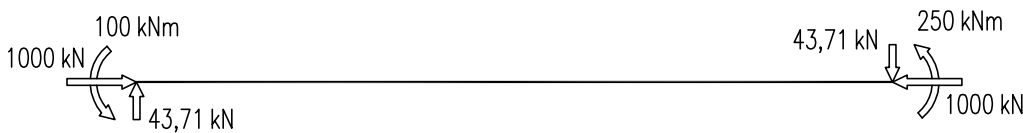
$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$P_{V,a} = -P_{V,b} = P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin (-2,51) = 43,71 \text{ kN}$$

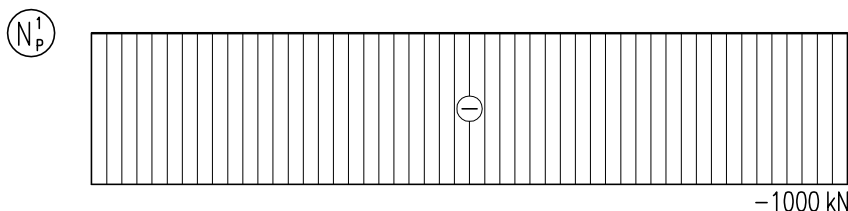
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{P,a} - e_{P,b}}{L_{a,b}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e_{P,a} - e_{P,b}}{L_{a,b}} = \operatorname{arctg} \frac{0,10 - (-0,25)}{8,0} = -2,51^\circ$$

$$M_{P,a} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,10 = -100 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,25) = 250 \text{ kNm}$$



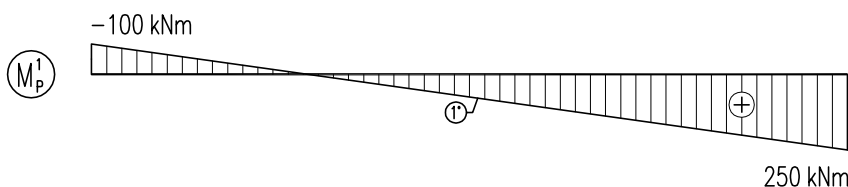
#### b) Primární účinky od předpětí:



$$N_P^I = P_H = -1000 \text{ kN}$$



$$V_{P,a} = V_{P,b} = P_{V,a} = 43,71 \text{ kN}$$



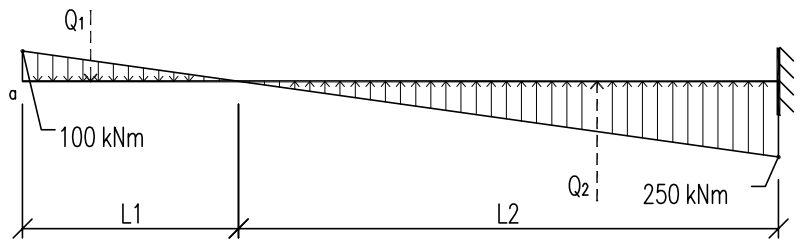
$$M_{P,a}^I = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,10 = -100 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b}^I = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,25)$$

$$M_{P,b}^I = -250 \text{ kNm}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

– Mohrova Analogie



Statically určitý duální nosník  
zatížený momentovým obrazcem  $M^p$

$$Q_1 = 0,5 \cdot L_1 \cdot M_{p,a}$$

$$Q_1 = 0,5 \cdot 2,29 \cdot 100 = \underline{114,50 \text{ kNm}^2}$$

$$Q_2 = 0,5 \cdot L_2 \cdot M_{p,b}$$

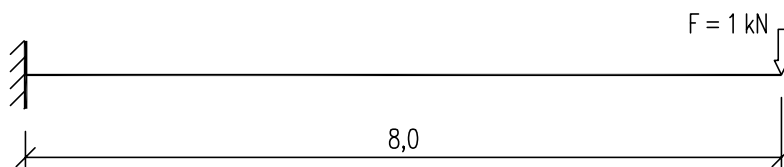
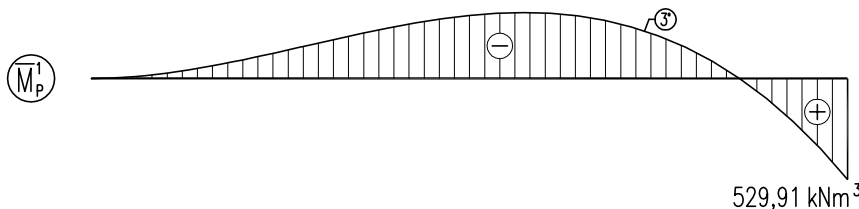
$$Q_2 = 0,5 \cdot 5,71 \cdot (-250) = \underline{-713,75 \text{ kNm}^2}$$

$$L_1 = \frac{8,0}{(100 + 250)} \cdot 100 = \underline{2,29 \text{ m}}$$

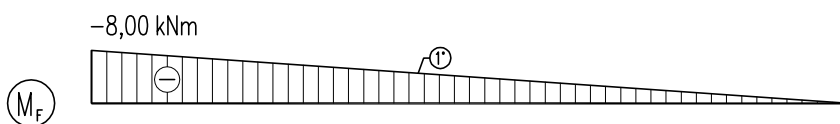
$$L_2 = \frac{8,0}{(100 + 250)} \cdot 250 = \underline{5,71 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{p,b} = Q_1 \cdot (L_2 + \frac{2}{3} \cdot L_1) + Q_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot L_2 = -114,50 \cdot (5,71 + \frac{2}{3} \cdot 2,29) + 713,75 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,71 = \underline{529,91 \text{ kNm}^3}$$

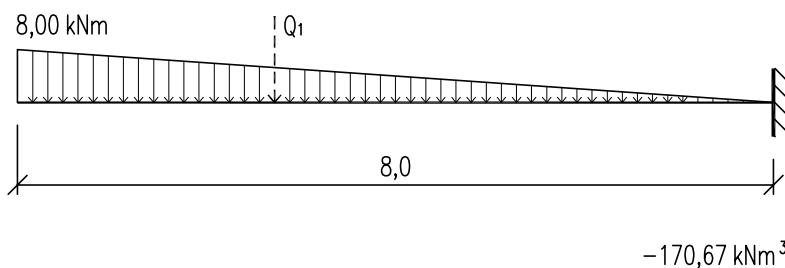
$$\delta_p^b = \frac{\bar{M}_p}{E \cdot I_y} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$



Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou F



$$M_F = -F \cdot L_{a,b} = -1 \cdot 8,0 = \underline{-8,00 \text{ kNm}}$$

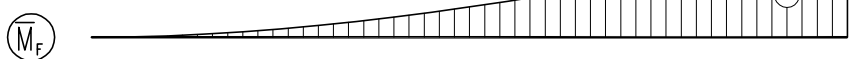


Statically určitý duální nosník  
zatížený momentovým obrazcem  $M_F$

$$Q_1 = 0,5 \cdot 8,0 \cdot 8,0 = \underline{32,0 \text{ kNm}^2}$$

$$\bar{M}_F = -Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot L_{a,b} = -32,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0$$

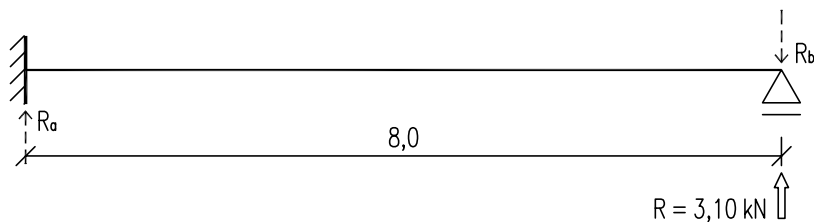
$$\bar{M}_F = \underline{-170,67 \text{ kNm}^3 / \text{kN}}$$



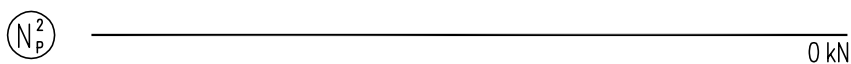
$$\delta_F = \frac{\bar{M}_F}{E \cdot I_y} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí R:

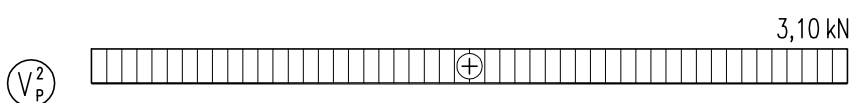
$$R \cdot \delta_F = \delta_P \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\delta_P}{\delta_F} = \frac{\bar{M}_P}{\bar{M}_F} = \frac{529,91}{(-170,67)} = \underline{-3,10 \text{ kN}}$$



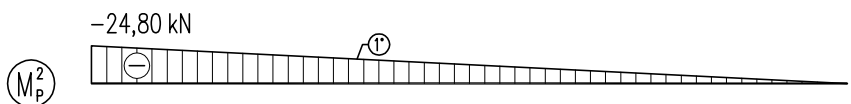
$$R_a = -R = \underline{3,10 \text{ kN}}$$



$$N_p^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$V_{p,a}^2 = -V_{p,b}^2 = R_a = \underline{3,10 \text{ kN}}$$

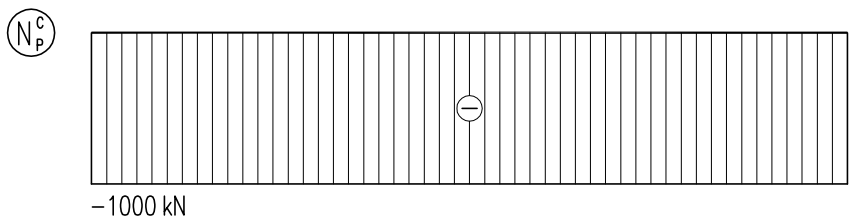


$$M_{p,a}^2 = R_b \cdot L_{a,b} = (-3,10) \cdot 8,00$$

$$M_{p,a}^2 = \underline{-24,80 \text{ kNm}}$$

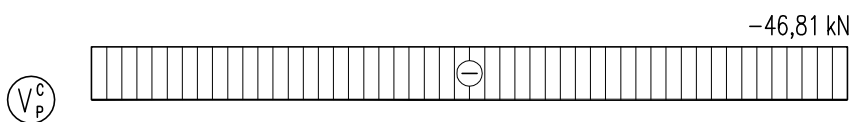
$$M_{p,b}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

d) Celkové účinky od předpětí:



$$N_p^c = N_p^1 + N_p^2$$

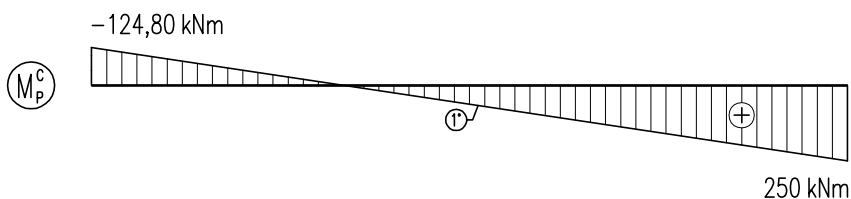
$$N_{p,a}^c = N_{p,b}^c = (-1000) + 0 = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_p^c = V_p^1 + V_p^2$$

$$V_{p,a}^c = V_{p,b}^c = -43,71 + (-3,10)$$

$$V_{p,a}^c = V_{p,b}^c = \underline{-46,81 \text{ kN}}$$



$$M_p^c = M_p^1 + M_p^2$$

$$M_{p,a}^c = -100 + (-24,80) = \underline{-124,80 \text{ kNm}}$$

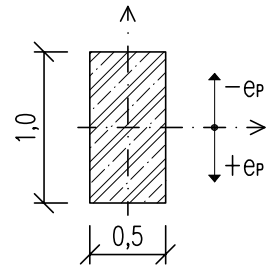
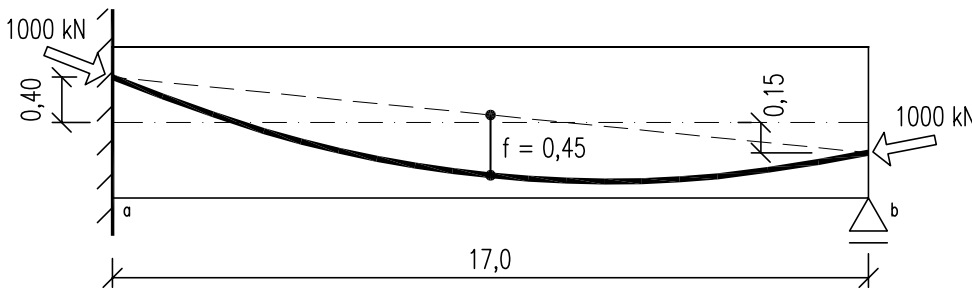
$$M_{p,b}^c = 250 + 0 = \underline{250 \text{ kNm}}$$

### 3.16 PŘÍKLAD Č.16

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro jedenkrát staticky neurčitý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí
- sekundární účinky od předpětí na konstrukci
- celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 17,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = -0,40 \text{ m}$   
 $e_{P,b} = 0,15 \text{ m}$   
 $f = 0,45 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,45}{17,0} = 0,026 \leq \frac{1}{15} = 0,067 \quad \dots \quad P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,a}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \quad \dots \quad e = e_{P,b} - e_{P,a}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod a)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,45}{17,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,45 + 0,55}{17,0} = 0,138 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 7,87^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$  (bod b)

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,45}{17,0^2} \cdot 17,0 + \frac{4 \cdot 0,45 + 0,55}{17,0} = -0,074 \quad \Rightarrow \quad \beta = -4,21^\circ$$

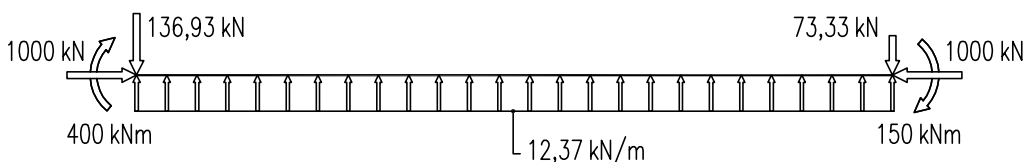
$$P_{V,a} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 7,87 = -136,93 \text{ kN}$$

$$P_{V,b} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin (-4,21) = -73,33 \text{ kN}$$

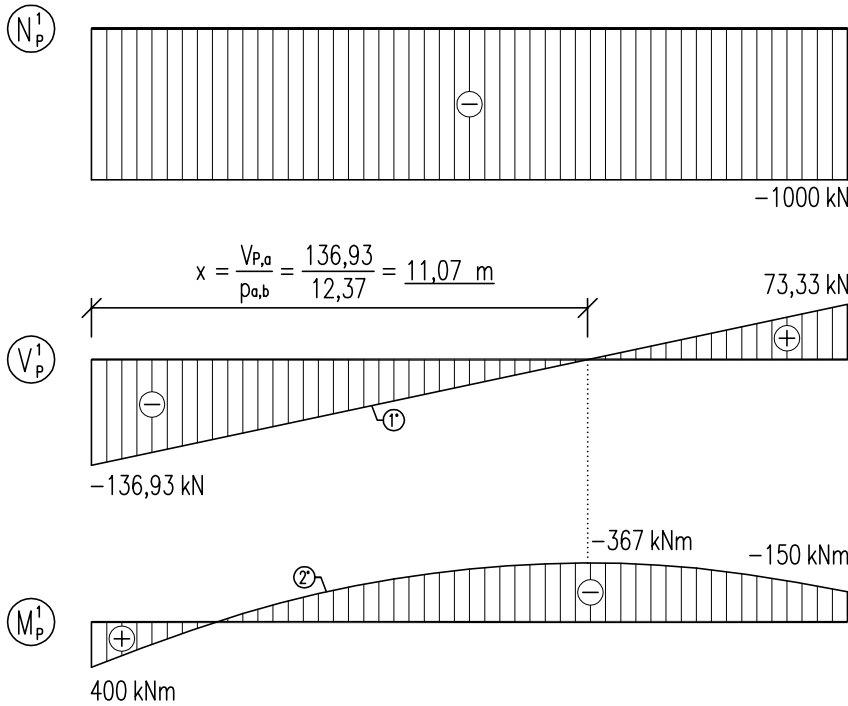
$$p_{a,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(-136,93 - 73,33)}{17,0} = 12,37 \text{ kN/m'}$$

$$M_{P,a} = P \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,40) = 400 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b} = P \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot 0,15 = -150 \text{ kNm}$$



**b) Primární účinky od předpětí:**



$$N_P^1 = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$V_{P,a}^1 = P_{V,a} = \underline{-136,93 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^1 = P_{V,a} + p_{a,b} \cdot L_{a,b}$$

$$V_{P,b}^1 = -136,93 + 12,37 \cdot 17,0 = \underline{73,33 \text{ kN}}$$

$$M_{P,a}^1 = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,40)$$

$$M_{P,a}^1 = \underline{400 \text{ kNm}}$$

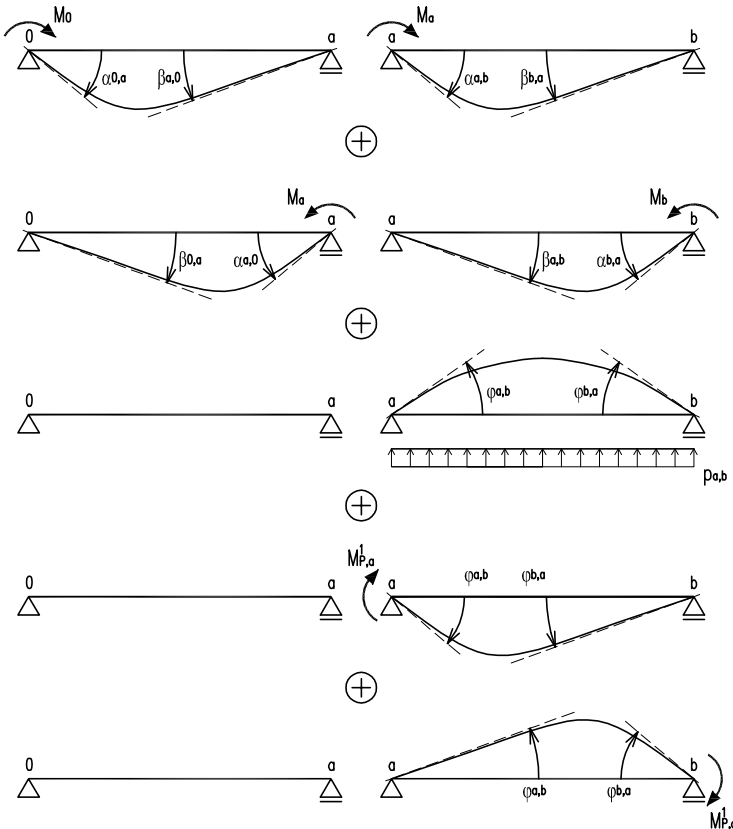
$$M_{P,b}^1 = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot 0,15 = \underline{-150 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,x}^1 = P_H \cdot e_{P,x} = -1000 \cdot 0,367 = \underline{-367 \text{ kNm}}$$

$$e_{P,x} = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,a} = -\frac{4 \cdot 0,45}{17,0^2} \cdot 11,07^2 + \frac{4 \cdot 0,45 + 0,55}{17,0} \cdot 11,07 + (-0,40) = \underline{0,367 \text{ m}}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

– Metoda třímomentových rovnic



$$M_0 \cdot \beta_{0a} + M_a \cdot (\alpha_{a0} + \alpha_{ab}) + M_b \cdot \beta_{ab} + \varphi_{a0} + \varphi_{ab} = 0$$

$$\dots M_0 = M_b = L_{0,a} = 0$$

$$\dots E = I_y = \text{konst.}$$

$$\alpha_{ab} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{17,0}{3} = \underline{5,67}$$

$$\beta_{ab} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{17,0}{6} = \underline{2,83}$$

$$\varphi_{ab} = -\frac{p_{a,b} \cdot L_{a,b}^3}{24 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ab} = -\frac{12,37 \cdot 17,0^3}{24} = \underline{-2532,24}$$

$$\varphi_{ab} = \frac{M_{P,a}^1 \cdot L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ab} = \frac{400 \cdot 17,0}{3} = \underline{2266,67}$$

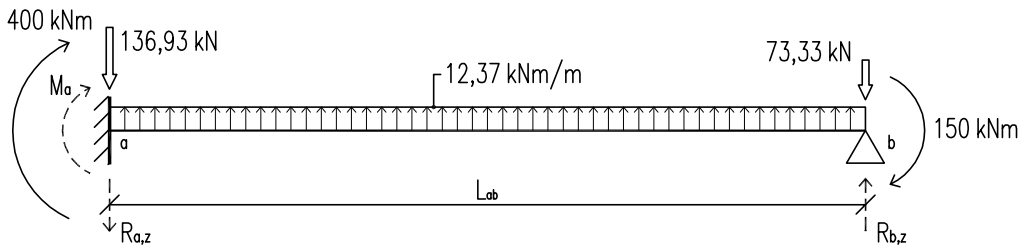
$$\varphi_{ab} = -\frac{M_{P,b}^1 \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ab} = -\frac{150 \cdot 17,0}{6} = \underline{-425,00}$$



$$M_a \cdot \alpha_{ob} + \sum \varphi_{ob} = 0$$

$$M_a \cdot 5,67 + (-2532,34) + 2266,67 + (-425,00) = 0 \quad \dots \quad M_a = M_{P,a}^2 = \underline{121,81 \text{ kNm}}$$



$$\sum M_a = 0: R_{b,z} \cdot L_{a,b} - P_{v,b} \cdot L_{a,b} - M_{P,b}^1 + \frac{1}{2} \cdot p_{a,b} \cdot L_{a,b}^2 - M_{P,a}^1 - M_a = 0$$

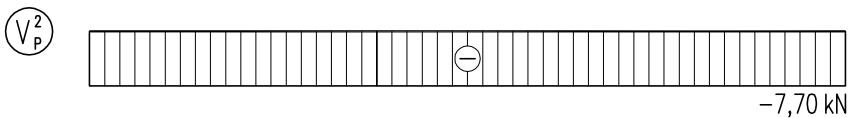
$$-R_{b,z} \cdot 17,0 + 73,33 \cdot 17 + 150 - \frac{1}{2} \cdot 12,37 \cdot 17,0^2 + 400 + 121,81 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = \underline{7,70 \text{ kN}}$$

$$\sum F_{iz} = 0: R_a - R_b = 0$$

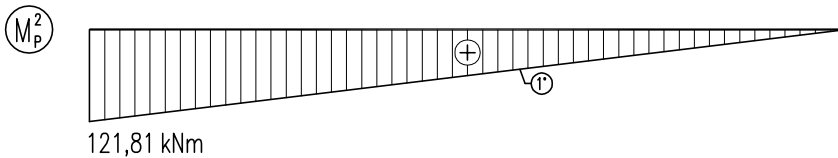
$$7,70 - R_b = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{7,70 \text{ kN}}$$



$$N_{P,a}^2 = N_{P,b}^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$



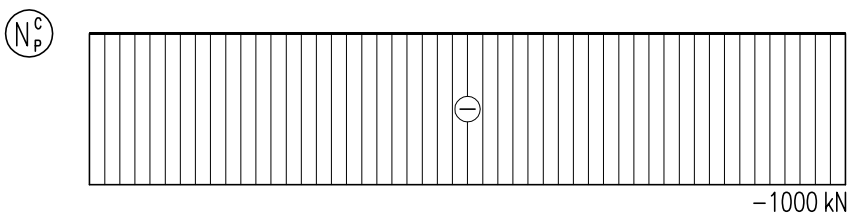
$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = -R_a = \underline{-7,70 \text{ kN}}$$



$$M_{P,a}^2 = M_a = \underline{121,81 \text{ kNm}}$$

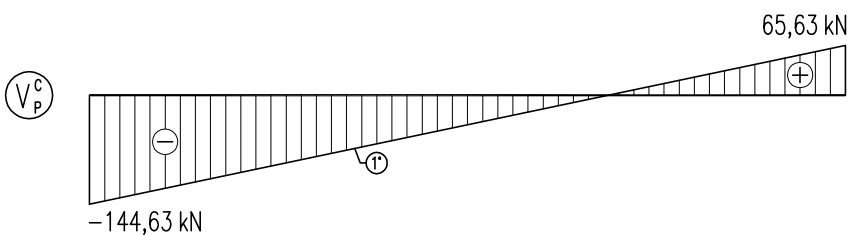
$$M_{P,b}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

d) Celkové účinky od předpětí:



$$N_P^c = N_P^1 + N_P^2$$

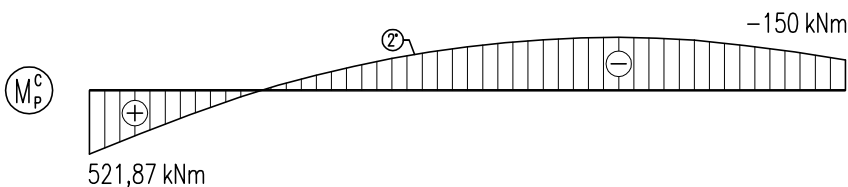
$$N_{P,a}^c = N_{P,b}^c = -1000 + 0 = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_P^c = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^c = -136,93 + (-7,70) = \underline{-144,63 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^c = 73,33 + (-7,70) = \underline{65,63 \text{ kN}}$$



$$M_P^c = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^c = 400 + 121,87 = \underline{521,87 \text{ kNm}}$$

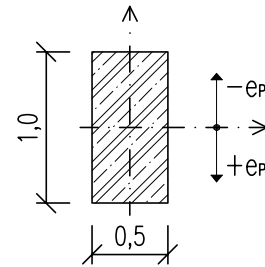
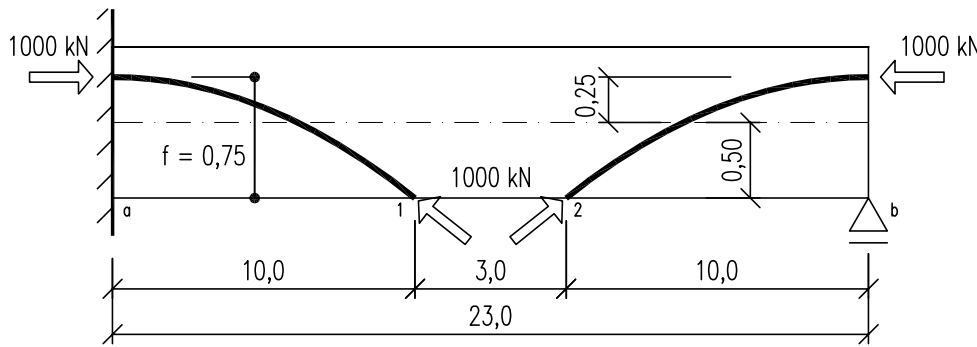
$$M_{P,b}^c = -150 + 0 = \underline{-150 \text{ kNm}}$$

### 3.17 PŘÍKLAD Č.17

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro jedenkrát staticky neurčitý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

$L_{a,b} = 23,0$  m  
 $L = 20,0$  m ... délka paraboly  
 $b_c = 0,5$  m  
 $h_c = 1,0$  m  
 $e_{P,a} = e_{P,b} = -0,25$  m  
 $e_{P,1} = e_{P,2} = 0,50$  m  
 $f = -0,75$  m  
 $P = 1000$  kN



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,75}{20,0} = 0,038 \leq \frac{1}{15} = 0,067 \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f}{L} \cdot x$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L}$$

Sklon tečny v místě:  $x = L/2$  (bod a,b)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=L/2)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,75)}{20,0^2} \cdot 10,0 + \frac{4 \cdot (-0,75)}{20,0} = 0,00 \Rightarrow \alpha = 0,00^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod 1,2)

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot (-0,75)}{20,0^2} \cdot 20,0 + \frac{4 \cdot (-0,75)}{20,0} = 0,15 \Rightarrow \beta = 8,53^\circ$$

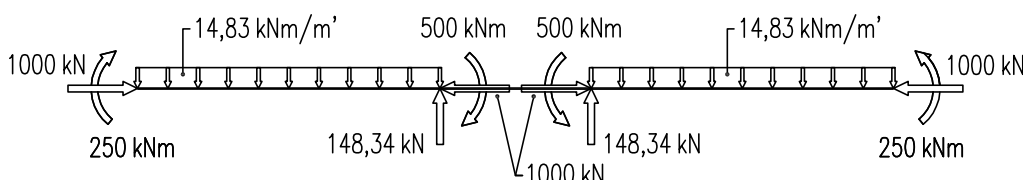
$$P_{V,a} = P_{V,b} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 0 = 0,0 \text{ kN}$$

$$P_{V,1} = P_{V,2} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin 8,53 = 148,34 \text{ kN}$$

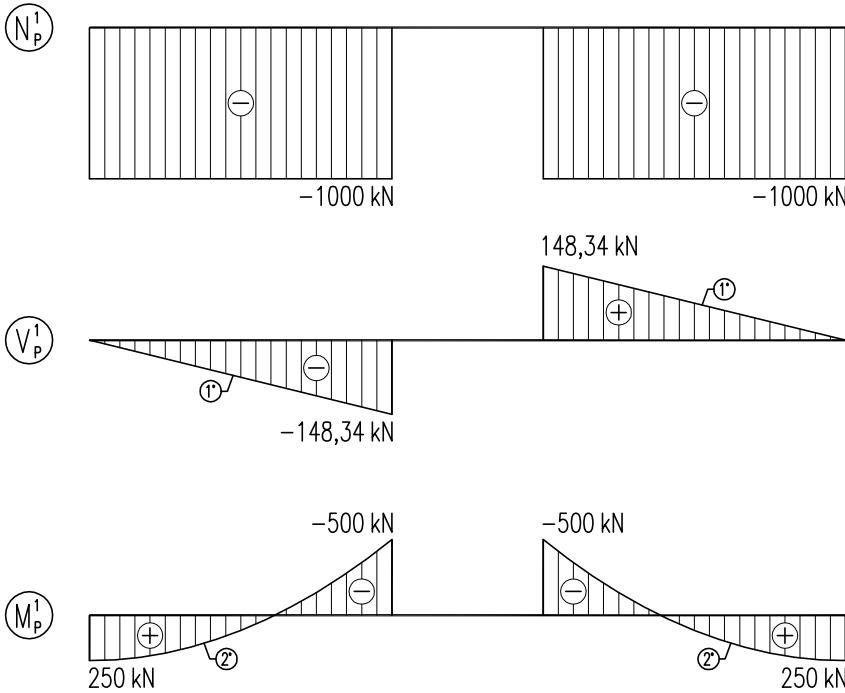
$$p_{a,1} = p_{2,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,1})}{L_{a,1}} = \frac{-(0,0 + 148,34)}{10,0} = -14,83 \text{ kN/m'}$$

$$M_{P,a} = M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,25) = 250 \text{ kNm}$$

$$M_{P,1} = M_{P,2} = P_H \cdot e_{P,1} = -1000 \cdot 0,50 = -500 \text{ kNm}$$



**b) Primární účinky od předpětí:**



$$N_p^I = P_H = -1000 \text{ kN}$$

$$V_{p,a} = V_{p,b} = P_{V,a} = 0 \text{ kN}$$

$$V_{p,1} = -V_{p,2} = P_{V,a} - p \cdot L = 0 - 14,83 \cdot 10,0$$

$$V_{p,1} = -V_{p,2} = -148,34 \text{ kN}$$

$$M_{p,a}^I = M_{p,b}^I = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot (-0,25)$$

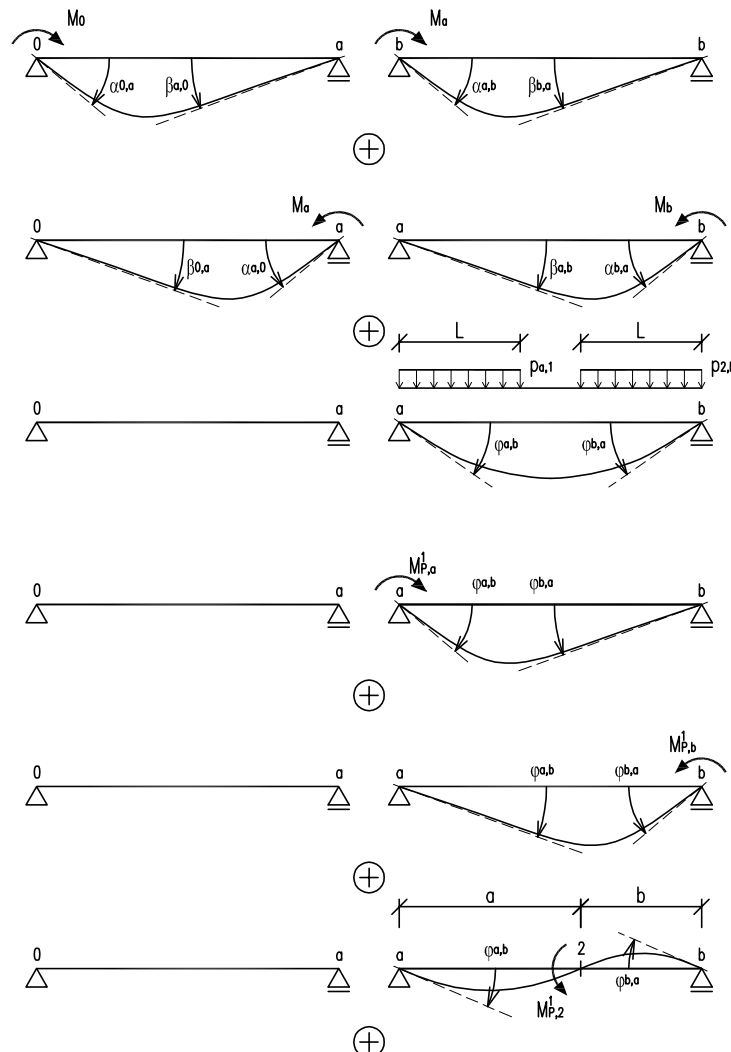
$$M_{p,a}^I = M_{p,b}^I = 250 \text{ kNm}$$

$$M_{p,1}^I = M_{p,2}^I = P_H \cdot e_{p,1} = -1000 \cdot 0,50$$

$$M_{p,1}^I = M_{p,2}^I = -500 \text{ kNm}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

– Metoda třímomentových rovnic



$$M_o \cdot \beta_{oa} + M_a \cdot (\alpha_{ao} + \alpha_{ab}) + M_b \cdot \beta_{ab} + \varphi_{ao} + \varphi_{ab} = 0$$

$$\dots M_o = M_b = L_{o,a} = 0$$

$$\dots E = I_y = \text{konst.}$$

$$\alpha_{ab} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{23,0}{3} = 7,67$$

$$\beta_{ab} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{23,0}{6} = 3,83$$

$$\varphi_{ab} = \frac{p_{a,1} \cdot L^2}{12 \cdot E \cdot I_y} \cdot (3 \cdot L_{a,b} - 2 \cdot L)$$

$$\varphi_{ab} = \frac{14,83 \cdot 10,0^2}{12} \cdot (3 \cdot 23,0 - 2 \cdot 10,0) = 6055,58$$

$$\varphi_{ab} = \frac{M_{p,1}^I \cdot L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y}$$

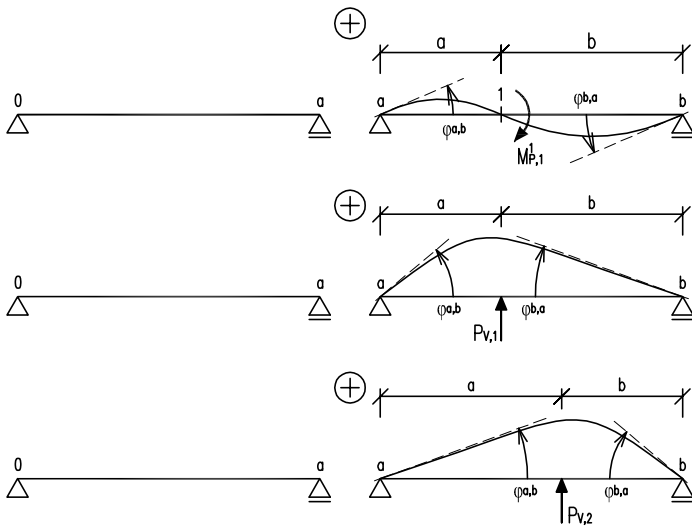
$$\varphi_{ab} = \frac{250 \cdot 23,0}{3} = 1916,67$$

$$\varphi_{ab} = \frac{M_{p,2}^I \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ab} = \frac{250 \cdot 23,0}{6} = 958,33$$

$$\varphi_{ab} = \frac{M_{p,2}^I \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} \cdot (1 - 3 \cdot \frac{b^2}{L_{a,b}^2})$$

$$\varphi_{ab} = \frac{500 \cdot 23,0}{6} \cdot (1 - 3 \cdot \frac{10,0^2}{23,0^2}) = 829,71$$



$$\varphi_{ab} = - \frac{M_{P,2} \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{b^2}{L_{a,b}^2}\right)$$

$$\varphi_{ab} = - \frac{500 \cdot 23,0}{6} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{13,0^2}{23,0^2}\right) = \underline{-79,71}$$

$$\varphi_{ab} = - \frac{P_{v,1} \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} + a)$$

$$\varphi_{ba} = - \frac{148,34 \cdot 10,0 \cdot 13,0}{6 \cdot 23,0} \cdot (23,0 + 10,0) = \underline{-4611,44}$$

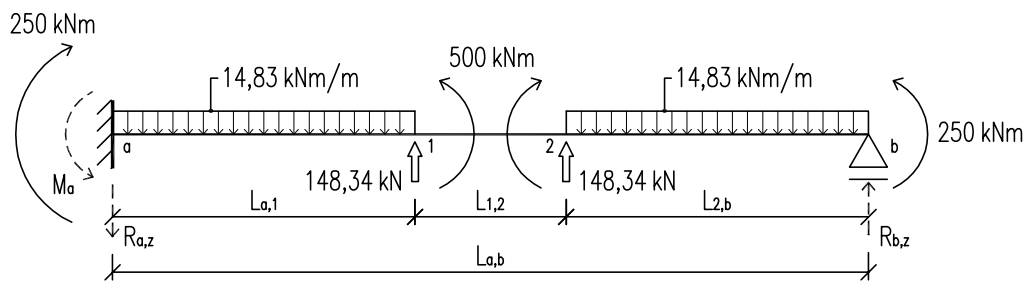
$$\varphi_{ab} = - \frac{P_{v,2} \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} + a)$$

$$\varphi_{ba} = - \frac{148,34 \cdot 13,0 \cdot 10,0}{6 \cdot 23,0} \cdot (23,0 + 13,0) = \underline{-5030,66}$$

$$M_a \cdot \alpha_{ab} + \sum \varphi_{ab} = 0$$

$$M_a \cdot 7,67 + 6055,58 + 1916,67 + 958,33 + 829,71 + (-79,71) + (-4611,44) + (-5030,66) = 0$$

$$M_a = M_{P,a} = \underline{-5,02 \text{ kNm}}$$



$$\sum M_a = 0: R_{b,z} \cdot L_{a,b} + M_{P,b}^1 - p_{2,b} \cdot L_{2,b} \cdot \left(L_{a,b} - \frac{1}{2} \cdot L_{2,b}\right) + P_{v,2} \cdot (L_{a,1} + L_{1,2}) - M_{P,2}^1 + M_{P,1}^1 + P_{v,1} \cdot L_{a,1} - \frac{1}{2} \cdot p_{a,1} \cdot L_{a,1}^2 - M_{P,a} + M_a = 0$$

$$-R_{b,z} \cdot 23,0 + 250 - 14,83 \cdot 10,0 \cdot \left(23,0 - \frac{1}{2} \cdot 10,0\right) + 148,34 \cdot (10,0 + 3,0) - 500 + 500 + 148,34 \cdot 10,0 - \frac{1}{2} \cdot 14,83 \cdot 10,0^2 - 250 + 5,02 = 0$$

$$\Rightarrow R_a = \underline{0,26 \text{ kN}}$$

$$\sum F_{iz} = 0: R_a - R_b = 0$$

$$0,26 - R_b = 0 \Rightarrow R_b = \underline{0,26 \text{ kN}}$$

$$\left(N_P^2\right) \quad \text{-----} \quad 0 \text{ kN}$$

$$N_{P,a}^2 = N_{P,b}^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$\left(V_P^2\right) \quad \text{-----} \quad 0,26 \text{ kN}$$

$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = R_a = \underline{0,26 \text{ kN}}$$

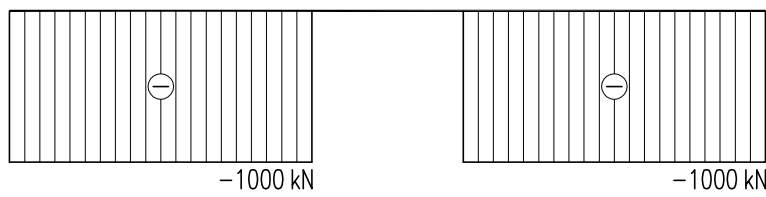
$$\left(M_P^2\right) \quad \text{-----} \quad -5,02 \text{ kNm}$$

$$M_{P,a}^2 = M_a = \underline{-5,02 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

d) Celkové účinky od předpětí:

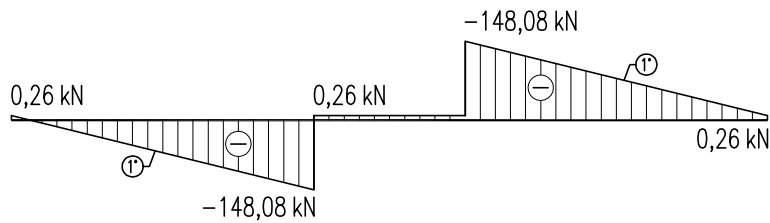
$N_P^c$



$$N_P^c = N_P^1 + N_P^2$$

$$N_{P,a}^c = -1000 + 0 = \underline{-1000 \text{ kNm}}$$

$$N_{P,b}^c = -1000 + 0 = \underline{-1000 \text{ kNm}}$$



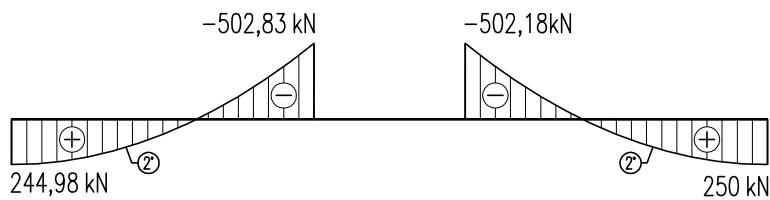
$$V_P^c = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^c = V_{P,c}^1 = 0 + 0,26 = \underline{0,26 \text{ kN}}$$

$$V_{P,1}^c = -148,34 + 0,26 = \underline{-148,08 \text{ kN}}$$

$$V_{P,2}^c = 148,34 + 0,26 = \underline{148,60 \text{ kN}}$$

$M_P^c$



$$M_P^c = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^c = 250 - 5,02 = \underline{244,98 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,1}^c = -500 - \frac{5,02}{23,0} \cdot (23,0 - 10,0)$$

$$M_{P,1}^c = \underline{-502,83 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,2}^c = -500 - \frac{5,02}{23,0} \cdot (23,0 - 13,0)$$

$$M_{P,2}^c = \underline{-502,18 \text{ kNm}}$$

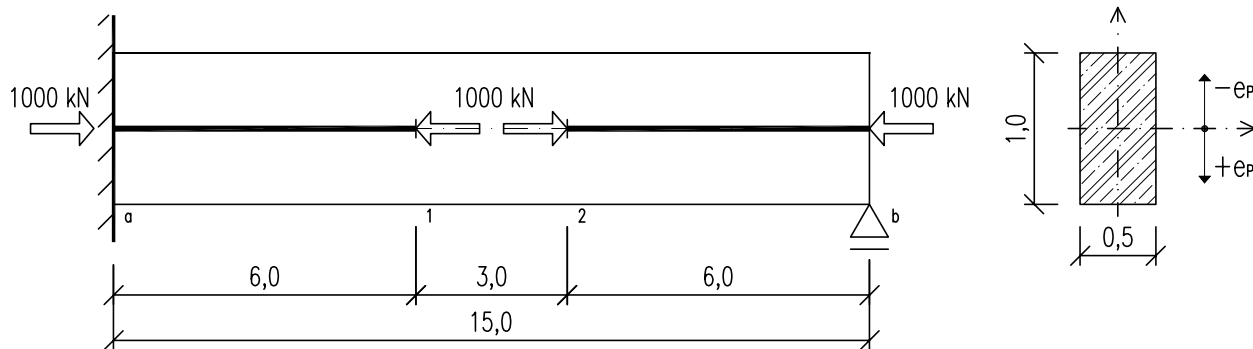
$$M_{P,b}^c = 250 + 0 = \underline{250 \text{ kNm}}$$

### 3.18 PŘÍKLAD Č.18

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro jedenkrát staticky neurčitý nosník o jednom poli:

$L_{a,b} = 15,0$  m  
 $b_c = 0,5$  m  
 $h_c = 1,0$  m  
 $e_{p,a} = e_{p,b} = 0,0$  m  
 $P = 1000$  kN

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

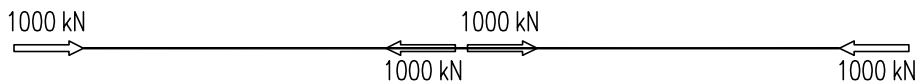


#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

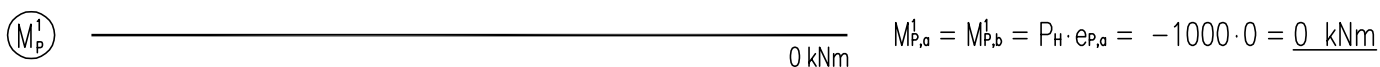
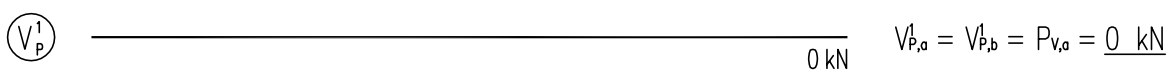
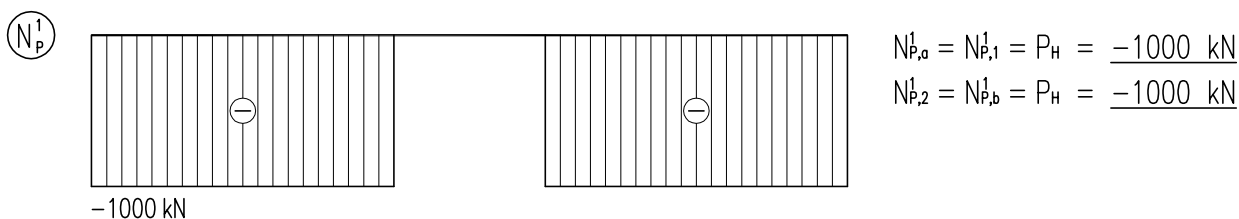
$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$P_{v,a} = P_{v,b} = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 0 = 0 \text{ kN} \quad \alpha \dots \text{odklon lana od střednice nosníku}$$

$$M_{p,a} = M_{p,b} = P_H \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

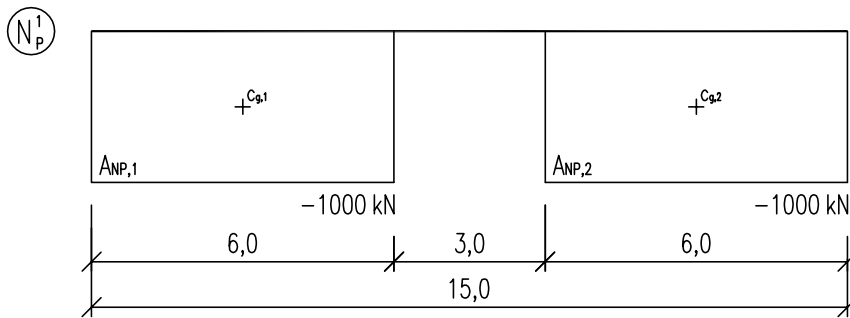


#### b) Primární účinky od předpětí:



**c) Sekundární účinky od předpětí:**

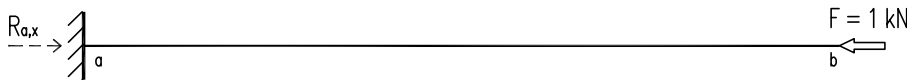
– Metoda jednotkových sil



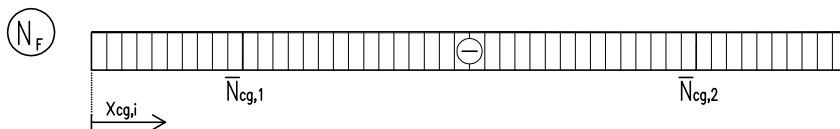
Primární účinky od předpětí  
– obrazec normálových sil  $N^1$

$$A_{NP,1} = 6,0 \cdot (-1000) = \underline{-6000 \text{ kNm}}$$

$$A_{NP,2} = 6,0 \cdot (-1000) = \underline{-6000 \text{ kNm}}$$



Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou F

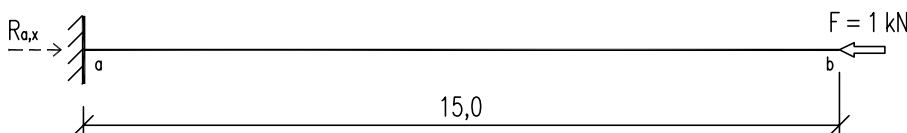


$$R_a = -F = \underline{1}$$

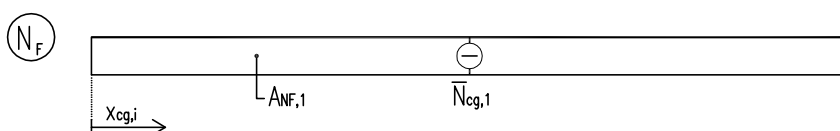
$$N_F = \bar{N}_{cg,1} = \bar{N}_{cg,2} = \underline{-1}$$

$$\delta_P = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L N_P \cdot \bar{N} = \sum_{i=1}^n A_{NP,i} \cdot \bar{N}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot A = \text{konst.}$$

$$\delta_P = 2 \cdot (-6000) \cdot (-1) = \underline{12000 \text{ m}}$$



Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou F



$$R_a = -F = \underline{1 \text{ kN}}$$

$$A_{NF,1} = 15,0 \cdot (-1) = \underline{-15 \text{ kNm}}$$

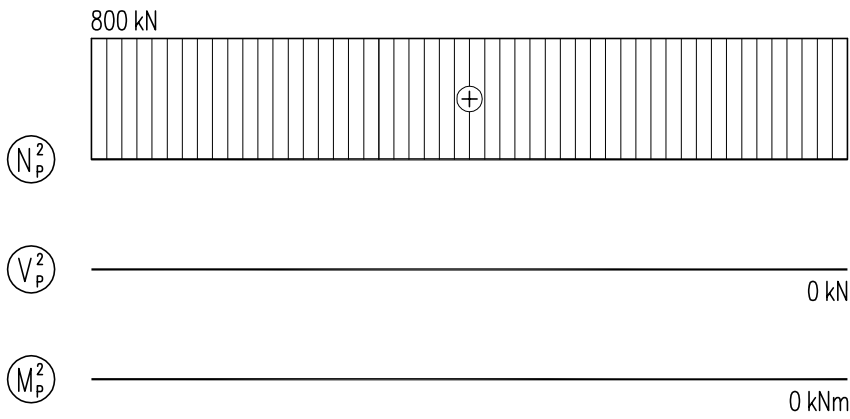
$$N_F = \bar{N}_{cg,1} = \bar{N}_{cg,2} = \underline{-1}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L N_F \cdot \bar{N} = \sum_{i=1}^n A_{NF,i} \cdot \bar{N}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot l_y = \text{konst.}$$

$$\delta_1 = (-15) \cdot (-1) = \underline{15 \text{ m}}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí R:

$$R \cdot \delta_1 = \delta_P \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\delta_P}{\delta_1} = \frac{12000}{15} = \underline{800 \text{ kN}} \quad \dots \quad R_{b,x} = R = \underline{800 \text{ kN}}$$

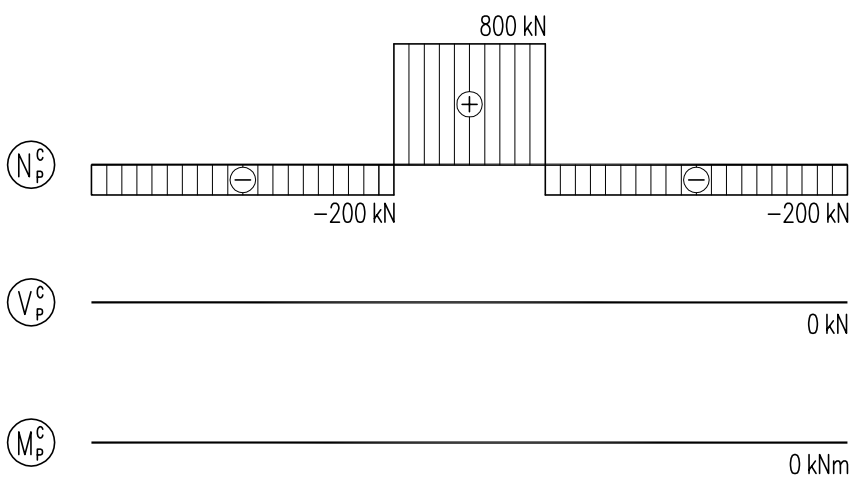


$$N_p^2 = R_{b,x} = \underline{800 \text{ kN}}$$

$$V_{p,a}^2 = V_{p,b}^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$M_{p,a}^2 = M_{p,b}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

d) Celkové účinky od předpětí:



$$N_p^c = N_p^1 + N_p^2$$

$$N_{p,a}^c = N_{p,b}^c = (-1000) + 800 = \underline{-200 \text{ kN}}$$

$$N_{p,l/2}^c = 0 + 800 = \underline{800 \text{ kN}}$$

$$V_p^c = V_p^1 + V_p^2$$

$$V_{p,a}^c = V_{p,b}^c = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$M_p^c = M_p^1 + M_p^2$$

$$M_{p,a}^c = M_{p,b}^c = \underline{0 \text{ kNm}}$$



### 3.19 PŘÍKLAD Č.19

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro dvakrát staticky neurčitý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí
- sekundární účinky od předpětí na konstrukci
- celkové účinky od předpětí na konstrukci

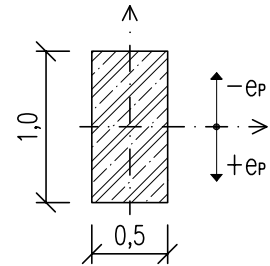
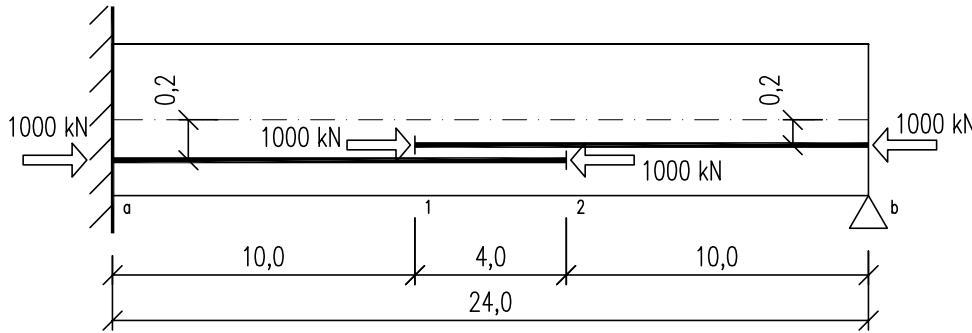
$$L_{a,b} = 24,0 \text{ m}$$

$$b_c = 0,5 \text{ m}$$

$$h_c = 1,0 \text{ m}$$

$$e_{P,a} = e_{P,b} = 0,2 \text{ m}$$

$$P_1 = P_2 = 1000 \text{ kN}$$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_{H,a} = -P_1 = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$P_{H,1} = -P_1 - P_2 = -1000 - 1000 = \underline{-2000 \text{ kN}}$$

$$P_v = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 0 = \underline{0 \text{ kN}}$$

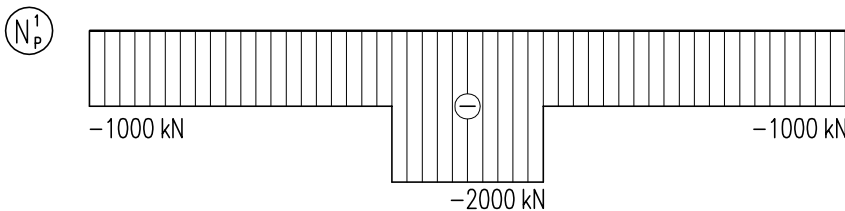
$\alpha$  ... odklon lana od střednice nosníku

$$M_{P,a} = P_1 \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,2 = \underline{-200 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,1} = P_1 \cdot e_{P,1} + P_2 \cdot e_{P,1} = -1000 \cdot 0,2 + (-1000) \cdot 0,2 = \underline{-400 \text{ kNm}}$$

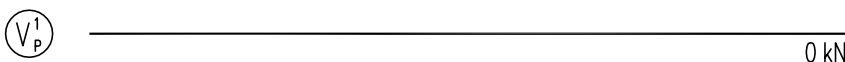


#### b) Primární účinky od předpětí:

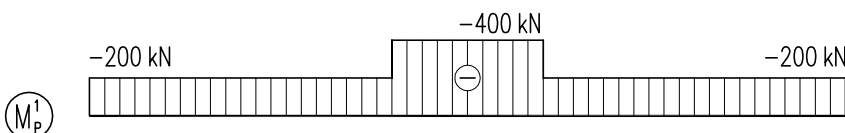


$$N_{P,a}^I = N_{P,b}^I = P_{H,a} = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$N_{P,1}^I = N_{P,2}^I = P_{H,1} = \underline{-2000 \text{ kN}}$$



$$V_P^I = P_v = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$M_{P,a}^I = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,2 = \underline{-200 \text{ kNm}}$$

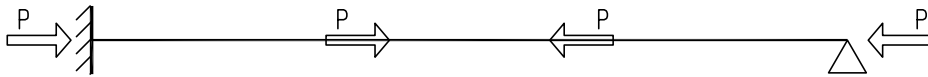
$$M_{P,1}^I = P_{H,1} \cdot e_{P,1} + P_{H,2} \cdot e_{P,1}$$

$$M_{P,1}^I = -1000 \cdot 0,2 + (-1000) \cdot 0,2$$

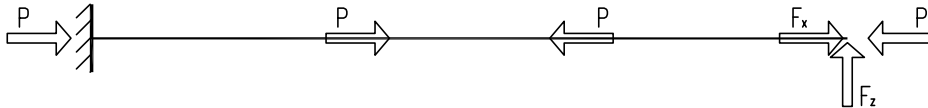
$$M_{P,1}^I = M_{P,2}^I = \underline{-400,0 \text{ kNm}}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

– Metoda jednotkových sil



... staticky neurčité schéma konstrukce

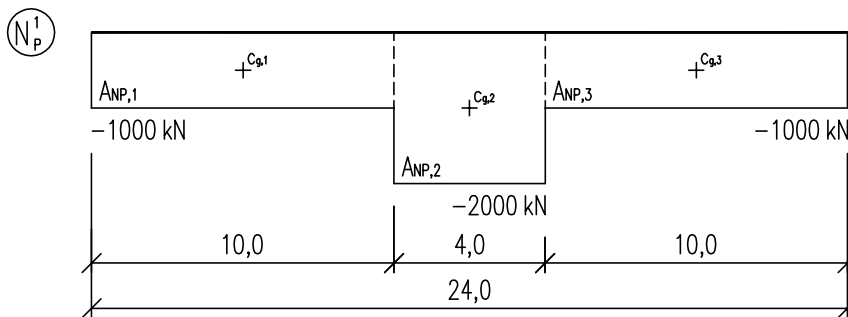


... základní staticky určitá soustava

$$F_x = R_{b,x} \quad F_z = R_{b,z}$$

**Poznámka:** Konstrukce je zatížena osovým zatížením a momentem od předpínací síly P, řešení neznámých reakcí  $R_{b,x}$  a  $R_{b,z}$  lze rozdělit na dvě části:

**c.1) Stanovení vodorovné reakce  $R_{b,x}$  :**

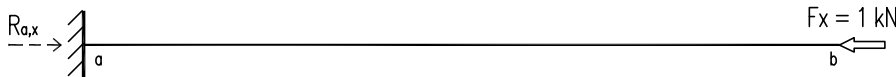


Primární účinky od předpětí  
– obrazec normálových sil  $N_P^1$

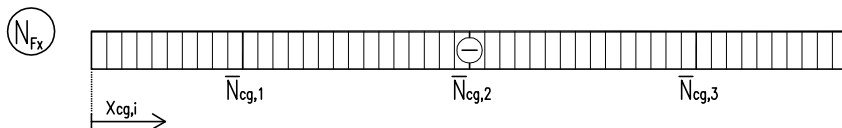
$$A_{NP,1} = 10,0 \cdot (-1000) = \underline{-10000 \text{ kNm}}$$

$$A_{NP,2} = 4,0 \cdot (-2000) = \underline{-8000 \text{ kNm}}$$

$$A_{NP,3} = 10,0 \cdot (-1000) = \underline{-10000 \text{ kNm}}$$



Staticky určitý virtuální nosník zatížený jednotkovou silou  $F_x$

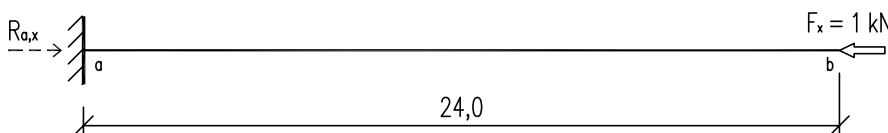


$$R_{a,x} = -F_x = \underline{1 \text{ kN}}$$

$$N_f = \bar{N}_{cg,i} = \underline{-1}$$

$$\delta_{P,x} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L N_P \cdot \bar{N} = \sum_{i=1}^n A_{NP,i} \cdot \bar{N}_{cg,i} \quad \dots E \cdot A = \text{konst.}$$

$$\delta_{P,x} = (-10000) \cdot (-1) + (-8000) \cdot (-1) + (-10000) \cdot (-1) = \underline{28000 \text{ m}}$$

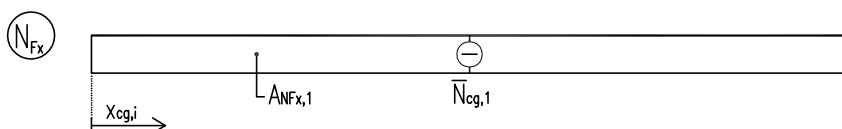


Staticky určitý virtuální nosník zatížený jednotkovou silou  $F_x$

$$R_a = -F_x = \underline{1 \text{ kN}}$$

$$A_{NFx,1} = 24,0 \cdot (-1) = \underline{-24 \text{ kNm}}$$

$$N_f = \bar{N}_{cg,1} = \underline{-1}$$

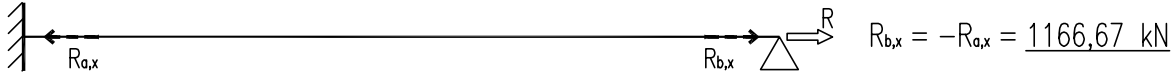


$$\delta_{1,x} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L N_{Fx} \cdot \bar{N} = \sum_{i=1}^n A_{NFx,i} \cdot \bar{N}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

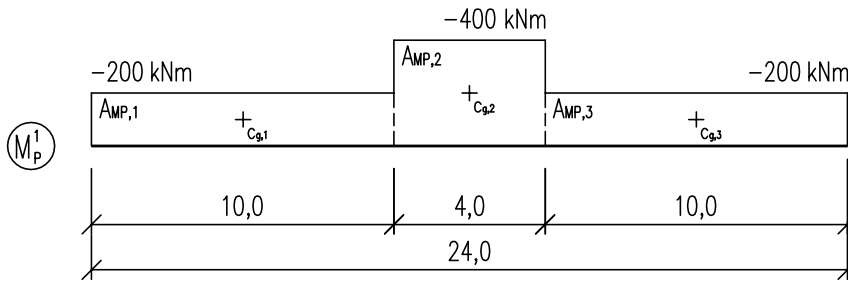
$$\delta_{1,x} = (-24) \cdot (-1) = \underline{24 \text{ m / kN}}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí  $R_{b,x}$ :

$$R \cdot \delta_{1,x} = \delta_{P,x} \Rightarrow R_{b,x} = \frac{\delta_{P,x}}{\delta_{1,x}} = \frac{28000}{24} = \underline{1166,67 \text{ kN}} \quad \dots \quad R_{b,x} = R = \underline{1166,67 \text{ kN}}$$



**c.2) Stanovení vodorovné reakce  $R_{b,z}$  :**



Primární účinky od předpětí  
– obrazec ohybových momentů  $M_P$

$$A_{MP,1} = 10,0 \cdot (-200) = \underline{-2000 \text{ kNm}^2}$$

$$A_{MP,2} = 4,0 \cdot (-400) = \underline{-1600 \text{ kNm}^2}$$

$$A_{MP,3} = 10,0 \cdot (-200) = \underline{-2000 \text{ kNm}^2}$$



Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou  $F_z$

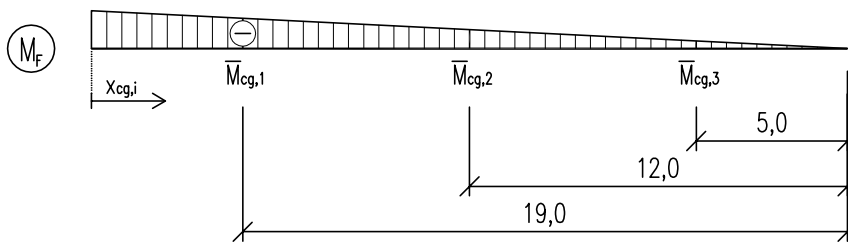
$$F_z = \underline{-1}$$

$$M_F = F_z \cdot L_{a,b} = (-1) \cdot 24 = \underline{-24,0 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,1} = \frac{(-24,0) \cdot 19,0}{24,0} = \underline{-19,0 \text{ m}}$$

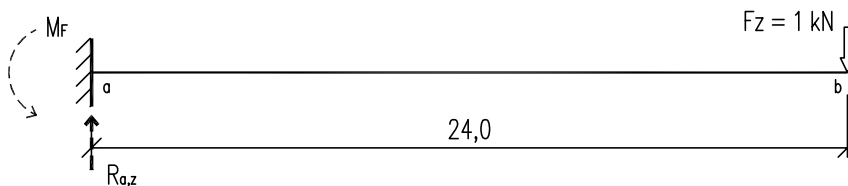
$$\bar{M}_{cg,2} = \frac{(-24,0) \cdot 12,0}{24,0} = \underline{-12,0 \text{ m}}$$

$$\bar{M}_{cg,3} = \frac{(-24,0) \cdot 5,0}{24,0} = \underline{-5,0 \text{ m}}$$



$$\delta_{P,z} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L M_P \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{MP,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot A = \text{konst.}$$

$$\delta_{P,z} = -2000 \cdot (-19,0) + (-1600) \cdot (-12,0) + (-2000) \cdot (-5,0) = \underline{67200 \text{ m}}$$



Statically určitý virtuální nosník  
zatížený jednotkovou silou  $F$

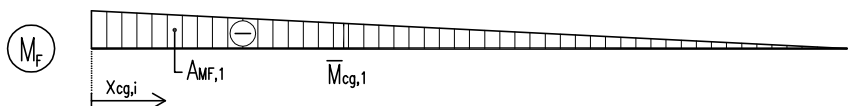
$$F = \underline{-1 \text{ kN}}$$

$$M_F = F_z \cdot L_{a,b} = (-1) \cdot 24 = \underline{-24,0 \text{ m}}$$

$$A_{MF,1} = 0,5 \cdot 24,0 \cdot (-24,0) = \underline{-288 \text{ kNm}^2}$$

$$\bar{M}_{cg,1} = M_F \cdot \frac{2}{3}$$

$$\bar{M}_{cg,1} = (-24,0) \cdot \frac{2}{3} = \underline{-16,0 \text{ m}}$$

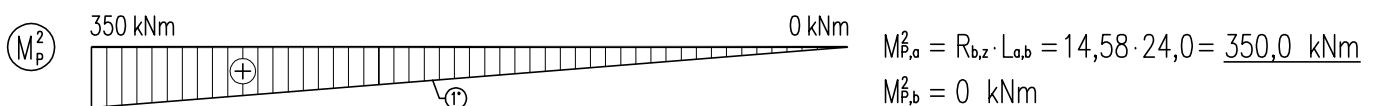
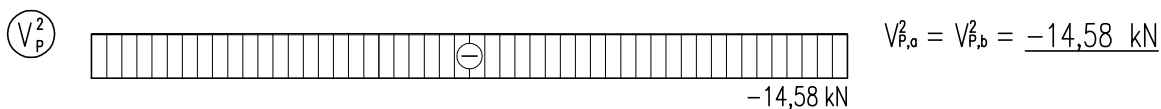
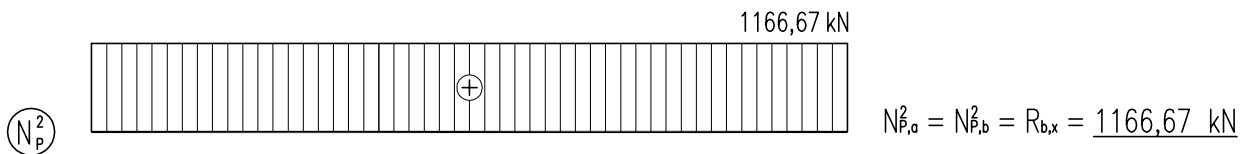
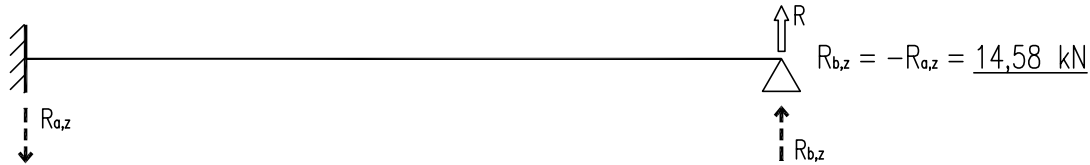


$$\delta_{1,z} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_L M_F \cdot \bar{M} = \sum_{i=1}^n A_{MF,i} \cdot \bar{M}_{cg,i} \quad \dots \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$$

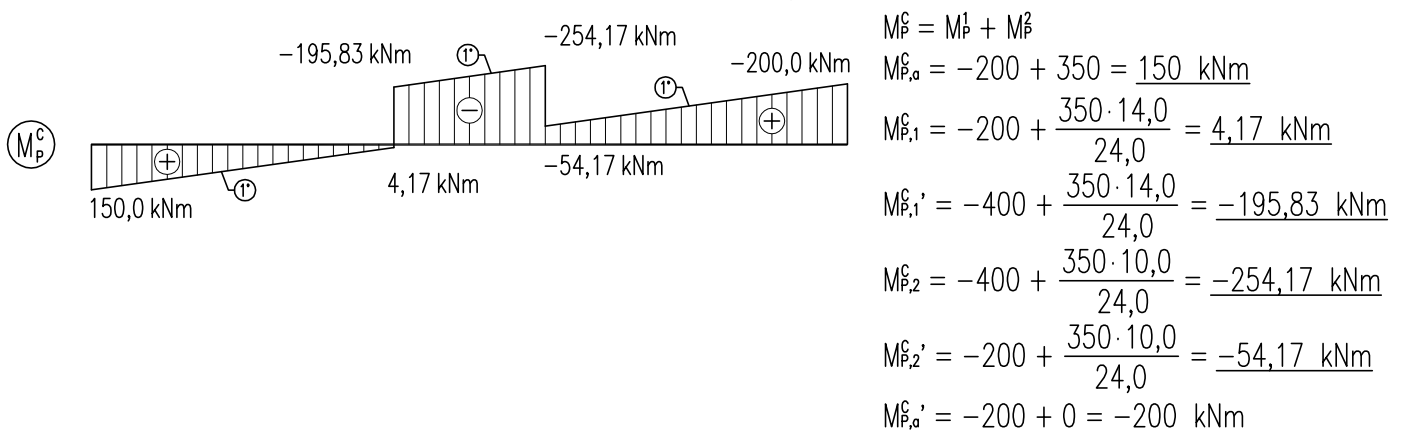
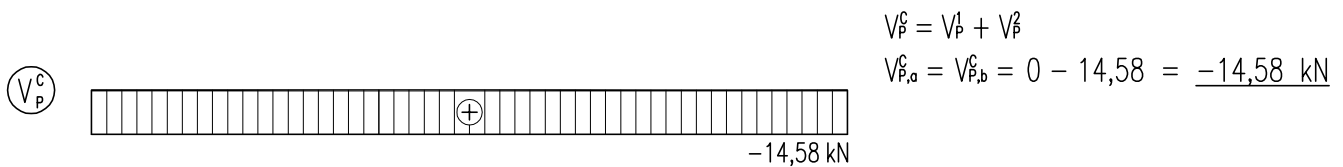
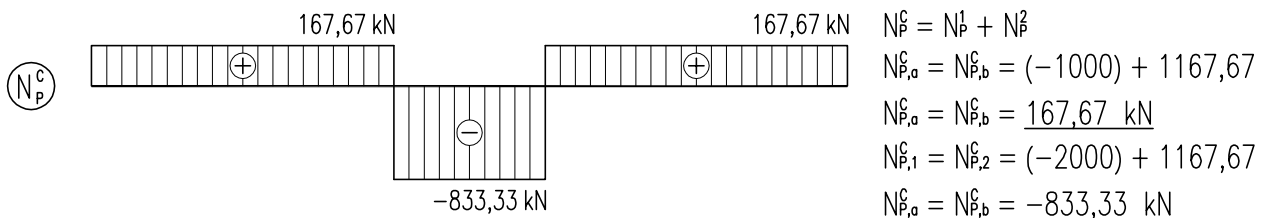
$$\delta_{1,z} = (-288,0) \cdot (-16,0) = \underline{4608,0 \text{ m} / \text{kN}}$$

Statically neurčitá reakce od předpětí  $R_{b,z}$ :

$$R_{b,z} \cdot \delta_{1,z} = \delta_{P,z} \Rightarrow R_{b,z} = \frac{\delta_{P,z}}{\delta_{1,z}} = \frac{67200}{4608} = \underline{14,58 \text{ kN}} \quad \dots \quad R_{b,z} = R = \underline{14,58 \text{ kN}}$$



d) Celkové účinky od předpětí:

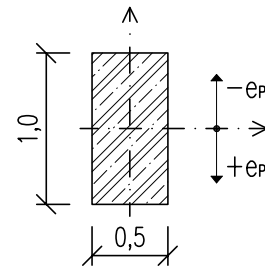
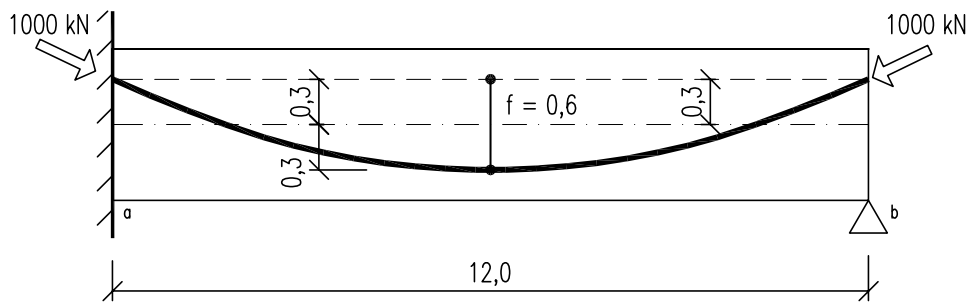


### 3.20 PŘÍKLAD Č.20

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro dvakrát staticky neurčitý nosník o jednom poli:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí

$L_{a,b} = 12,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = e_{P,b} = -0,3 \text{ m}$   
 $e_{P,Lab/2} = 0,3 \text{ m}$   
 $f = 0,6 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,60}{12,0} = 0,050 \leq \frac{1}{15} = 0,067 \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f}{L} \cdot x + e_{P,a}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot 0,60}{12,0^2} \cdot 0,0 + \frac{4 \cdot 0,60}{12,0} = 0,20 \Rightarrow \alpha = 11,31^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$

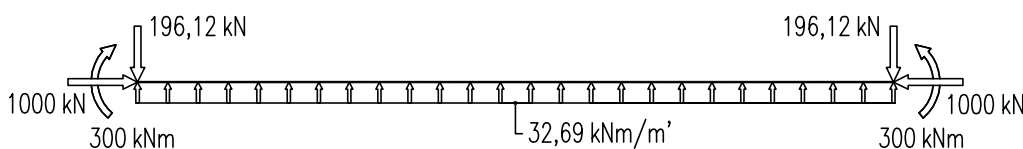
$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=L_{a,b})} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f}{L} = -\frac{8 \cdot 0,60}{12,0^2} \cdot 12,0 + \frac{4 \cdot 0,60}{12,0} = -0,20 \Rightarrow \beta = -11,31^\circ$$

$$P_{V,a} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 11,31 = -196,12 \text{ kN}$$

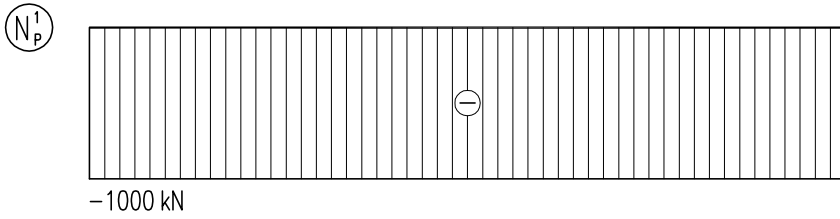
$$P_{V,b} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin (-11,31) = -196,12 \text{ kN}$$

$$p_{a,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(-196,12 - 196,12)}{12,0} = 32,69 \text{ kN/m'}$$

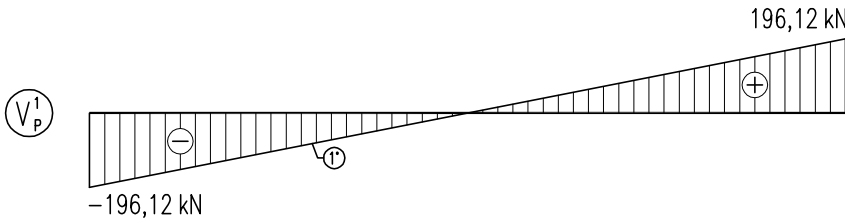
$$M_{P,a} = M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,30) = 300 \text{ kNm}$$



**b) Primární účinky od předpětí:**



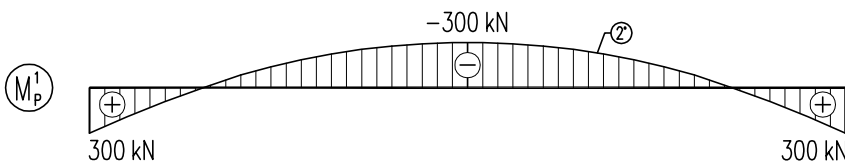
$$N_P^I = -1000 \text{ kN}$$



$$V_{P,a} = P_{V,a} = -196,12 \text{ kN}$$

$$V_{P,b} = V_{P,a} + p \cdot L_{a,b} = -196,12 + 32,69 \cdot 12,0$$

$$V_{P,b} = 196,12 \text{ kN}$$



$$M_{P,a}^I = M_{P,b}^I = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,30)$$

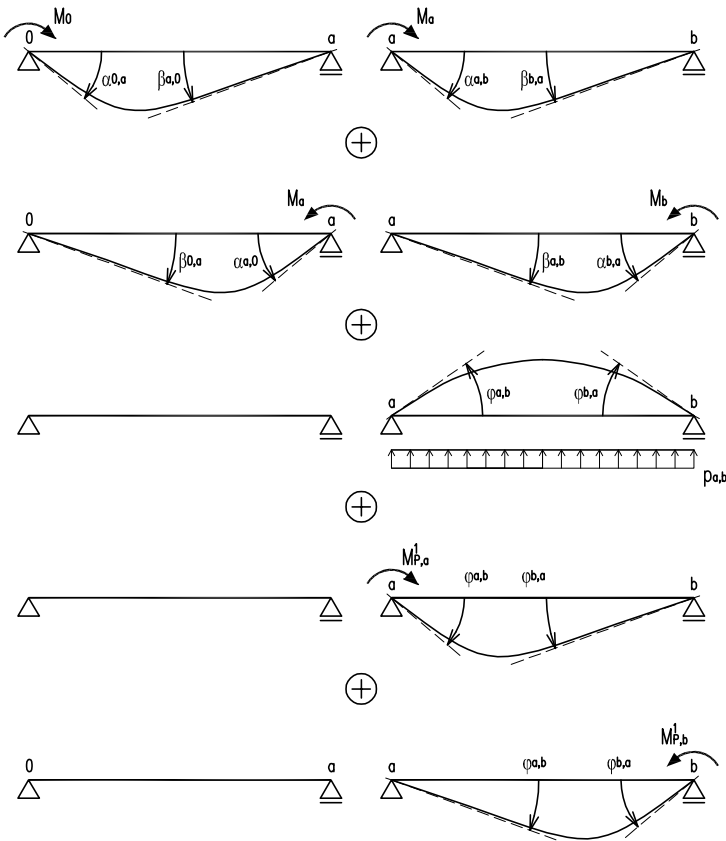
$$M_{P,a}^I = M_{P,b}^I = 300 \text{ kNm}$$

$$M_{P,Lab/2}^I = P \cdot e_{P,Lab/2} = -1000 \cdot 0,30$$

$$M_{P,Lab/2}^I = -300 \text{ kNm}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

- c.1) Metoda třímomentových rovnic – stanovení svislých reakcí:  $R_{az}, R_{bz}$   
 – stanovení momentu ve vetknutí:  $M_a$



$$M_0 \cdot \beta_{0a} + M_a \cdot (\alpha_{a0} + \alpha_{ab}) + M_b \cdot \beta_{ab} + \varphi_{a0} + \varphi_{ab} = 0$$

$$\dots M_0 = M_b = L_{0a} = 0$$

$$\dots E = I_y = \text{konst.}$$

$$\alpha_{ab} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{12,0}{3} = 4,00$$

$$\beta_{ab} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{12,0}{6} = 2,00$$

$$\varphi_{ab} = - \frac{p_{a,b} \cdot L_{a,b}^3}{24 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ab} = - \frac{32,69 \cdot 12,0^3}{24} = -2353,68$$

$$\varphi_{ab} = \frac{M_{P,a}^I \cdot L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y}$$

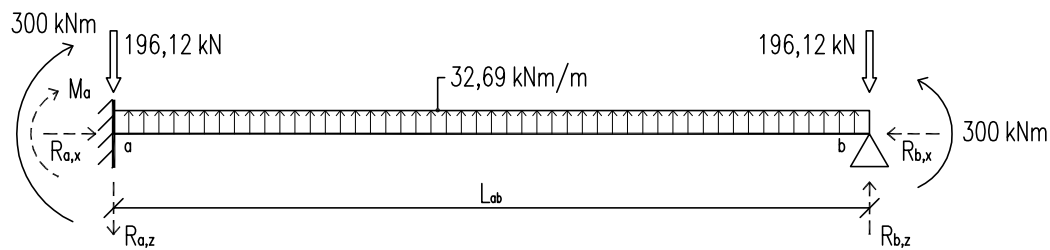
$$\varphi_{ab} = \frac{300 \cdot 12,0}{3} = 1200$$

$$\varphi_{ab} = \frac{M_{P,b}^I \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ab} = \frac{300 \cdot 12,0}{6} = 600$$

$$M_a \cdot \alpha_{ab} + \sum \varphi_{ab} = 0$$

$$M_a \cdot 4,00 + (-2353,68) + 1200 + 600 = 0 \quad \dots \quad M_a = M_{p,a} = \underline{138,42 \text{ kNm}}$$



$$\Sigma M_a = 0: -R_{b,z} \cdot L_{a,b} + P_{V,b} \cdot L_{a,b} - M_{p,b}^1 - \frac{1}{2} \cdot p_{a,b} \cdot L_{a,b}^2 + M_a + M_{p,a}^1 = 0$$

$$-R_{b,z} \cdot 12,0 + 196,12 \cdot 12 - 300 - \frac{1}{2} \cdot 32,69 \cdot 12,0^2 + 138,42 + 300 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{b,z} = \underline{11,52 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: R_{a,z} + P_{V,a} - p_{a,b} \cdot L_{a,b} - R_{b,z} + P_{V,b} = 0$$

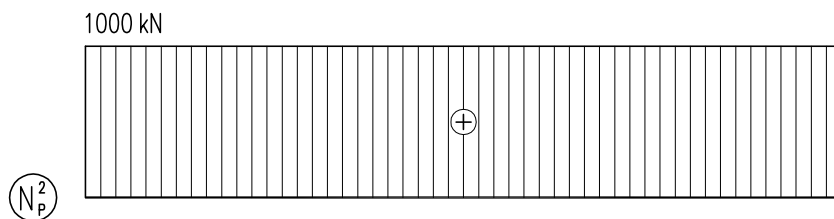
$$R_{a,z} + 196,12 - 32,69 \cdot 11,52 - 11,52 + 196,12 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{a,z} = \underline{11,52 \text{ kN}}$$

**Poznámka:** Nosník je vodorovně pevně uchycen z obou stran a předpínací síla je konstantní po celé délce nosníku, proto musí platit:

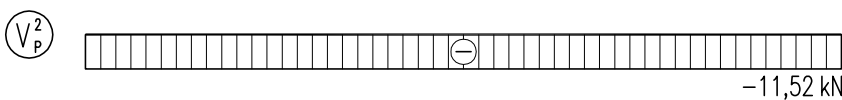
$$\Sigma F_{ix} = 0: R_{a,x} + R_{b,x} + 1000 - 1000 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{a,x} = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

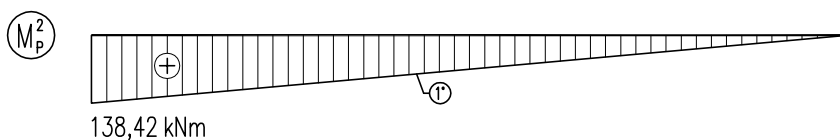
$$\Rightarrow \quad R_{b,x} = \underline{1000 \text{ kN}}$$



$$N_p^2 = \underline{1000 \text{ kN}}$$



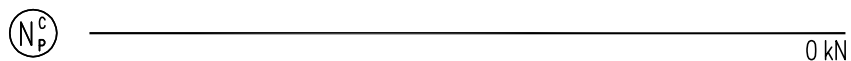
$$V_{p,a}^2 = -R_a = \underline{-11,52 \text{ kN}}$$



$$M_{p,a}^2 = M_a = \underline{121,81 \text{ kNm}}$$

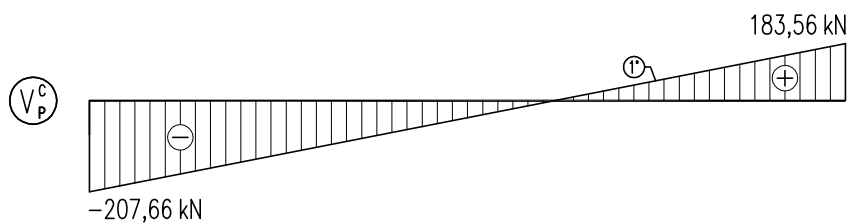
$$M_{p,b}^2 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

## d) Celkové účinky od předpětí:



$$N_P^C = N_P^1 + N_P^2$$

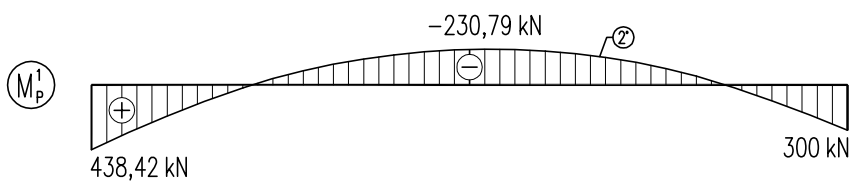
$$N_P^C = -1000 + 1000 = \underline{0 \text{ kN}}$$



$$V_P^C = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^C = -196,12 - 11,52 = \underline{-207,66 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^C = 196,12 - 11,52 = \underline{183,56 \text{ kN}}$$



$$M_P^I = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^I = 300 + 138,42 = \underline{438,42 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,Lab/2}^I = -300 + \frac{138,42}{12,0} \cdot 6,0$$

$$M_{P,Lab/2}^I = \underline{-230,79 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^I = 300 + 0 = \underline{300 \text{ kNm}}$$

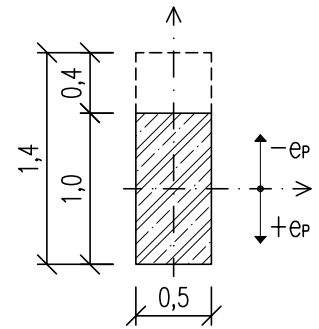
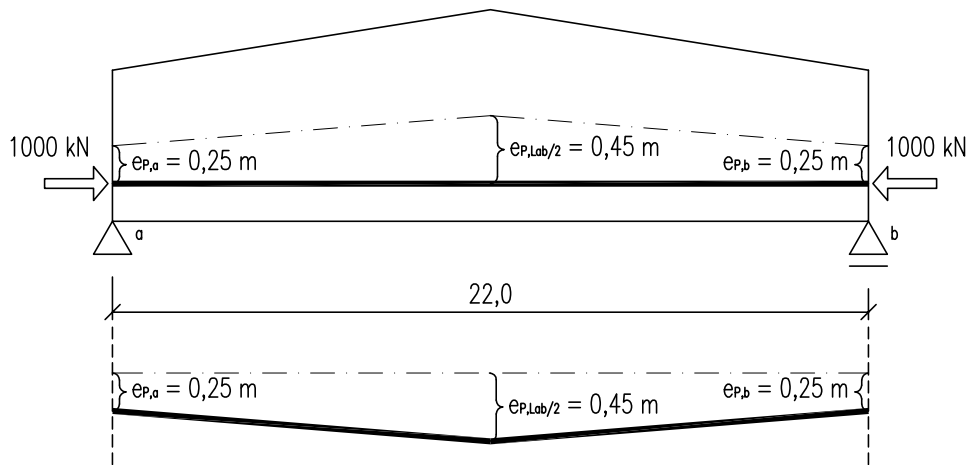


### 3.21 PŘÍKLAD Č.21

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro prostý nosník o jednom poli:

- a) ekvivalentní silové účinky od předpětí
- b) celkové účinky od předpětí na konstrukci

$L_{a,b} = 22,0$  m  
 $b_c = 0,5$  m  
 $h_{c,1} = 1,0$  m ;  $h_{c,2} = 1,4$  m  
 $e_{P,a} = e_{P,b} = 0,25$  m  
 $e_{P,Lab/2} = 0,45$  m  
 $P = 1000$  kN



úprava střednice nosníku a nové trasování kabelu

**Poznámka:** U konstrukcí (nosníků), jejichž průřez není po délce konstantní, dochází k zakřivení střednice. Řešení takovéto úloh spočívá napřímění podélné osy nosníku a úpravě trasování kabelu. Nové vedení kabelu musí respektovat původní střednici nosníku.

#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

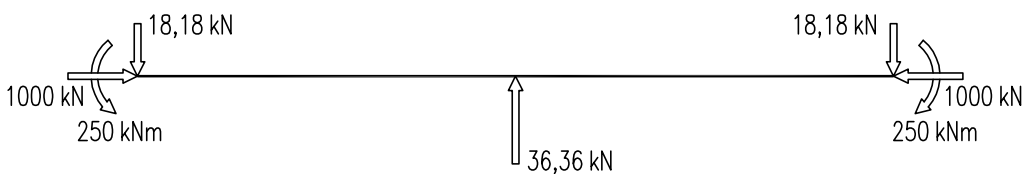
$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$P_{V,a} = P_{V,b} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 1,04 = \underline{-18,18 \text{ kN}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{P,Lab/2} - e_{P,1}}{0,5 \cdot L_{a,b}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e_{P,Lab/2} - e_{P,1}}{0,5 \cdot L_{a,b}} = \operatorname{arctg} \frac{0,45 - 0,25}{0,5 \cdot 22,0} = \underline{1,04^\circ}$$

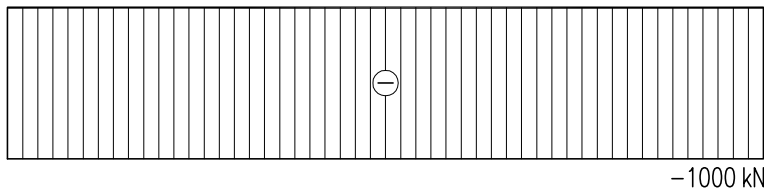
$$P_{V,Lab/2} = -(P_{V,a} + P_{V,b}) = -(-18,18 - 18,18) = \underline{36,36 \text{ kN}}$$

$$M_{P,a} = M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,25 = \underline{-250 \text{ kNm}}$$



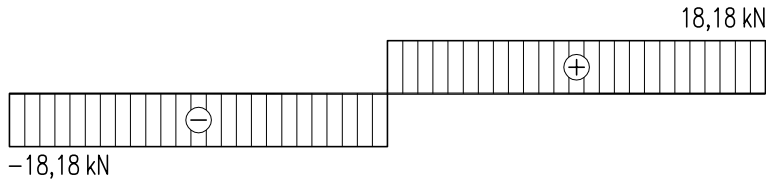
**b) Celkové účinky od předpětí:**

$N_P^C$



$$N_P^1 = N_P^{\xi} = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$V_P^C$



$$V_{P,a}^1 = V_{P,a}^{\xi} = P_{V,a} = \underline{-18,18 \text{ kN}}$$

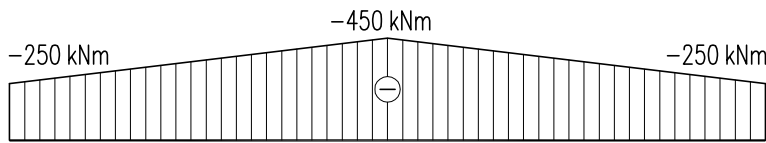
$$V_{P,Lab/2}^1 = V_{P,Lab/2}^{\xi} = P_{V,a} = \underline{-18,18 \text{ kN}}$$

$$V_{P,Lab/2}^{1'} = V_{P,Lab/2}^{\xi'} = P_{V,a} + P_{V,Lab/2}$$

$$V_{P,Lab/2}^{1'} = V_{P,Lab/2}^{\xi'} = -18,18 + 36,36$$

$$V_{P,Lab/2}^{1'} = V_{P,Lab/2}^{\xi'} = \underline{18,18 \text{ kN}}$$

$M_P^C$



$$M_{P,a}^1 = M_{P,a}^{\xi} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,25$$

$$M_{P,a}^1 = M_{P,a}^{\xi} = \underline{-250 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,Lab/2}^1 = M_{P,Lab/2}^{\xi} = P_H \cdot e_{P,Lab/2} = -1000 \cdot 0,45$$

$$M_{P,Lab/2}^1 = M_{P,Lab/2}^{\xi} = \underline{-450 \text{ kNm}}$$

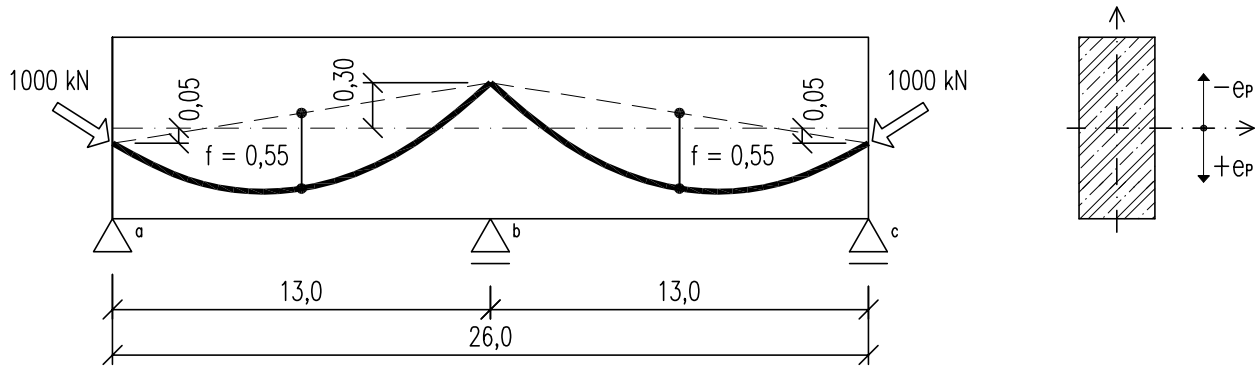
$$M_{P,b}^1 = M_{P,b}^{\xi} = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot 0,25$$

$$M_{P,b}^1 = M_{P,b}^{\xi} = \underline{-250 \text{ kNm}}$$

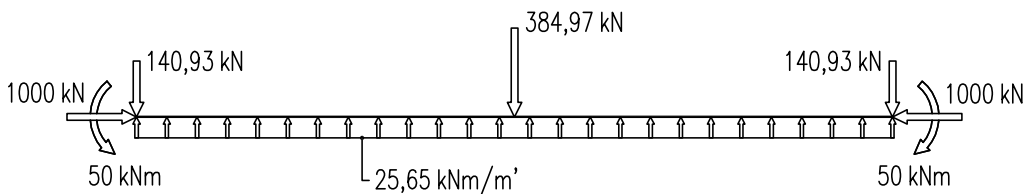
### 3.22 PŘÍKLAD Č.22

Pro spojitý nosník o dvou polích, kde: ekvivalentní silové účinky od předpětí, primární, sekundární a celkové účinky předpětí, byli vyřešeny v příkladu č. 13, stanovte:

- polohu tlakové čáry
- trasování kabelu tak, aby nevyvolával sekundární účinky od předpětí (konkordantní kabel)

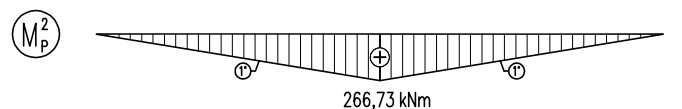
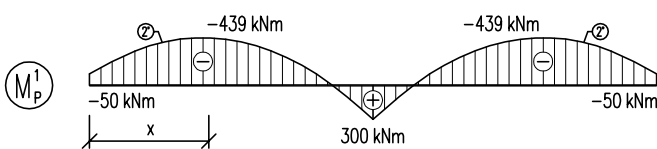
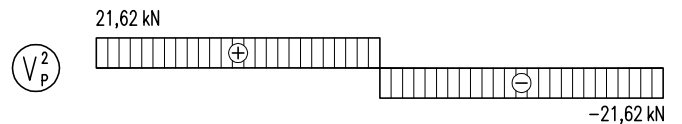
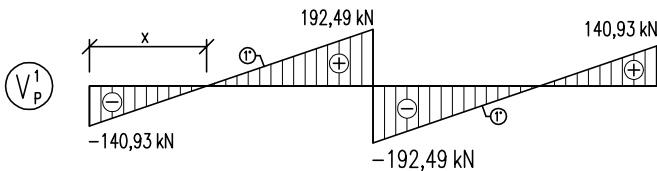
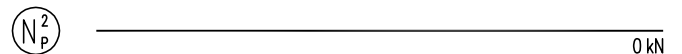
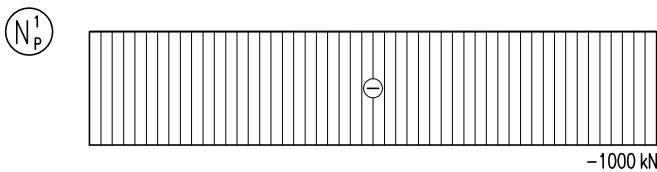


#### Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

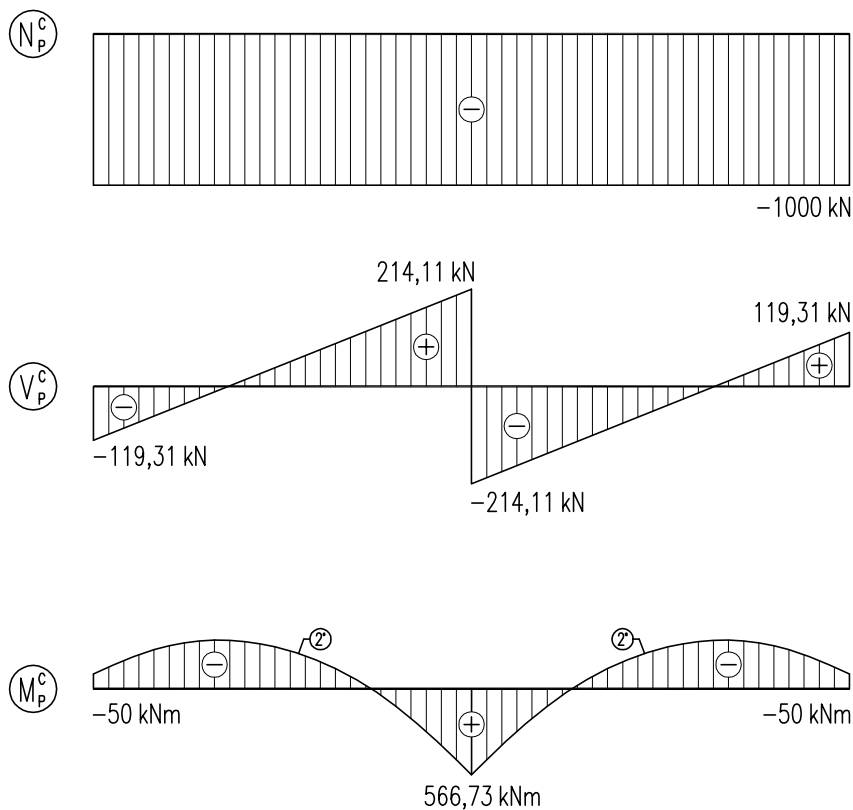


#### Primární účinky od předpětí:

#### Sekundární účinky od předpětí:

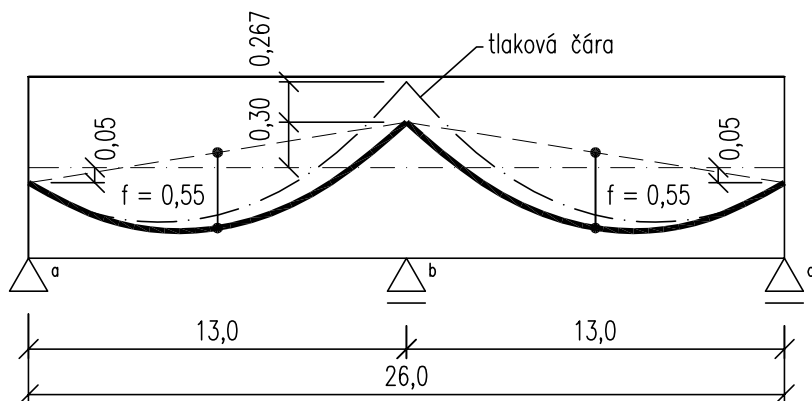


**Celkové účinky od předpětí:**



**a) Stanovení tlakové čáry:**

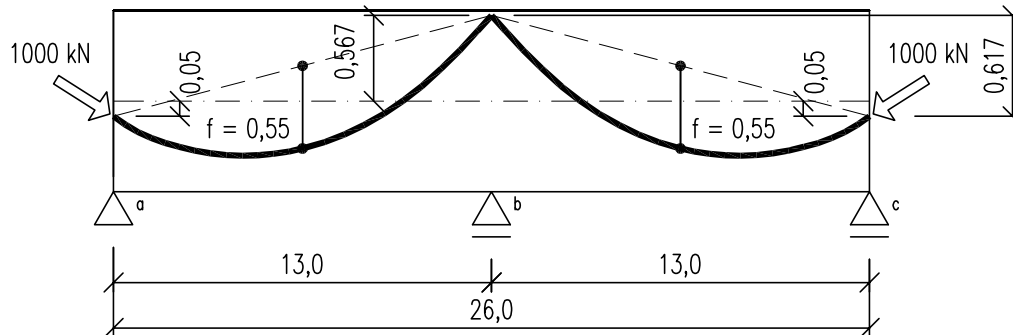
Použijeme vzorec:  $M_p^b = M_p^l + M_p^z = P_H \cdot (e_{p,b} + v_{p,b})$   
 $566,73 = 300 + 266,73 = 1000 \cdot (0,3 + v_{p,b}) \quad \dots \quad v_{p,b} = \underline{0,267 \text{ m}}$



Nyní jsme našli polohu tlakové čáry, tedy polohu působíště předpínací síly, která je posunutá vlivem staticky neurčitých účinků předpětí.

**b) Úprava trasování kabelu:**

Pokud nově navrhne trasování kabelu tak, aby odpovídalo průběhu tlakové čáry (viz. předchozí část řešeného příkladu), dosáhneme tak nulových sekundárních účinků od předpětí.



**b.1) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:**

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}} \qquad \frac{f}{L} = \frac{0,55}{13,0} = \underline{0,042} < \frac{1}{15} = \underline{0,067} \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,a}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \dots e = e_{P,b} - e_{P,a}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,55}{13,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,55 - 0,61673}{13,0} = \underline{0,122} \Rightarrow \alpha = \underline{6,94^\circ}$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,55}{13,0^2} \cdot 13,0 + \frac{4 \cdot 0,55 - 0,61673}{13,0} = \underline{-0,217} \Rightarrow \beta = \underline{-12,23^\circ}$$

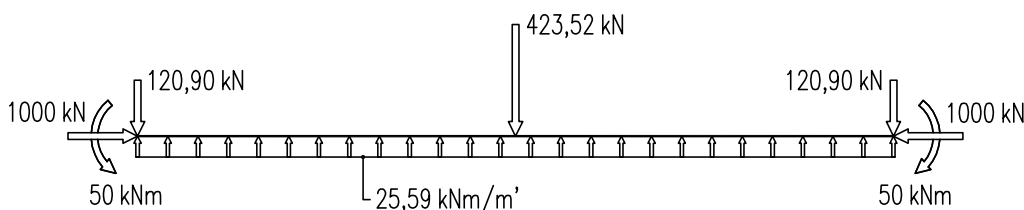
$$P_{V,a} = P_{V,c} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 6,94 = \underline{-120,90 \text{ kN}}$$

$$P_{V,b} = 2 \cdot P \cdot \sin \beta = 2 \cdot 1000 \cdot \sin (-12,23) = \underline{-423,52 \text{ kN}}$$

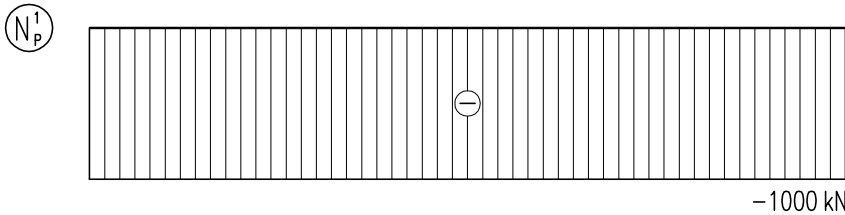
$$p_{a,b} = p_{b,c} = \frac{-(P_{V,a} + 0,5 \cdot P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(-120,90 - 0,5 \cdot 423,52)}{13,0} = \underline{25,59 \text{ kN/m'}}$$

$$M_{P,a} = M_{P,c} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,05 = \underline{-50 \text{ kNm}}$$

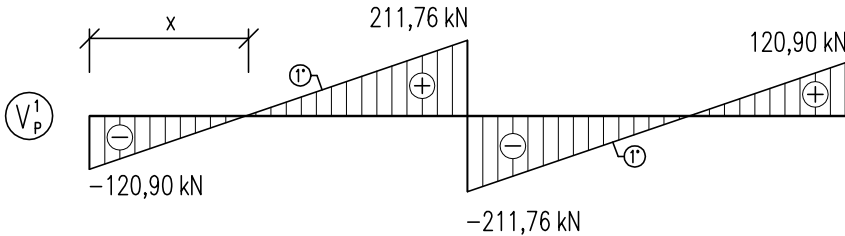
$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,56673) = \underline{566,73 \text{ kNm}}$$



**b.2) Primární účinky od předpětí:**



$$N_P^I = P_H = -1000 \text{ kN}$$



$$V_{P,a}^I = P_{V,a} = -120,90 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^I = V_{P,a} + L_{a,b} \cdot \rho_{a,b} = -120,90 + 13,0 \cdot 25,59$$

$$V_{P,b}^I = 211,76 \text{ kN}$$

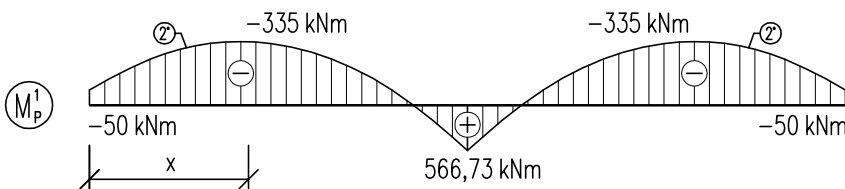
$$V_{P,b'}^I = 211,76 - 423,52 = -211,76 \text{ kN}$$

$$V_{P,c}^I = V_{P,b'} + L_{b,c} \cdot \rho_{b,c} = -211,76 + 13,0 \cdot 25,59$$

$$V_{P,c}^I = 120,90 \text{ kN}$$

$$x = \frac{V_{P,a}^I}{\rho_{a,b}} = \frac{120,90}{25,59} = 4,72 \text{ m}$$

$$e_{P,x} = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_a = -\frac{4 \cdot 0,55}{13,0^2} \cdot 4,72^2 + \frac{4 \cdot 0,55 - 0,61673}{13,0} \cdot 4,72 + 0,05 = 0,335 \text{ m}$$



$$M_{P,a}^I = M_{P,c}^I = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot 0,05$$

$$M_{P,a}^I = M_{P,c}^I = -50 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b}^I = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,56673)$$

$$M_{P,b}^I = 566,73 \text{ kNm}$$

$$M_{P,x}^I = P_H \cdot e_{P,x} = -1000 \cdot 0,335 = -335 \text{ kNm}$$

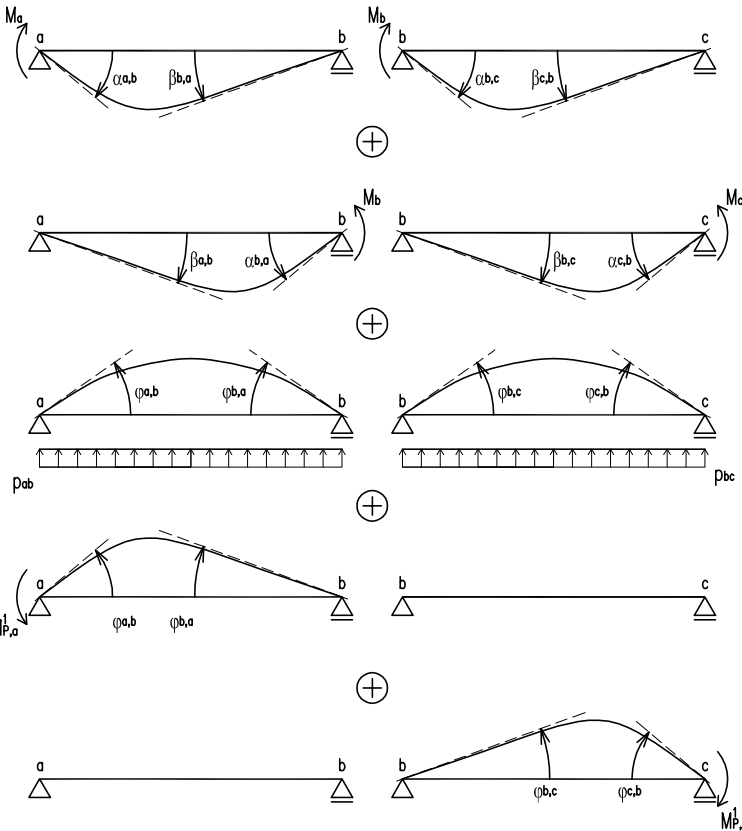
**b.3) Sekundární účinky od předpětí:**

– Metoda třímomentových rovnic

$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$\dots M_a = M_c = 0$$

$$\dots E = I_y = \text{konst.}$$



$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{13,0}{3} = 4,33$$

$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{13,0}{6} = 2,17$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{\rho_{a,b} \cdot L_{a,b}^3}{24 \cdot E \cdot I_y}$$

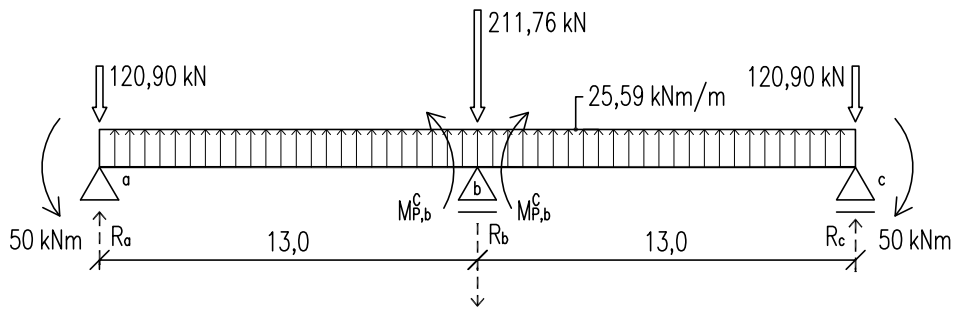
$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = -\frac{25,59 \cdot 13,0^3}{24} = -2342,55$$

$$\varphi_{ba} = -\frac{M_{P,a}^I \cdot L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ba} = -\frac{50,0 \cdot 13,0}{6} = -108,33$$

$$\varphi_{bc} = -\frac{M_{P,c}^I \cdot L_{b,c}}{6 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{bc} = -\frac{50,0 \cdot 13,0}{6} = -108,33$$



$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} - P_{V,a} \cdot L_{a,b} - M_{P,a}^1 + \frac{1}{2} \cdot p_{a,b} \cdot L_{a,b}^2 - M_{P,b}^1 = 0$$

$$R_a \cdot 13,0 - 120,90 \cdot 13 - 50 + \frac{1}{2} \cdot 25,59 \cdot 13,0^2 - 566,73 = 0 \quad \approx > \quad R_a = R_c = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: R_a - R_b + R_c = 0$$

$$0 - R_b + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$N_P^2 = 0 \text{ kN}$$

$$V_P^2 = 0 \text{ kN} \quad V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = V_{P,c}^2 = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$M_P^2 = 0 \text{ kNm} \quad M_{P,b}^2 = M_{P,b}^1 - M_{P,b}^1 = 566,73 - 566,73 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

#### b.4) Celkové účinky od předpětí:

$$N_P^c = N_P^1 + N_P^2 = N_{P,a}^c = N_{P,b}^c = N_{P,c}^c = (-1000) + 0 = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$V_P^c = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^c = -120,90 + 0 = \underline{-120,90 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^c = 211,76 + 0 = \underline{211,76 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^{\prime c} = -211,76 + 0 = \underline{-211,76 \text{ kN}}$$

$$V_{P,c}^c = 120,90 + 0 = \underline{120,90 \text{ kN}}$$

$$M_P^c = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,a}^c = M_{P,c}^c = -50 + 0 = \underline{-50 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^c = 566,73 + 0 = \underline{566,73 \text{ kNm}}$$

**Závěr:** Úpravou trasování předpínacího kabelu tak, že jeho dráha odpovídá průběhu tlakové čáry (výslednicí sil) dosáhneme, že na dané konstrukci nevznikají sekundární účinky předpětí (sekundární moment, reakce od předpětí). Celkové účinky od předpětí jsou tak rovny primárním účinkům.

### 3.23 PŘÍKLAD Č.23

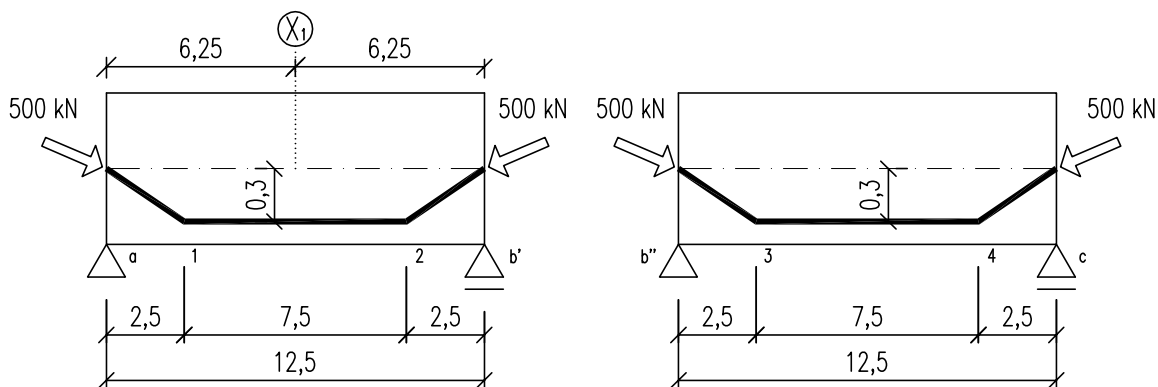
Je dána konstrukce o dvou polích, jejíž výstavba je rozdělena do dvou fází.  
 V 1. fázi jde od dva prosté nosníky předepnutý každý jedním kabelem viz. schéma.  
 Ve 2. fázi jsou prosté nosníky zmonolitněny a předepnutý a kabelem spojitosti.

$L_{a,b} = L_{b,c} = 12,5 \text{ m}$   
 $b_c = 0,4 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $P_{F,1} = 500 \text{ kN}$   
 $P_{F,2} = 1000 \text{ kN}$   
 $q = 15,0 \text{ kN/m}$   
 $\gamma_{\text{beton}} = 25 \text{ kN/m}^3$

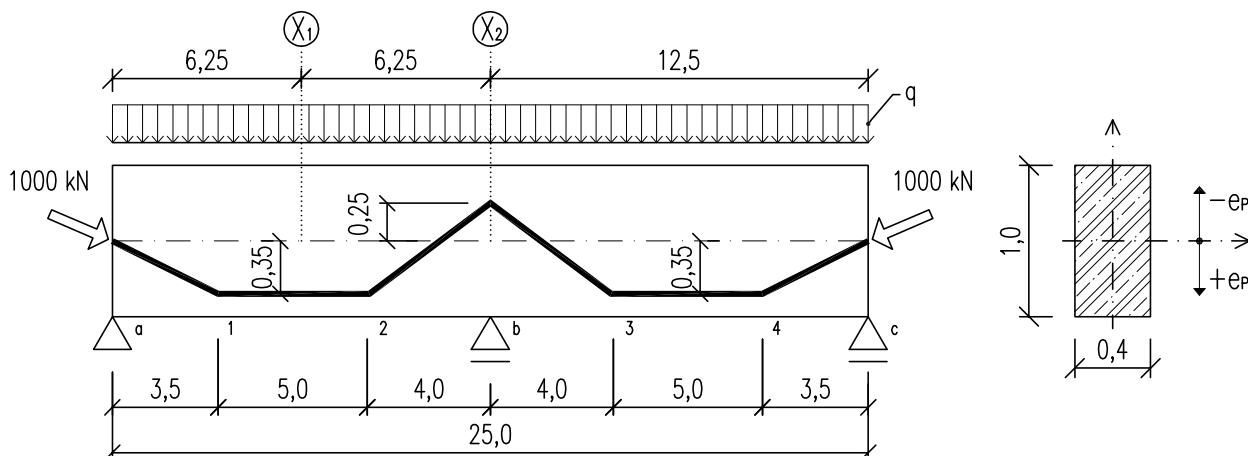
Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte:

- a) FÁZE 1: –ekvivalentní silové účinky od předpětí  
 –celkové účinky od předpětí  
 –napětí v řezu  $X_1$  od účinků předpětí a vlastní tíhy
- b) FÁZE 2: –ekvivalentní silové účinky od předpětí  
 –celkové účinky od předpětí  
 –napětí v řezu  $X_1$  a  $X_2$  od účinků předpětí, vlastní tíhy a proměnného zatížení  $q$

**FÁZE 1:**  $e_{P,a} = e_{P,b} = e_{P,c} = 0,0 \text{ m}$   
 $e_{P,1} = e_{P,2} = e_{P,3} = e_{P,4} = 0,3 \text{ m}$



**FÁZE 2:**  $e_{P,a} = e_{P,c} = 0,0 \text{ m}$   
 $e_{P,b} = 0,25 \text{ m}$   
 $e_{P,1} = e_{P,2} = e_{P,3} = e_{P,4} = 0,35 \text{ m}$



#### a.1) Ekvivalentní silové účinky od předpětí – FÁZE 1:

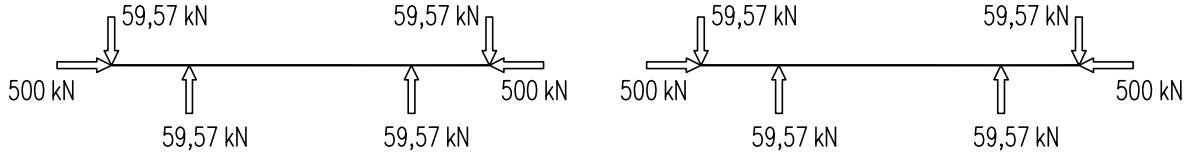
$$P_H = -P_1 = -500 \text{ kN}$$



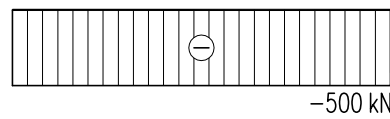
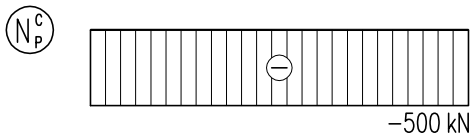
$$P_{v,1} = P_{v,2} = P_{v,3} = P_{v,4} = P \cdot \sin \alpha = 500 \cdot \sin 6,84 = \underline{59,57 \text{ kN}}$$

$$P_{v,a} = P_{v,b'} = P_{v,b''} = P_{v,c} = -P \cdot \sin \alpha = -500 \cdot \sin 6,84 = \underline{-59,57 \text{ kN}}$$

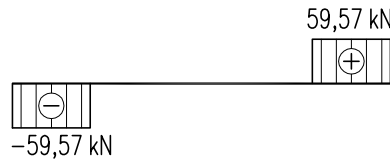
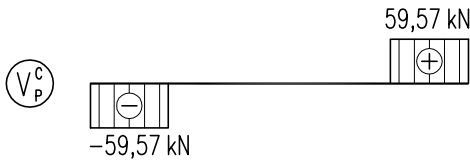
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{p,1}}{L_{a,1}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e_{p,1}}{L_{a,1}} = \operatorname{arctg} \frac{0,3}{2,5} = \underline{6,84^\circ}$$



**a.2) Celkové účinky od předpětí – FÁZE 1:**



$$N_p^c = P_H = \underline{-500 \text{ kN}}$$

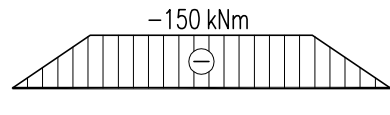
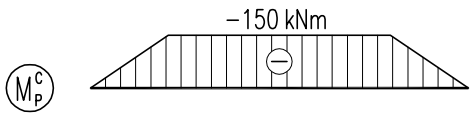


$$V_{p,a} = P_{v,a} = \underline{-59,57 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b'} = P_{v,b'} = \underline{59,57 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b''} = -P_{v,b''} = \underline{-59,57 \text{ kN}}$$

$$V_{p,c} = -P_{v,c} = \underline{59,57 \text{ kN}}$$



$$M_{p,a} = M_{p,b'} = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,1} = M_{p,2} = P \cdot e_{p,1} =$$

$$= -500 \cdot 0,3 = \underline{-150 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,b''} = M_{p,c} = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,3} = M_{p,4} = P \cdot e_{p,3} =$$

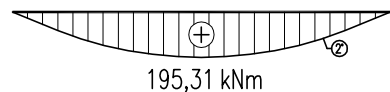
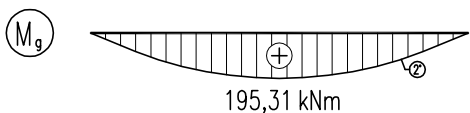
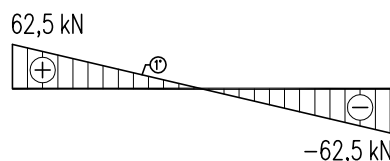
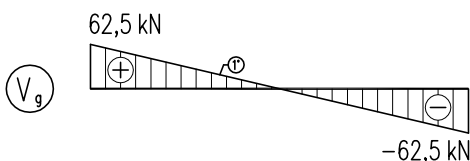
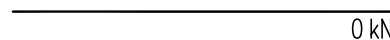
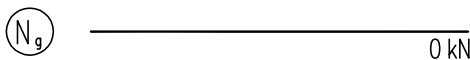
$$= -500 \cdot 0,3 = \underline{-150 \text{ kNm}}$$

**a.3) Účinky vlastní tíhy – FÁZE 1:**

$$N_g = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

$$V_g = \pm \frac{1}{2} \cdot (b_c \cdot h_c) \cdot \gamma_{\text{beton}} \cdot L_{a,b} = \pm \frac{1}{2} \cdot (0,4 \cdot 1,0) \cdot 25 \cdot 12,5 = \underline{\pm 62,5 \text{ kN}}$$

$$M_g = \frac{1}{8} \cdot (b_c \cdot h_c) \cdot \gamma_{\text{beton}} \cdot L_{a,b}^2 = \frac{1}{8} \cdot (0,4 \cdot 1,0) \cdot 25 \cdot 12,5^2 = \underline{195,31 \text{ kNm}}$$

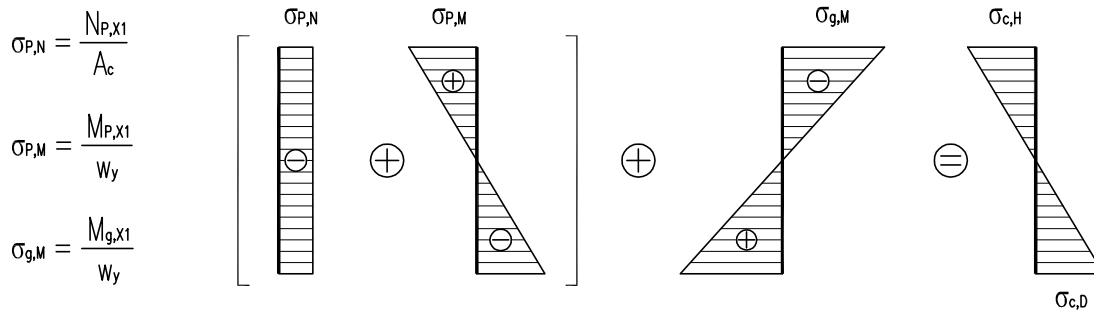


**a.4) Průřezové charakteristiky:**

$$A_c = b_c \cdot h_c = 0,4 \cdot 1,0 = 0,4 \text{ m}^2$$

$$W_y = \frac{1}{6} \cdot b_c \cdot h_c^2 = \frac{1}{6} \cdot 0,4 \cdot 1,0^2 = 0,0666 \text{ m}^3$$

**a.5) Výpočet napětí v průřezu X<sub>1</sub> – FÁZE 1:**



**Horní (tlačená) vlákna:**

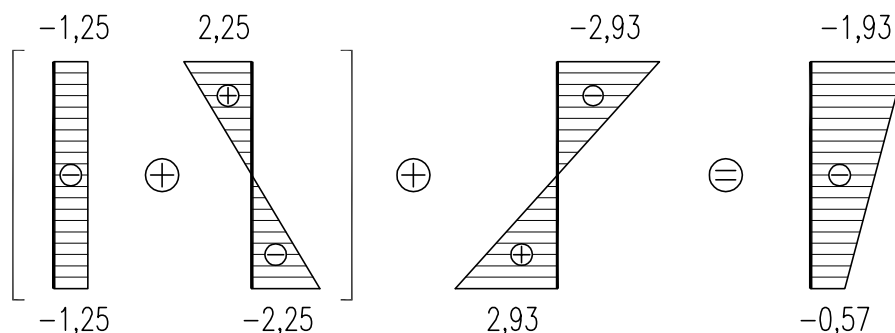
$$\sigma_{c,H} = \left( -\frac{N_{P,X1}}{A_c} + \frac{M_{P,X1}}{W_y} \right) - \left( \frac{M_{g,X1}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,H} = \left( -\frac{500}{0,4} + \frac{150}{0,0666} \right) - \left( \frac{195,31}{0,0666} \right) = -1,93 \text{ MPa}$$

**Dolní (tažená) vlákna:**

$$\sigma_{c,D} = \left( -\frac{N_{P,X1}}{A_c} - \frac{M_{P,X1}}{W_y} \right) + \left( \frac{M_{g,X1}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,D} = \left( -\frac{500}{0,4} - \frac{150}{0,0666} \right) + \left( \frac{195,31}{0,0666} \right) = -0,57 \text{ MPa}$$



**b.1) Ekvivalentní silové účinky od předpětí – FÁZE 2:**

$$P_H = -P_2 = -1000 \text{ kN}$$

$$P_{v,1} = P_{v,4} = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 6,84 = 99,49 \text{ kN}$$

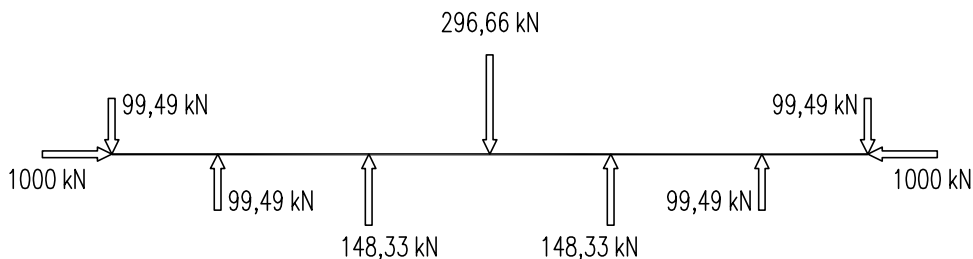
$$P_{v,o} = P_{v,c} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 5,71 = -99,49 \text{ kN}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{P,1}}{L_{a,1}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e_{P,1}}{L_{a,1}} = \operatorname{arctg} \frac{0,35}{3,5} = 5,71^\circ$$

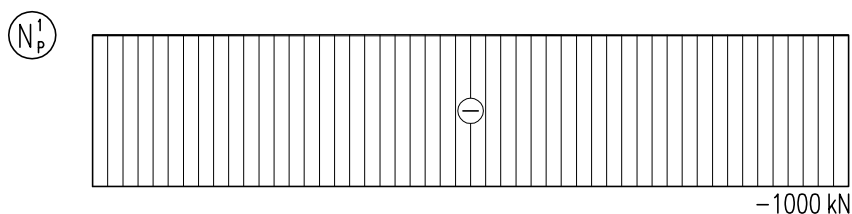
$$P_{v,2} = P_{v,3} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin 8,53 = \underline{148,33 \text{ kN}}$$

$$P_{v,b} = -P \cdot \sin \beta \cdot 2 = -1000 \cdot \sin 8,53 \cdot 2 = \underline{-296,66 \text{ N}}$$

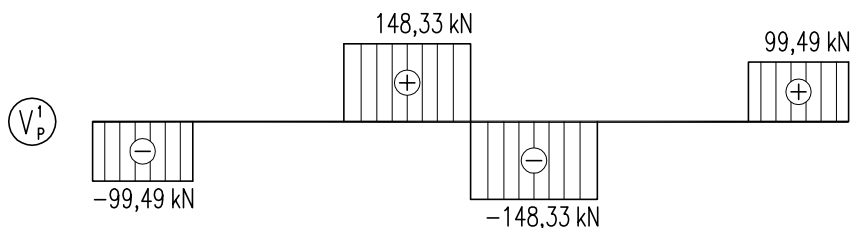
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e_{p,1}}{L_{a,1}} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \frac{e_{p,2} + e_{p,b}}{L_{2,b}} = \operatorname{arctg} \frac{0,35 + 0,25}{4,0} = \underline{8,53^\circ}$$



**b.2) Primární účinky od předpětí – FÁZE 2:**



$$N_p^I = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



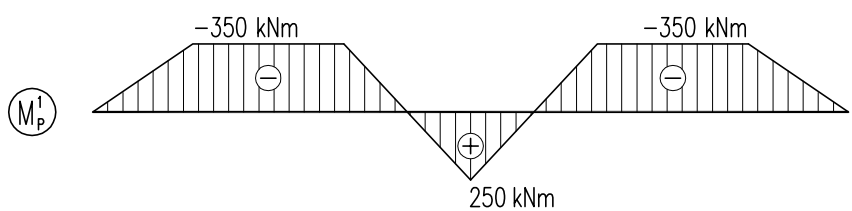
$$V_{p,a} = P_{v,a} = \underline{-99,49 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b} = P_{v,2} = \underline{148,33 \text{ kN}}$$

$$V_{p,b'} = P_{v,2} + P_{v,b} = 148,34 - 296,68$$

$$V_{p,b'} = \underline{-148,33 \text{ kN}}$$

$$V_{p,c} = P_{v,a} = \underline{99,49 \text{ kN}}$$



$$M_{p,a}^I = M_{p,c}^I = P \cdot e_{p,a} = -1000 \cdot 0 = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,1}^I = M_{p,2}^I = P \cdot e_{p,1} = -1000 \cdot 0,35$$

$$M_{p,1}^I = M_{p,2}^I = \underline{-350 \text{ kNm}}$$

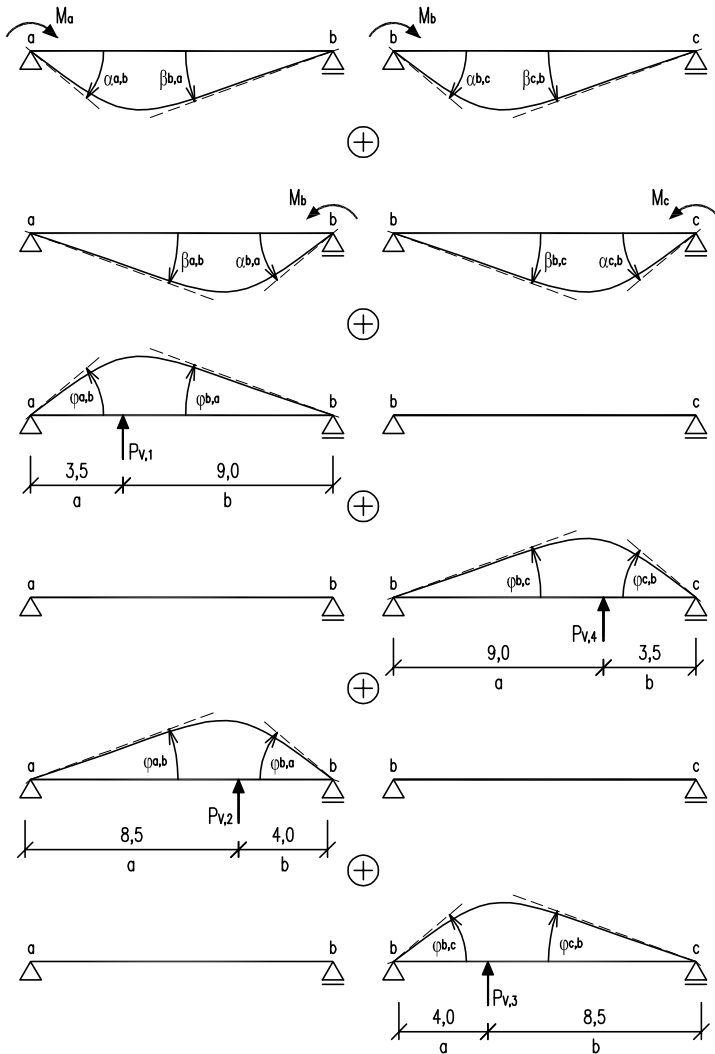
$$M_{p,b}^I = P \cdot e_{p,b} = -1000 \cdot (-0,25)$$

$$M_{p,b}^I = \underline{250 \text{ kNm}}$$

$$M_{p,x1}^I = M_{p,1}^I = \underline{-350 \text{ kNm}}$$

**b.3) Sekundární účinky od předpětí – FÁZE 2:**

– Metoda třímomentových rovnic



$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

... \$M\_a = M\_c = 0\$

... \$E = I\_y = \text{konst.}\$

$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{12,5}{3} = 4,17$$

$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{12,5}{6} = 2,08$$

$$\varphi_{ba} = - \frac{P_{v,1} \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} + a)$$

$$\varphi_{ba} = - \frac{99,49 \cdot 3,5 \cdot 9,0}{6 \cdot 12,5} \cdot (12,5 + 3,5) = -668,57$$

$$\varphi_{bc} = - \frac{P_{v,4} \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{b,c}} \cdot (L_{b,c} + b)$$

$$\varphi_{bc} = - \frac{99,49 \cdot 3,5 \cdot 9,0}{6 \cdot 12,5} \cdot (12,5 + 3,5) = -668,57$$

$$\varphi_{ba} = - \frac{P_{v,2} \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{a,b}} \cdot (L_{a,b} + a)$$

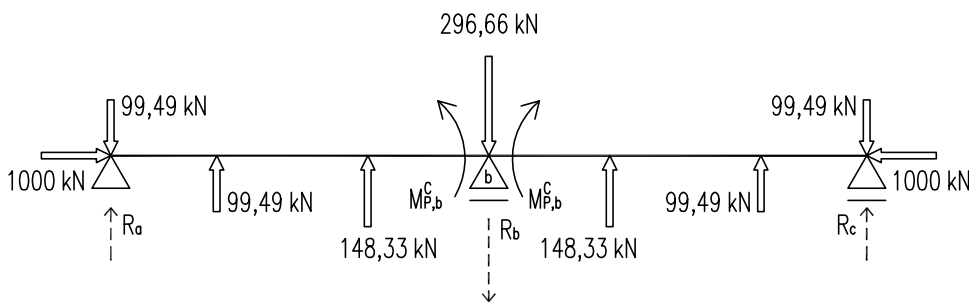
$$\varphi_{ba} = - \frac{148,33 \cdot 8,5 \cdot 4,0}{6 \cdot 12,5} \cdot (12,5 + 8,5) = -1412,10$$

$$\varphi_{bc} = - \frac{P_{v,3} \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L_{b,c}} \cdot (L_{b,c} + b)$$

$$\varphi_{bc} = - \frac{148,33 \cdot 8,5 \cdot 4,0}{6 \cdot 12,5} \cdot (12,5 + 8,5) = -1412,10$$

$$M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \Sigma \varphi_{ba} + \Sigma \varphi_{bc} = 0$$

$$M_b \cdot (4,17 + 4,17) + 2 \cdot (-668,57 - 1412,10) = 0 \quad \dots \quad M_b = M_{P,b} = 498,96 \text{ kNm}$$



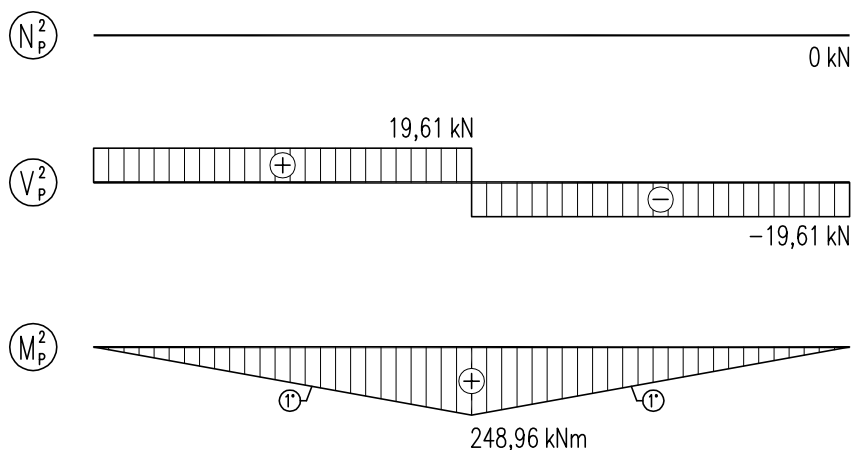
$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} - P_{v,a} \cdot L_{a,b} + P_{v,1} \cdot L_{1,b} + P_{v,2} \cdot L_{2,b} - M_{P,b} = 0$$

$$R_a \cdot 12,5 - 99,49 \cdot 12,5 + 99,49 \cdot 9,0 + 148,33 \cdot 4,0 - 498,96 = 0 \quad \approx > \quad R_a = R_c = 19,61 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: R_a - R_b + R_c = 0$$

$$19,61 - R_b + 19,61 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = -39,22 \text{ kN}$$

$$M_b^z = M_b^e - M_b^i = 498,96 - 250 = 248,96 \text{ kN}$$



$$N_P^2 = 0 \text{ kN}$$

$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = R_a = 19,61 \text{ kN}$$

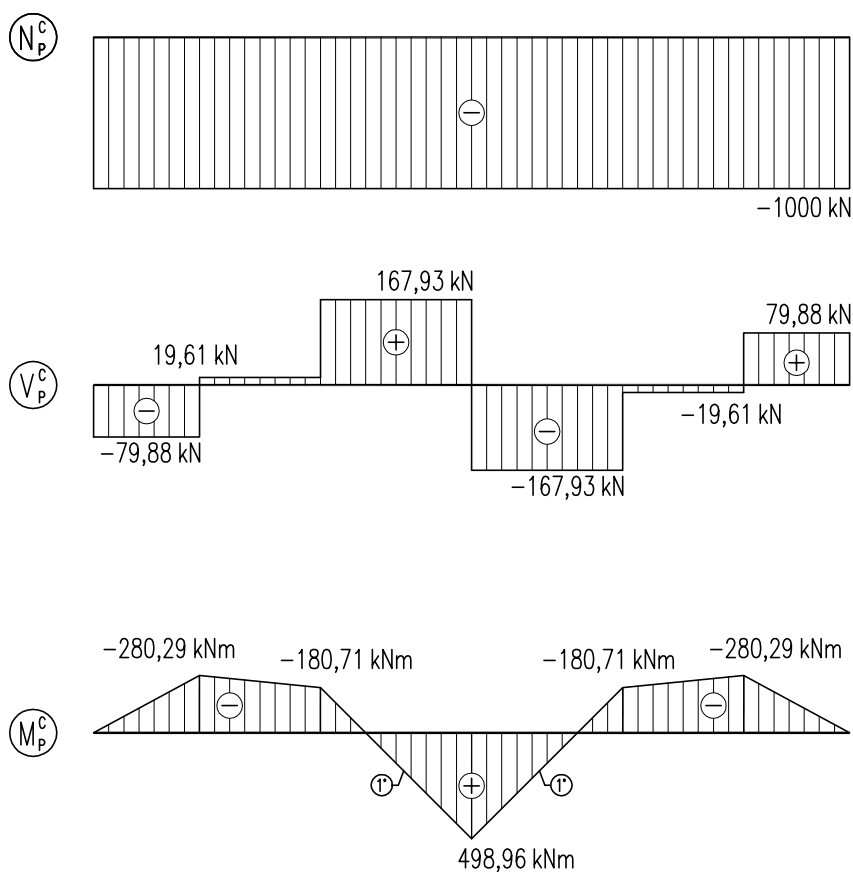
$$V_{P,b}^2 = V_{P,b}^2 - R_b = 19,61 - 39,22$$

$$V_{P,b}^2 = V_{P,c}^2 = -19,61 \text{ kN}$$

$$M_{P,a}^2 = M_{P,c}^2 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b}^2 = 248,26 \text{ kNm}$$

**b.4) Celkové účinky od předpětí – FÁZE 2:**



$$N_P^c = N_P^1 + N_P^2$$

$$N_P^c = 1000 + 0 = 1000 \text{ kN}$$

$$V_P^c = V_P^1 + V_P^2$$

$$V_{P,a}^c = -99,49 + 19,61 = -79,88 \text{ kN}$$

$$V_{P,1}^c = 0 + 19,61 = 19,61 \text{ kN}$$

$$V_{P,2}^c = 148,33 + 19,61 = 167,94 \text{ kN}$$

$$M_P^c = M_P^1 + M_P^2$$

$$M_{P,1}^c = -350 + \frac{248,96}{12,5} \cdot 3,5$$

$$M_{P,1}^c = -280,29 \text{ kNm}$$

$$M_{P,2}^c = -350 + \frac{248,96}{12,5} \cdot 8,5$$

$$M_{P,2}^c = -180,71 \text{ kNm}$$

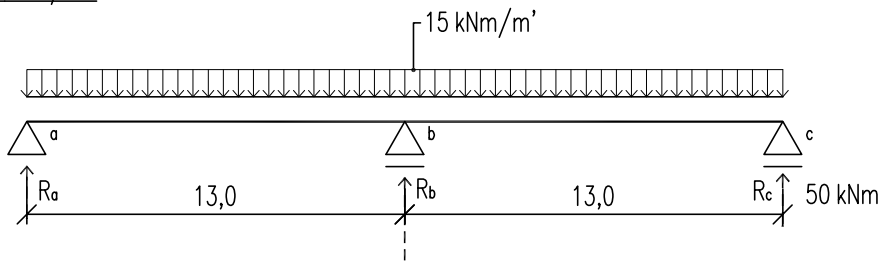
$$M_{P,b}^c = 250 + 248,96 = 498,96 \text{ kNm}$$

$$M_{P,x1}^c = -350 + \frac{248,96}{12,5} \cdot 6,25 = -225,52 \text{ kNm}$$

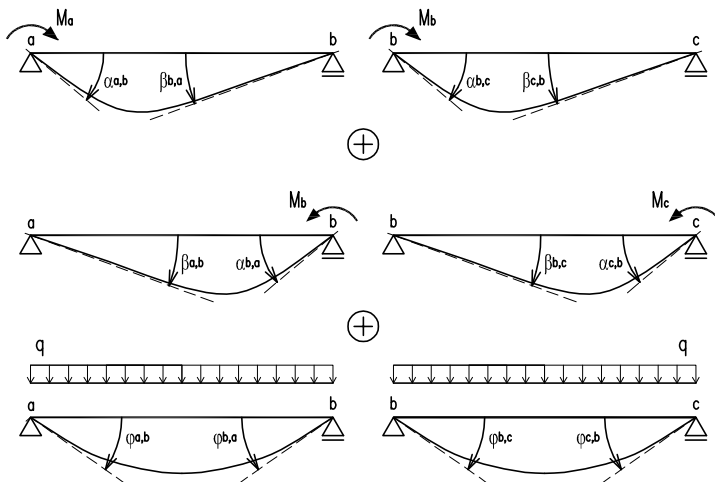
$$M_{P,x2}^c = M_{P,b}^c = 498,96 \text{ kNm}$$

**b.5) Účinky proměnného zatížení:**

$q = 15 \text{ kN/m'}$



– Metoda třímomentových rovnic



$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

...  $M_a = M_c = 0$   
 ...  $E = I_y = \text{konst.}$

$$\alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \frac{L_{a,b}}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{12,5}{3} = 4,17$$

$$\beta_{ba} = \beta_{cb} = \frac{L_{a,b}}{6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{12,5}{6} = 2,08$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{q \cdot L_{a,b}^3}{24 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} = \frac{15,0 \cdot 12,5^3}{24} = 1220,7$$

$$M_{q,b} \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \sum \varphi_{ba} + \sum \varphi_{bc} = 0$$

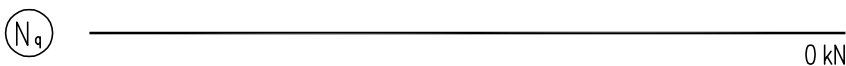
$$M_{q,b} \cdot (4,17 + 4,17) + 2 \cdot (1220,7) = 0 \quad \dots \quad M_{q,b} = -292,73 \text{ kNm}$$

$$\sum M_b = R_a \cdot L_{a,b} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot L_{a,b}^2 + M_{q,b} = 0$$

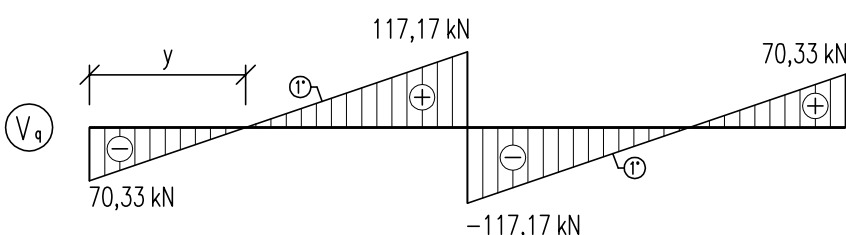
$$R_a \cdot 12,5 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12,5^2 + 292,73 = 0 \quad \approx > \quad R_a = R_c = 70,33 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad R_a + R_b + R_c - q \cdot (L_{a,b} + L_{b,c}) = 0$$

$$70,33 + R_b + 70,33 - 15 \cdot (12,5 + 12,5) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = 234,33 \text{ kN}$$



$N_q = 0 \text{ kN}$



$V_{q,a} = -70,33 \text{ kN}$

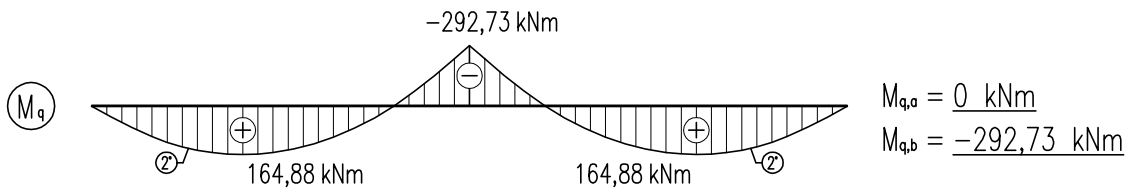
$V_{q,b} = 117,17 \text{ kN}$

$V_{q,b'} = -117,17 \text{ kN}$

$V_{q,c} = 70,33 \text{ kN}$

$$y = \frac{V_{q,a}}{q} = \frac{70,33}{15} = \underline{4,69 \text{ m}}$$

$$M_{q,y} = R_a \cdot L_y - \frac{1}{2} \cdot q \cdot L_y^2 = 70,33 \cdot 4,69 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4,69^2 = \underline{164,88 \text{ kNm}} \dots \text{ maximální moment v poli}$$

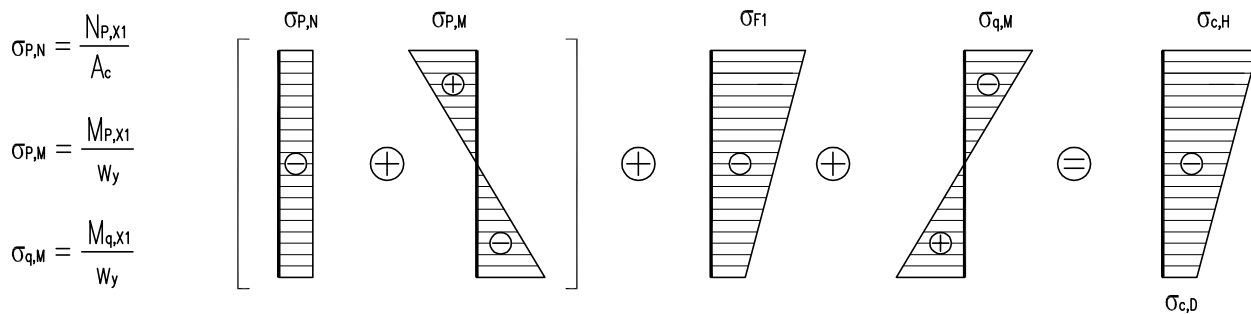


$$M_{q,x1} = R_a \cdot L_y - \frac{1}{2} \cdot q \cdot L_{x1}^2 = 70,33 \cdot 6,25 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6,25^2 = \underline{146,59 \text{ kNm}} \dots \text{ moment v } 1/2 \text{ pole}$$

$$M_{q,x2} = M_{q,b} = \underline{-292,73 \text{ kNm}}$$

### b.6) Výpočet napětí v průřezu $X_1$ – FÁZE 2:

Napětí v průřezu je vyvozeno předpínací silou, vlastní tíhou a proměnným zatížením. Při výpočtu je nutné respektovat stav napjatosti z FÁZE 1 ( $\sigma_{F1}$ ) zohledňující vlastní tíhu konstrukce a předpětí 1. fáze.



Horní (tlačená) vlákna:

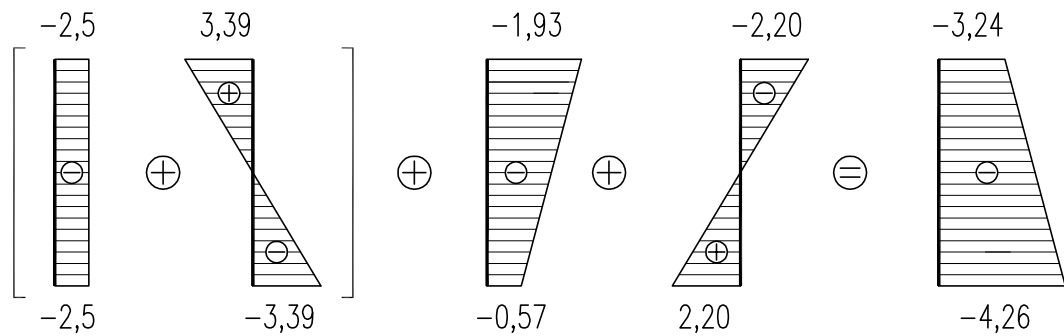
$$\sigma_{c,H} = \left( -\frac{N_{P,x1}}{A_c} + \frac{M_{P,x1}}{W_y} \right) + (\sigma_{F1,M}) - \left( \frac{M_{q,x1}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,H} = \left( -\frac{1000}{0,4} + \frac{225,52}{0,0666} \right) + (-1,93) - \left( \frac{146,59}{0,0666} \right) = \underline{-3,24 \text{ MPa}}$$

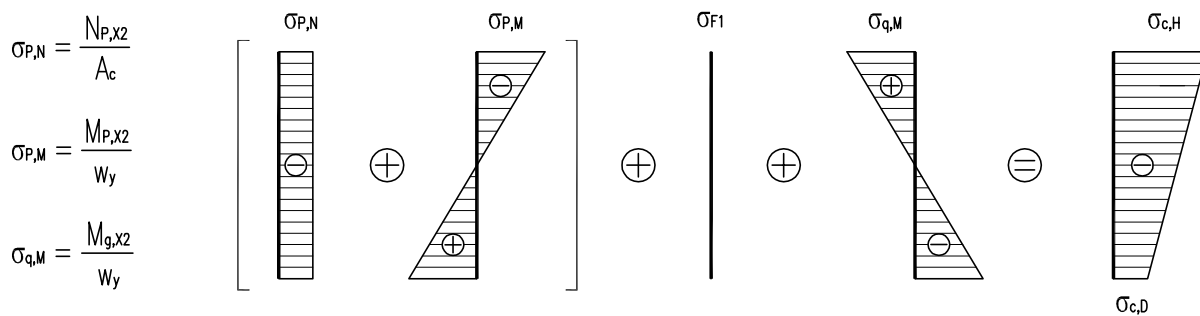
Dolní (tažená) vlákna:

$$\sigma_{c,D} = \left( -\frac{N_{P,x1}}{A_c} - \frac{M_{P,x1}}{W_y} \right) + (\sigma_{F1,M}) + \left( \frac{M_{q,x1}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,D} = \left( -\frac{1000}{0,4} - \frac{225,52}{0,0666} \right) + (-570) + \left( \frac{146,59}{0,0666} \right) = \underline{-4,26 \text{ MPa}}$$



**b.6) Výpočet napětí v průřezu  $X_2$  – FÁZE 2:**



Horní (tažená) vlákna:

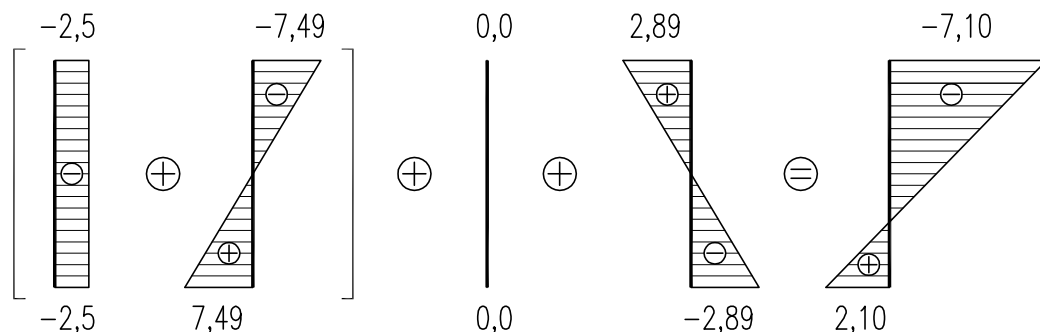
$$\sigma_{c,H} = \left( -\frac{N_{P,X2}}{A_c} - \frac{M_{P,X2}}{W_y} \right) + (\sigma_{F1}) + \left( \frac{M_{q,X2}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,H} = \left( -\frac{1000}{0,4} - \frac{498,96}{0,0666} \right) + (0,0) + \left( \frac{292,73}{0,0666} \right) = \underline{-7,10 \text{ MPa}}$$

Dolní (tlačná) vlákna:

$$\sigma_{c,D} = \left( -\frac{N_{P,X2}}{A_c} + \frac{M_{P,X2}}{W_y} \right) + (\sigma_{F1}) - \left( \frac{M_{q,X2}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,D} = \left( -\frac{1000}{0,4} + \frac{498,96}{0,0666} \right) + (0,0) - \left( \frac{292,73}{0,0666} \right) = \underline{2,10 \text{ MPa}}$$



**Závěr:** Z výsledků je patrné, že předpětí fáze 2 je zbytečně velké. V průřezu  $X_2$  jsou vlivem předpětí převráceny obrazce napětí (tažená vlákna jsou tlačena, tlačná vlákna tažena), při optimálním návrhu by tedy bylo vhodné změnit velikost předpínací síly, nebo upravit trasování kabelu.



### 3.24 PŘÍKLAD Č.24

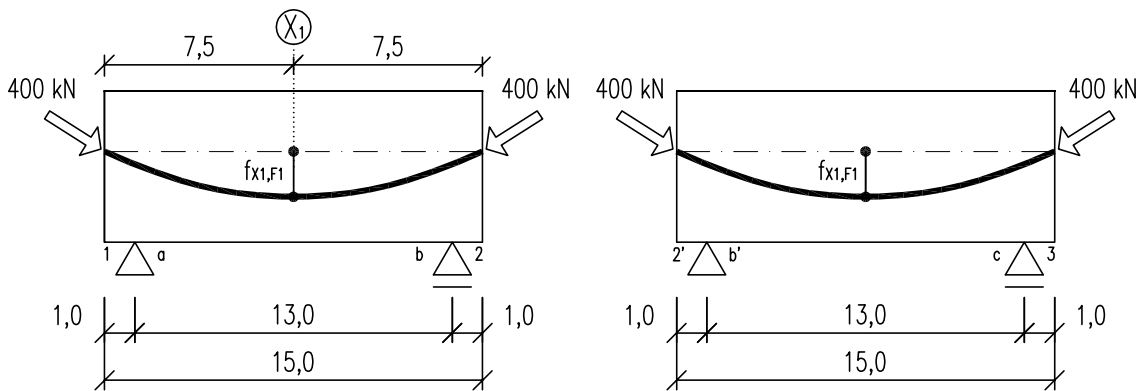
Je dána konstrukce o dvou polích, jejíž výstavba je rozdělena do dvou fází.  
V 1. fázi jde od dva prosté nosníky předepnutý každý jedním kabelem viz. schéma.  
Ve 2. fázi jsou prosté nosníky zmonolitněny a předepnutý a kabelem spojitosti.

$L_{a,b} = L_{b,c} = 15,0 \text{ m}$   
 $P_{F,1} = 400 \text{ kN}$   
 $P_{F,2} = 1000 \text{ kN}$   
 $q = 20,0 \text{ kN/m}'$   
 $\gamma_{\text{beton}} = 25 \text{ kN/m}^3$

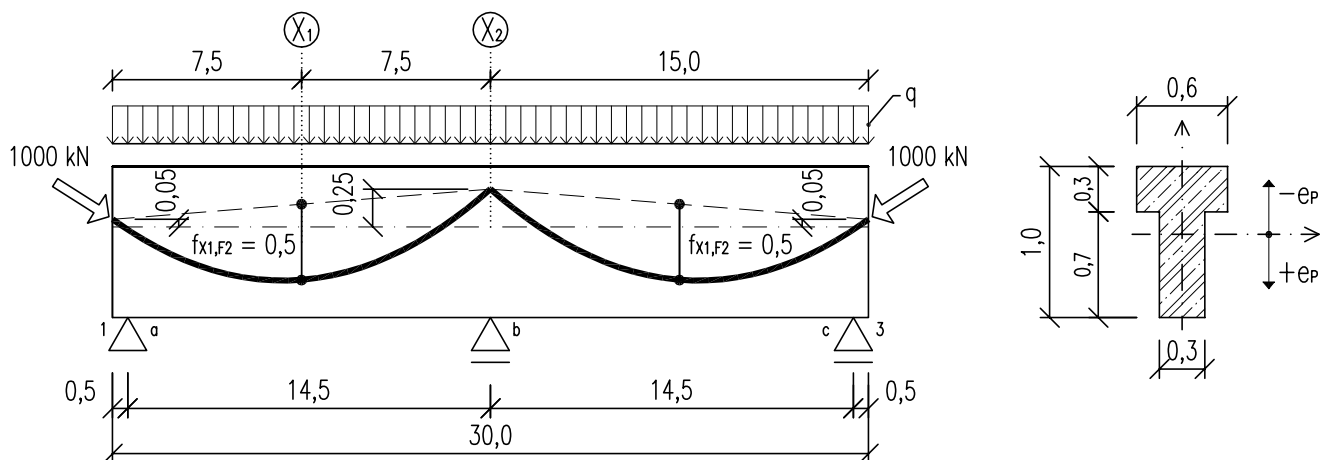
Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte:

- a) FÁZE 1: –vzepětí paraboly  $f_{x,1}$  tak, aby byla vyrovnána vlastní tíha (plné předpětí)  
 –ekvivalentní silové účinky od předpětí  
 –celkové účinky od předpětí
- b) FÁZE 2: –ekvivalentní silové účinky od jednotkového předpětí  
 –primární účinky od jednotkového předpětí  
 –sekundární účinky od jednotkového předpětí  
 –celkové účinky od jednotkového předpětí  
 –předpínací sílu  $P_{F2}$  tak, aby byla v řezech  $X_1$  a  $X_2$  vyrovnána vlastní tíha, a proměnné zatížení  $q$  (plné předpětí)

**FÁZE 1:**  $e_{P,1,F1} = e_{P,2,F1} = e_{P,3,F1} = 0,0 \text{ m}$   
 $f_{x1,F1}$  = výpočet viz. a.1



**FÁZE 2:**  $e_{P,1,F2} = e_{P,3,F2} = -0,05 \text{ m}$   
 $e_{P,b,F2} = -0,25 \text{ m}$   
 $f_{x1,F2} = 0,50 \text{ m}$



#### Průřezové charakteristiky:

$$A_c = b_{c,1} \cdot h_{c,1} + b_{c,2} \cdot h_{c,2} = 0,6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = \underline{0,39 \text{ m}^2}$$

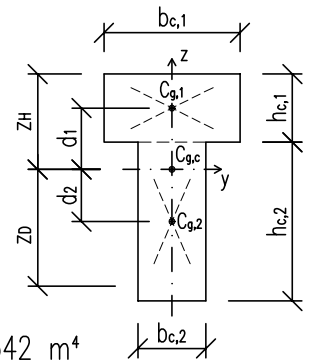
$$z_D = \frac{b_{c,1} \cdot h_{c,1} \cdot \frac{1}{2} \cdot h_{c,1} + b_{c,2} \cdot h_{c,2} \cdot (h_{c,1} + \frac{1}{2} \cdot h_{c,2})}{A_c} = \frac{0,6 \cdot 0,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot (0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,7)}{0,39}$$

$$z_D = \underline{0,58 \text{ m}}$$

$$z_H = h - z_D = 1,0 - 0,58 = \underline{0,42 \text{ m}}$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot b_{c,1} \cdot h_{c,1}^3 + (A_{c,1} \cdot d_1^2) + \frac{1}{12} \cdot b_{c,2} \cdot h_{c,2}^3 + (A_{c,2} \cdot d_2^2)$$

$$\frac{1}{12} \cdot 0,6 \cdot 0,3^3 + [0,6 \cdot 0,3 \cdot (0,85 - 0,58)^2] + \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 + [0,3 \cdot 0,7 \cdot (0,58 - 0,35)^2] = \underline{0,0342 \text{ m}^4}$$



$$w_{y,D} = \frac{I_y}{z_D} = \frac{0,0342}{0,58} = \underline{0,059 \text{ m}^3}$$

$$w_{y,H} = \frac{I_y}{z_H} = \frac{0,0342}{0,42} = \underline{0,081 \text{ m}^3}$$

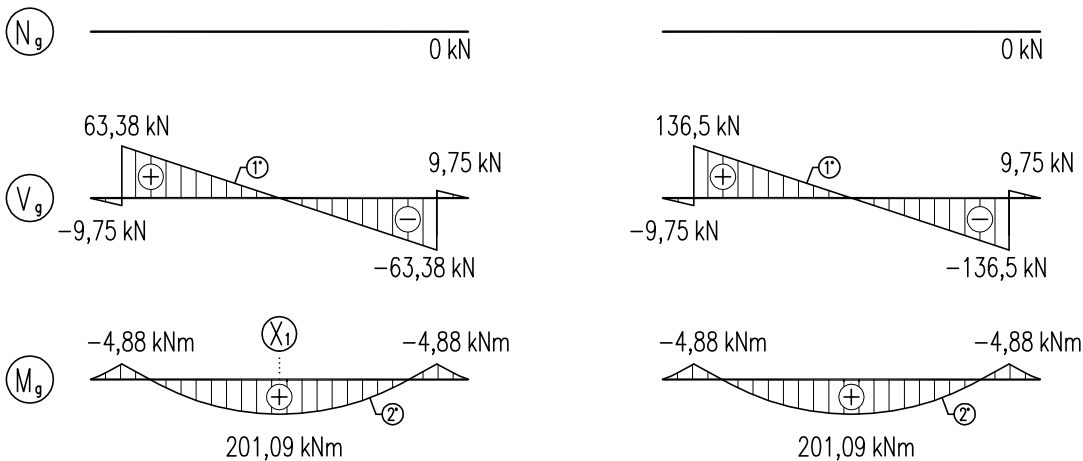
**Účinky vlastní tíhy – FÁZE 1:**

$$g = A_c \cdot \gamma_{\text{beton}} = 0,39 \cdot 25 = \underline{9,75 \text{ kN/m}'}$$

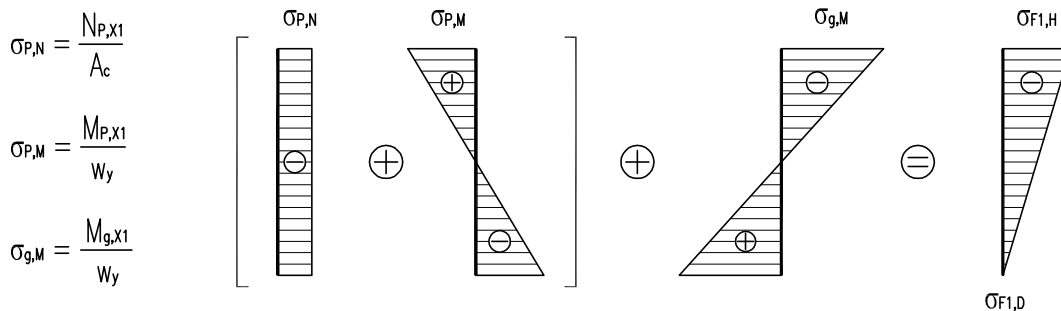
$$N_g = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

$$R_{g,a} = R_{g,b} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot L_{a,b} = \frac{1}{2} \cdot 9,75 \cdot 15,0 = \underline{73,13 \text{ kN}}$$

$$M_{g,x1} = -g \cdot (L_{1,a} + L_{a,x1}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (L_{1,a} + L_{a,x1}) + R_{g,a} \cdot L_{a,x1} = -9,75 \cdot (1,0 + 6,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,0 + 6,5) + 73,13 \cdot 6,5 = \underline{201,09 \text{ kNm}}$$



**a.1) Výpočet vzepětí paraboly v průřezu X<sub>1</sub> – FÁZE 1:**



**Dolní (tažená) vlákna:**

$$\sigma_{F1,D} = \left( -\frac{N_{P,x1}}{A_c} - \frac{N_{P,x1} \cdot e_{P,x1}}{W_{y,D}} \right) + \left( \frac{M_{g,x1}}{W_{y,D}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{P,x1} = f_{x1,F1} = \dots$$

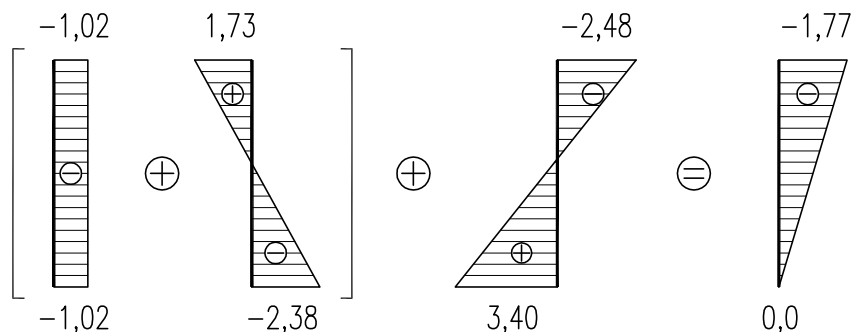
$$f_{x1,F1} = \frac{\left( -\frac{N_{P,x1}}{A_c} + \frac{M_{g,x1}}{W_{y,D}} \right) \cdot W_{y,D}}{N_{P,x1}} = \frac{\left( -\frac{400}{0,39} + \frac{201,09}{0,059} \right) \cdot 0,059}{400} = \underline{0,351 \text{ m}}$$

$$M_{P,x1} = -400 \cdot 0,351 = \underline{-140,4 \text{ kNm}}$$

**Horní (tlačená) vlákna:**

$$\sigma_{F1,H} = \left( -\frac{N_{P,x1}}{A_c} - \frac{M_{P,x1}}{W_{y,H}} \right) + \left( \frac{M_{g,x1}}{W_{y,H}} \right)$$

$$\sigma_{F1,H} = \left( -\frac{400}{0,39} - \frac{140,4}{0,081} \right) + \left( \frac{201,09}{0,081} \right) = \underline{-1,77 \text{ MPa}}$$



**a.2) Ekvivalentní silové účinky od předpětí FÁZE 1:**

$$P_H = -P = \underline{-400 \text{ kN}}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,351}{15,0} = \underline{0,023} < \frac{1}{15} = \underline{0,067} \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,1}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \quad e = e_{P,2} - e_{P,1}$$

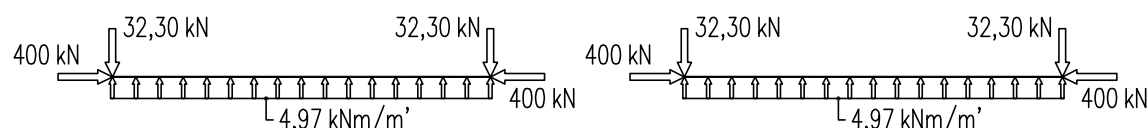
Sklon tečny v místě:  $x = 0$

$$\text{tg } \alpha = y'(x=0) = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,351}{15,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,351 + 0}{15,0} = \underline{0,0936} \Rightarrow \alpha = \underline{5,35^\circ}$$

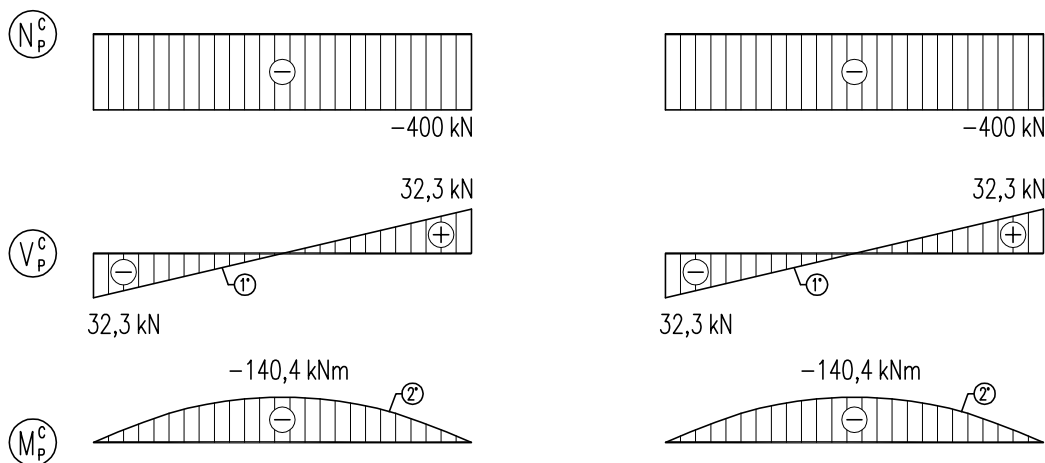
$$P_{V,1} = P_{V,2} = -P \cdot \sin \alpha = -400 \cdot \sin 5,35 = \underline{-32,30 \text{ kN}}$$

$$p_{1,2} = \frac{-(P_{V,1} + P_{V,2})}{L_{1,2}} = \frac{-(-32,30 - 32,30)}{15,0} = \underline{4,97 \text{ kN/m'}}$$

$$M_{P,x1} = P \cdot e_{P,x1} = -400 \cdot 0,351 = \underline{-140,4 \text{ kNm}}$$



**a.3) Celkové účinky od předpět FÁZE 1:**



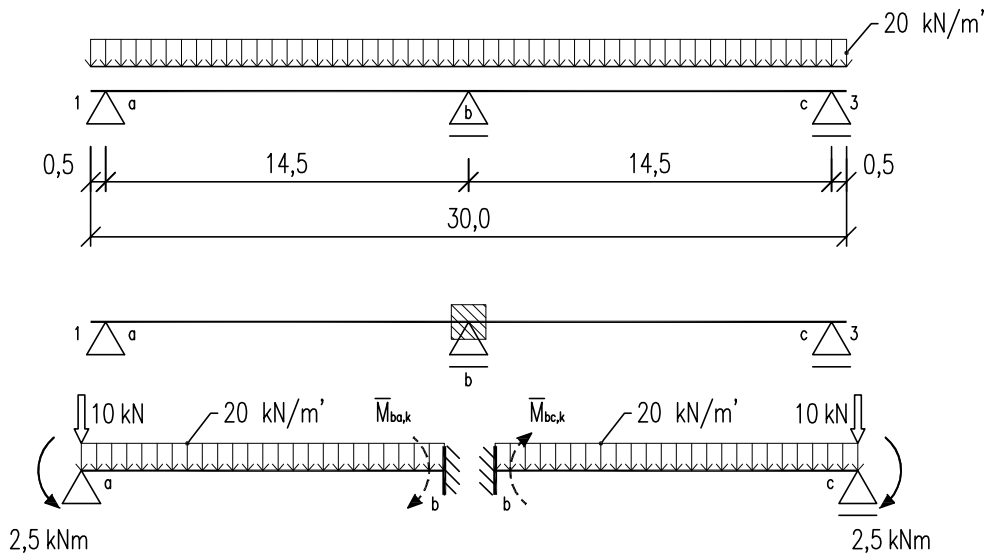
**Účinky proměnné zatížení  $q$  – FÁZE 2:**

$q = 20 \text{ kN/m'}$

Deformační metoda:

- určení stupně statické přetvárnosti:  $n_p = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$

počet fiktivních přetvárných vazeb je 1, fiktivní momentovou vazbu umístíme do podpory b a za neznámou volíme pootočení v podpoře b  $\varphi_b$ .



- převislý konec nahradíme momentem a posouvající silou:

$$M_q = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot L_{1,a}^2 = -\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,5^2 = \underline{-2,5 \text{ kNm}}$$

$$V_q = -q \cdot L_{1,a} = -20 \cdot 0,5 = \underline{-10,0 \text{ kN}}$$

- Poměrná ohybová tuhost:

$$k_{ba} = k_{bc} = \frac{l_{ab}}{L_{ab}} \cdot c = \frac{0,0342}{14,5} \cdot 1 \cdot 10^3 = \underline{2,36} \quad \dots \text{ c volím } 1 \cdot 10^3$$

- Primární momenty:

$$\bar{M}_{ab,k} = 0,0$$

$$\bar{M}_{ba,k} = -\bar{M}_{bc,k} = -\frac{M_{P,a}}{2} + \frac{1}{8} \cdot q \cdot L_{a,b}^2 = -\frac{2,5}{2} + \frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 14,5^2 = -1,25 + 525,63 = \underline{524,38}$$

$$\bar{M}_{cb,k} = 0,0$$

- Pootočení styčnicku b (vyjádřeno ze styčnickové rovnice pro bod b)

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{ab})$$

$$M_{bc,k} = \bar{M}_{bc,k} + k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{bc}) \quad \dots \text{svislé posuny styčnicků } w_a, w_b \text{ a } w_c \text{ jsou nulové, proto: } \psi_{ab} = \psi_{bc} = 0$$

po dosazení získáme rovnici:

$$-(\bar{M}_{ab,k} + \bar{M}_{bc,k}) = \frac{3}{4} \cdot k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$-(524,38 - 524,38) = \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$0,0 = 7,08 \cdot \varphi_b \Rightarrow \varphi_b = 0$$

- Styčnicková rovnice pro styčnick b

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = -M_{bc,k} = 524,38 + \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot 0,0 - 2 \cdot 0,0) = \underline{524,38 \text{ kNm}}$$

$$M_{q,b} = -M_{ba,k} = \underline{-524,38 \text{ kNm}}$$

- Staticky neurčitá reakce R od proměnného zatížení q:

$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot (L_{1,a} + L_{a,b})^2 - M_{q,b} = 0$$

$$R_a \cdot 14,5 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (0,5 + 14,5)^2 - (-524,38) = 0 \Rightarrow R_a = \underline{119,01 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: R_a - R_b + R_c - q \cdot L_{1,3} = 0$$

$$119,01 - R_b + 119,01 - 20 \cdot 30,0 = 0 \Rightarrow R_b = \underline{-361,98 \text{ kN}}$$

(N<sub>q</sub>)



$$N_q = 0 \text{ kN}$$

$$V_{q,a} = -q \cdot L_{1,a} = -20 \cdot 0,5 = \underline{-10,0 \text{ kN}}$$

$$V_{q,a}' = V_{q,a} - R_a = -10,0 + 119,01$$

$$V_{q,a}' = \underline{109,01 \text{ kN}}$$

$$V_{q,b} = V_{q,a} - q \cdot L_{a,b} = 109,01 - 20 \cdot 14,5$$

$$V_{q,b} = \underline{-180,99 \text{ kN}}$$

$$V_{q,b}' = V_{q,b} + R_b = -180,99 + 361,98$$

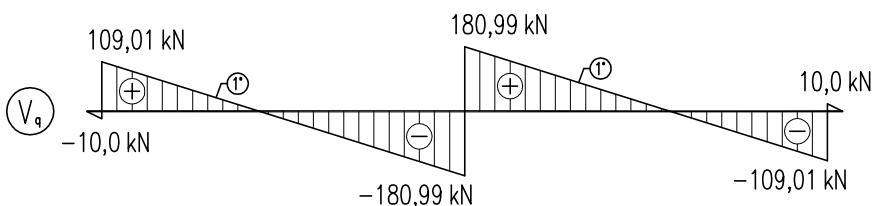
$$V_{q,b}' = \underline{180,99 \text{ kN}}$$

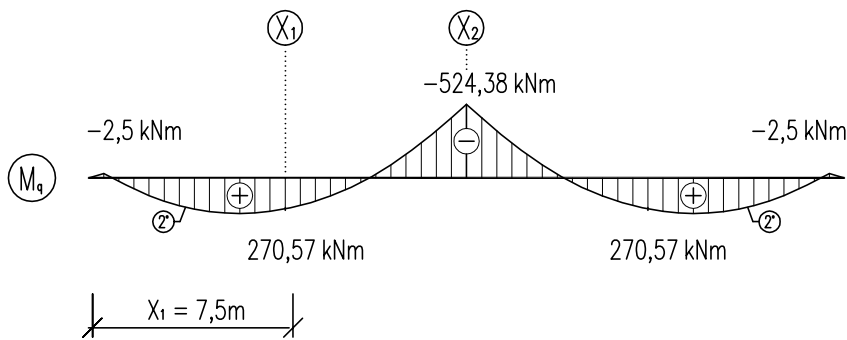
$$V_{q,c} = V_{q,b}' - q \cdot L_{b,c} = 180,99 - 20 \cdot 14,5$$

$$V_{q,c} = \underline{-109,01 \text{ kN}}$$

$$V_{q,c}' = V_{q,c} + R_c = -109,01 + 119,99$$

$$V_{q,c}' = \underline{10,0 \text{ kN}}$$





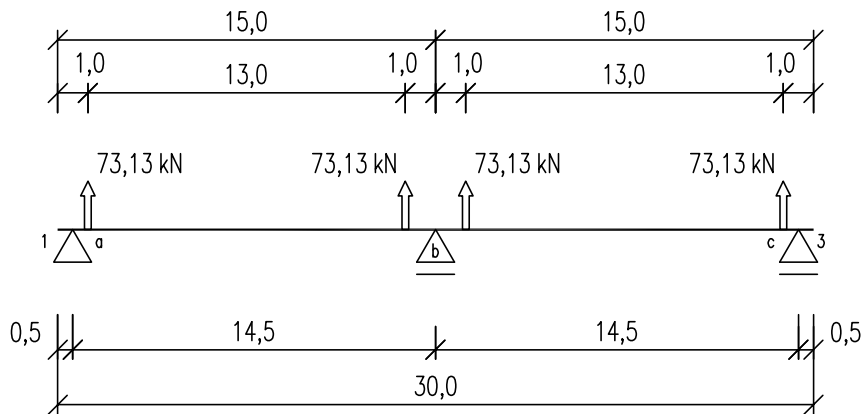
$$M_{q,a} = -q \cdot 0,5 \cdot L_{1,a}^2 = -20 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$M_{q,a} = -2,5 \text{ kNm}$$

$$M_{q,b} = M_{q,x2} = -524,38 \text{ kNm}$$

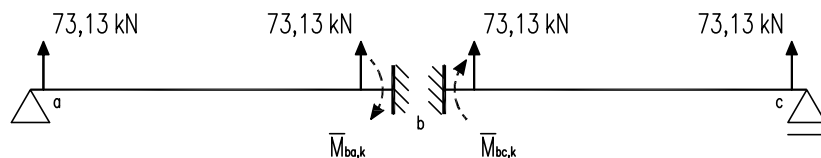
$$M_{q,x1} = R_a \cdot (L_{x1} - L_{1,a}) - \frac{1}{2} \cdot q \cdot L_{x1}^2 = 119,01 \cdot (7,5 - 0,5) - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 7,5^2 = 270,57 \text{ kNm}$$

- Posunutí podpor:



Vlivem posunu podpor na zmonolitněné konstrukci se změjí statické schéma i namáhání zmonolitněné konstrukce: Toto namáhání vyšetříme tak, že zmonolitněnou staticky neurčitou konstrukci zatížíme reakcemi nosníků) z fáze 1 s opačným znaménkem.

Všechny veličiny kromě primárních momentů pro výpočet pomocí zjednodušené deformační metody zůstávají stejné.



... převyslý konec není zatížen, proto s ním nemusíme uvažovat

- Poměrná ohybová tuhost:

$$k_{ba} = k_{bc} = \frac{l_{ab}}{L_{ab}} \cdot c = \frac{0,0342}{14,5} \cdot 1 \cdot 10^3 = 2,36 \quad \dots \text{ c volím } 1 \cdot 10^3$$

- Primární momenty:

$$\bar{M}_{ab,k} = 0,0$$

$$\bar{M}_{ba,k} = -\bar{M}_{bc,k} = -\frac{R_{F1} \cdot a_1 \cdot b_1}{2 \cdot L_{a,b}^2} \cdot (L_{a,b} + a_1) - \frac{R_{F1} \cdot a_2 \cdot b_2}{2 \cdot L_{a,b}^2} \cdot (L_{a,b} + a_2)$$

$$= - \frac{73,13 \cdot 0,5 \cdot 14,0}{2 \cdot 14,5^2} \cdot (14,5 + 0,5) - \frac{73,13 \cdot 13,5 \cdot 1,0}{2 \cdot 14,5^2} \cdot (14,5 + 13,5) = \underline{-84,0 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{cb,k} = \underline{0,0 \text{ kNm}}$$

- Pootočení styčnicku b (vyjádřeno ze styčnickové rovnice pro bod b)

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{ab})$$

$$M_{bc,k} = \bar{M}_{bc,k} + k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{bc}) \quad \dots \text{ svislé posuny styčnicků } w_a, w_b \text{ a } w_c \text{ jsou nulové, proto: } \psi_{ab} = \psi_{bc} = 0$$

po dosazení získáme rovnici:

$$-(\bar{M}_{ab,k} + \bar{M}_{bc,k}) = \frac{3}{4} \cdot k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$-(84,0 - 84,0) = \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$0,0 = 7,08 \cdot \varphi_b \quad \Rightarrow \quad \varphi_b = \underline{0}$$

- Styčnicková rovnice pro styčnick b

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = -M_{bc,k} = -84,0 + \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot 0,0 - 2 \cdot 0,0) = \underline{-84,0 \text{ kNm}}$$

$$M_{R,F1,b} = -M_{ba,k} = \underline{84,0 \text{ kNm}}$$

- Staticky neurčitá reakce R od reakcí 1.fáze:

$$\Sigma M_b = 0: R_a \cdot L_{a,b} + R_{F1} \cdot L_{a,b} + R_{F1} \cdot L_{2,b} - M_{R,F1,b} = 0$$

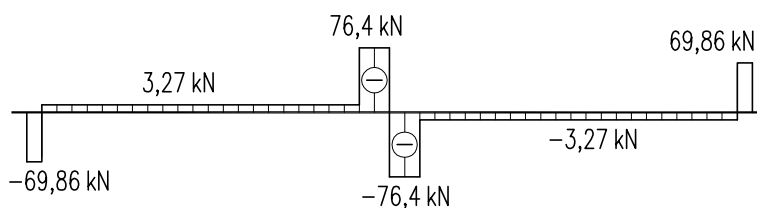
$$R_a \cdot 14,5 + 73,13 \cdot 14,0 + 73,13 \cdot 1,0 - 84,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = \underline{-69,86 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: R_a - R_b + R_c + (4 \cdot R_{F1}) = 0$$

$$-69,86 - R_b - 69,86 + (4 \cdot 73,13) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = \underline{152,8 \text{ kN}}$$



$$N_{R,F1} = 0 \text{ kN}$$



$$V_{R,F1,1} = V_{R,F1,3} = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

$$V_{R,F1,a} = R_a = \underline{-69,86 \text{ kN}}$$

$$V_{R,F1,b} = V_{R,F1,a} + 2 \cdot R_a = -69,86 + 2 \cdot 73,13$$

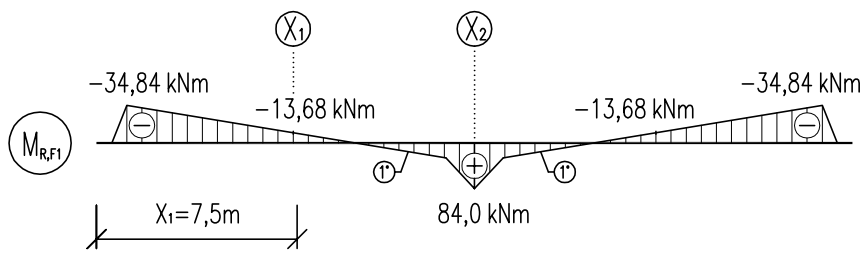
$$V_{R,F1,b} = \underline{76,40 \text{ kN}}$$

$$V_{R,F1,b'} = V_{R,F1,b} + R_b = 76,40 - 152,80$$

$$V_{R,F1,b'} = \underline{-76,40 \text{ kN}}$$

$$V_{R,F1,c} = V_{R,F1,b'} + 2 \cdot R_a = -76,40 + 2 \cdot 73,13$$

$$V_{R,F1,c} = \underline{69,86 \text{ kN}}$$



$$M_{R,F1,1} = M_{R,F1,3} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{R,F1,a} = M_{R,F1,c} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{R,F1,b} = M_{R,F1,x2} = 84,0 \text{ kNm}$$

$$M_{R,F1,x1} = -R_a \cdot (L_{x1} - L_{1,a}) + R_{F1} \cdot (L_{x1} - L_{1,a} - 0,5) = -69,86 \cdot (7,5 - 0,5) + 73,13 \cdot (7,5 - 0,5 - 0,5) = -13,68 \text{ kNm}$$

### Účinky od jednotkové předpínací síly FÁZE 2:

Zjednodušená deformační metoda:

Pro určení předpínací síly  $P_{F,2}$  zatížíme konstrukci dle schématu fáze 2 jednotkovou předpínací silou  $P = 1000 \text{ kN}$ . Všechny veličiny až na primární momenty pro výpočet pomocí zjednodušené deformační metody zůstávají stejné jako v předchozích dvou případech.

### b.1) Ekvivalentní silové účinky od jednotkového předpětí FÁZE 2:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN} \quad \frac{f}{L} = \frac{0,5}{15,0} = 0,033 < \frac{1}{15} = 0,067 \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,1}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \quad e = e_{P,b} - e_{P,1}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,5}{15,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,5 - 0,2}{15,0} = 0,12 \Rightarrow \alpha = 6,84^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,5}{15,0^2} \cdot 15,0 + \frac{4 \cdot 0,5 - 0,2}{15,0} = -0,147 \Rightarrow \beta = -8,34^\circ$$

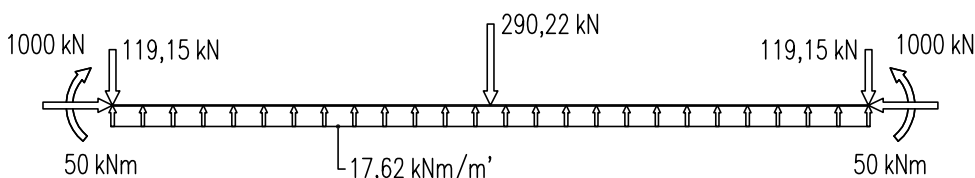
$$P_{V,1} = P_{V,3} = P \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot \sin 6,84 = 119,15 \text{ kN}$$

$$P_{V,b} = -2 \cdot P \cdot \sin \beta = 2 \cdot 1000 \cdot \sin (-8,34) = -290,22 \text{ kN}$$

$$p_{1,b} = p_{b,3} = \frac{-(P_{V,1} + 0,5 \cdot P_{V,b})}{L_{1,b}} = \frac{-(-119,15 - 0,5 \cdot 290,22)}{15,0} = 17,62 \text{ kN/m'}$$

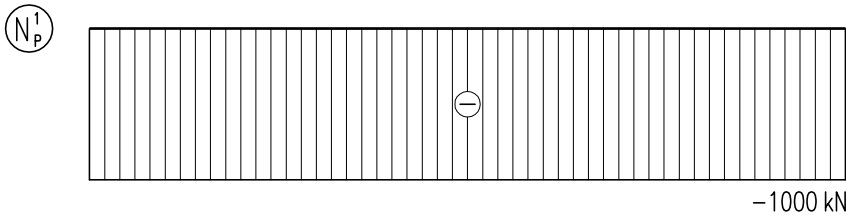
$$M_{P,1} = M_{P,3} = P_H \cdot e_{P,1} = -1000 \cdot (-0,05) = 50 \text{ kNm}$$

$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,25) = 250 \text{ kNm}$$

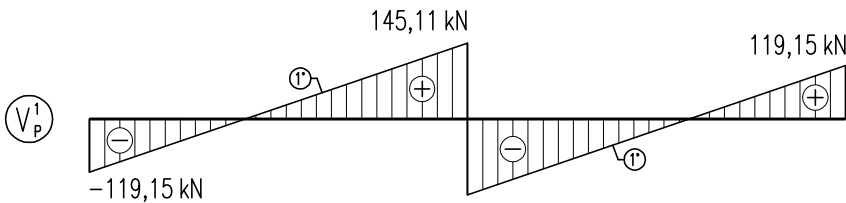




**b.2) Primární účinky od jednotkového předpětí FÁZE 2:**



$$N_P^1 = P_H = \underline{-1000 \text{ kN}}$$



$$V_{P,1} = P_{V,1} = \underline{-119,15 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b} = V_{P,1} + L_{1,b} \cdot p_{1,b}$$

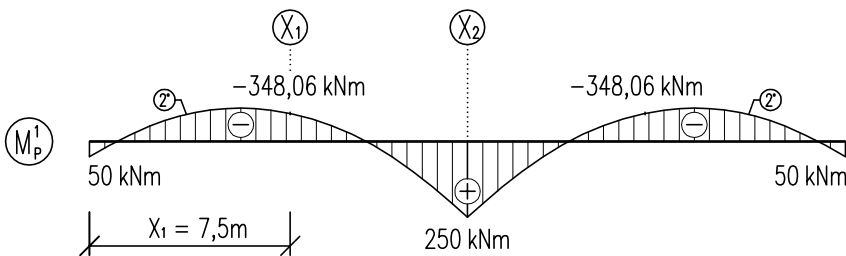
$$V_{P,b} = -119,15 + 15,0 \cdot 17,62 = \underline{145,11 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}' = V_{P,b} + P_{V,b} = 145,11 - 290,22$$

$$V_{P,b}' = \underline{-145,11 \text{ kN}}$$

$$V_{P,3} = V_{P,b}' + L_{b,3} \cdot p_{b,3}$$

$$V_{P,3} = -145,11 + 15,0 \cdot 17,62 = \underline{119,15 \text{ kN}}$$



$$M_{P,a} = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,05)$$

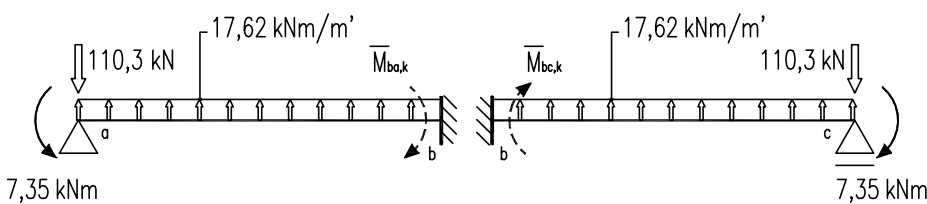
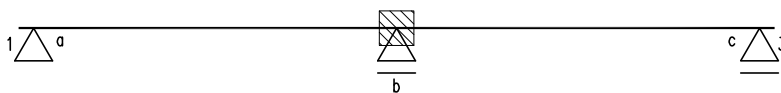
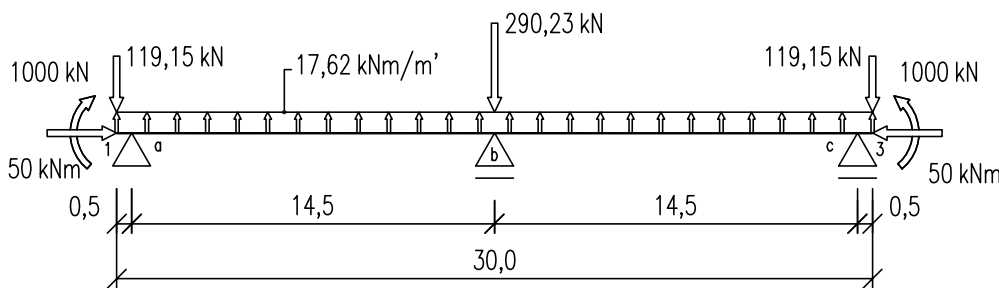
$$M_{P,a} = M_{P,c} = \underline{50 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b} = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot (-0,25)$$

$$M_{P,b} = M_{P,x2} = \underline{250 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,x1} = -V_{P,a} \cdot X_1 + \frac{1}{2} \cdot p_{1,b} \cdot X_1^2 + M_{P,a} = -119,15 \cdot 7,5 + \frac{1}{2} \cdot 17,62 \cdot 7,5^2 + 50 = \underline{-348,06 \text{ kNm}}$$

**b.3) Sekundární účinky od jednotkového předpětí FÁZE 2:**



- převyšlý konec nahradíme momentem a posouvající silou:

$$M_{P,F2} = M_{P,1} - P_{V,1} \cdot L_{1,a} + \frac{1}{2} \cdot p_{1,b} \cdot L_{1,a}^2 = 50 - 119,15 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 17,62 \cdot 0,5^2 = \underline{-7,37 \text{ kNm}}$$

$$V_{P,F2} = -P_{V,1} + p_{1,b} \cdot L_{1,a} = -119,15 + 17,62 \cdot 0,5 = \underline{-110,34 \text{ kN}}$$

- Poměrná ohybová tuhost:

$$k_{ba} = k_{bc} = \frac{I_{ab}}{L_{ab}} \cdot c = \frac{0,0342}{14,5} \cdot 1 \cdot 10^3 = \underline{2,36} \quad \dots c \text{ volím } 1 \cdot 10^3$$

- Primární momenty:

$$\bar{M}_{ab,k} = \underline{0,0 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{ba,k} = -\bar{M}_{bc,k} = -\frac{M_{P,F2}}{2} - \frac{1}{8} \cdot p_{1,b} \cdot L_{a,b}^2 = -\frac{7,37}{2} - \frac{1}{8} \cdot 17,62 \cdot 14,5^2 = -3,68 - 463,08 = \underline{-466,76 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{cb,k} = \underline{0,0 \text{ kNm}}$$

- Pootočení styčnicku b (vyjádřeno ze styčnickové rovnice pro bod b)

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{ab})$$

$$M_{bc,k} = \bar{M}_{bc,k} + k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b - 2 \cdot \psi_{bc}) \quad \dots \text{svislé posuny styčnicků } w_a, w_b \text{ a } w_c \text{ jsou nulové, proto: } \psi_{ab} = \psi_{bc} = 0$$

po dosazení získáme rovnici:

$$-(\bar{M}_{ab,k} + \bar{M}_{bc,k}) = \frac{3}{4} \cdot k'_{ba} \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot k'_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$-(-466,76 + 466,76) = \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot \varphi_b) + \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot \varphi_b)$$

$$0,0 = 7,08 \cdot \varphi_b \quad \Rightarrow \quad \varphi_b = \underline{0}$$

- Styčnicková rovnice pro styčnick b

$$M_{ba,k} + M_{bc,k} = 0$$

$$M_{ba,k} = -M_{bc,k} = -466,76 + \frac{3}{4} \cdot 2,36 \cdot (2 \cdot 0,0 - 2 \cdot 0,0) = \underline{-466,76 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^c = -M_{ba,k} = \underline{466,76 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^2 = M_{P,b}^c - M_{P,b}^1 = 466,76 - 250 = \underline{216,76 \text{ kNm}}$$

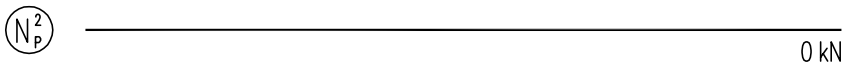
- Staticky neurčitá reakce R od předpětí 2. fáze:

$$\Sigma M_b = 0: \quad R_a^2 \cdot L_{a,b} - P_{V,1} \cdot L_{1,b} + M_{P,1}^1 + \frac{1}{2} \cdot p_{1,b} \cdot L_{1,b}^2 - M_{P,b}^2 = 0$$

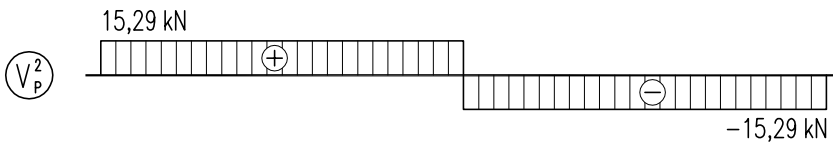
$$R_a^2 \cdot 14,5 - 119,15 \cdot 15 + 50 + \frac{1}{2} \cdot 17,62 \cdot 15,0^2 - 466,76 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a^2 = R_b^2 = \underline{15,29 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: \quad R_a^2 - R_b^2 + R_c^2 = 0$$

$$15,29 - R_b^2 + 15,29 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b^2 = \underline{30,58 \text{ kN}}$$



$$N_P^2 = 0 \text{ kN}$$

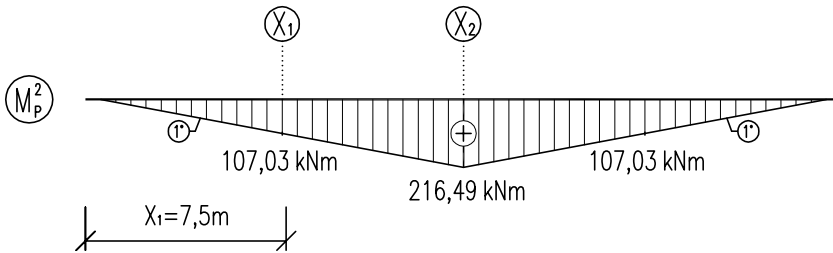


$$V_{P,1}^2 = V_{P,3}^2 = 0,00 \text{ kN}$$

$$V_{P,a}^2 = V_{P,b}^2 = R_a^2 = 15,29 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^{\prime 2} = V_{P,b}^2 - R_b^2 = 15,29 - 30,58$$

$$V_{P,b}^{\prime 2} = V_{P,c}^2 = -15,29 \text{ kN}$$

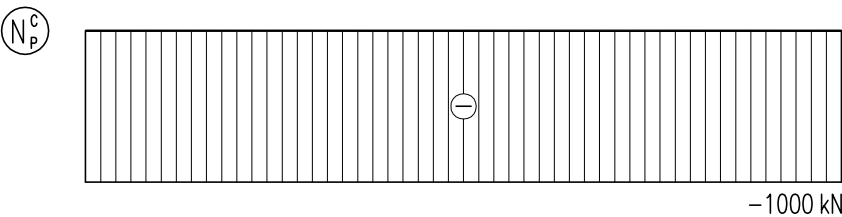


$$M_{P,1}^2 = M_{P,a}^2 = M_{P,c}^2 = M_{P,3}^2 = 0 \text{ kNm}$$

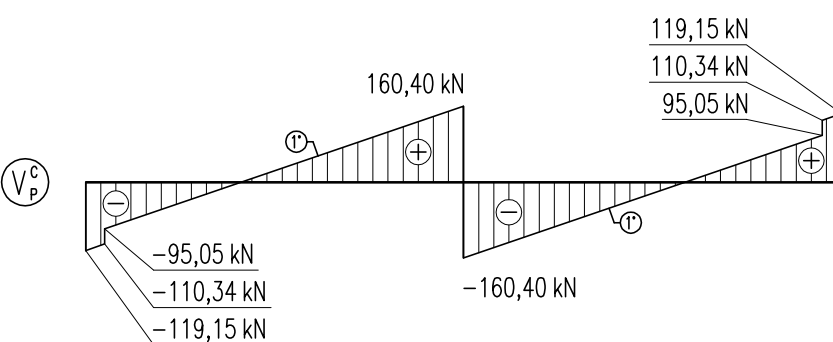
$$M_{P,b}^2 = M_{P,x2}^2 = 216,49 \text{ kNm}$$

$$M_{P,x1}^2 = R_a^2 \cdot L_{a,b} = 15,29 \cdot 7,0 = 107,03 \text{ kNm}$$

Celkové účinky od jednotkového předpětí FÁZE 2:



$$N_P^C = P_H = -1000 \text{ kN}$$



$$V_{P,1}^C = V_{P,1}^2 = -119,15 \text{ kN}$$

$$V_{P,a}^C = V_{P,1}^C + L_{1,a} \cdot p_{1,b} = -119,15 + 0,5 \cdot 17,62$$

$$V_{P,a}^C = -110,34 \text{ kN}$$

$$V_{P,a}^{\prime C} = V_{P,a}^C + R_a^2 = -110,34 + 15,29$$

$$V_{P,a}^{\prime C} = -95,05 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^C = V_{P,b}^2 + R_a^2 = 145,11 + 15,29$$

$$V_{P,b}^C = 160,40 \text{ kN}$$

$$V_{P,b}^{\prime C} = V_{P,b}^C - P_{V,b}^1 - R_b^2$$

$$V_{P,b}^{\prime C} = 160,40 - 290,22 - 30,58$$

$$V_{P,b}^{\prime C} = -160,40 \text{ kN}$$

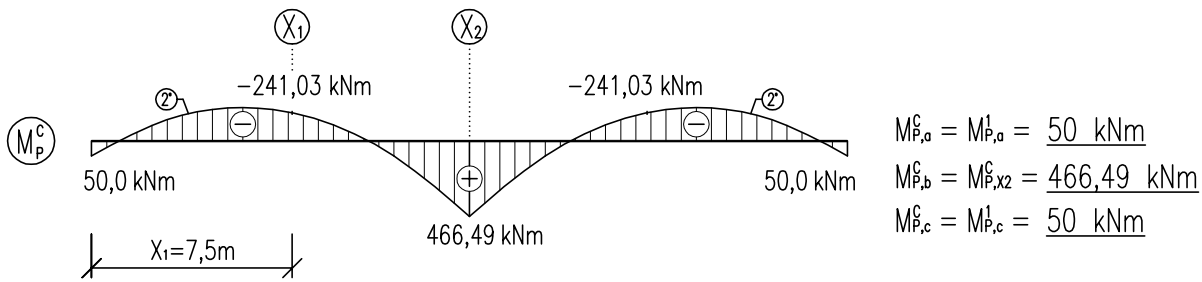
$$V_{P,c}^C = V_{P,b}^{\prime C} - L_{b,c} \cdot p_{b,3} = -160,40 + 17,62 \cdot 14,5$$

$$V_{P,c}^C = 95,05 \text{ kN}$$

$$V_{P,c}^{\prime C} = V_{P,c}^C + R_c^2 = 95,05 + 15,29 = 110,34 \text{ kN}$$

$$V_{P,3}^C = V_{P,c}^{\prime C} + L_{c,3} \cdot p_{b,3} = 110,34 + 0,5 \cdot 17,62$$

$$V_{P,3}^C = 119,15 \text{ kN}$$



$$M_{P,x1}^c = -V_{P,a} \cdot L_{X1} + R_{P,a} \cdot (L_{X1} - L_{1,a}) + \frac{1}{2} \cdot p_{a,b} \cdot L_{X1}^2 + M_a = -119,15 \cdot 7,5 + 15,29 \cdot (7,5 - 0,5) + \frac{1}{2} \cdot 17,62 \cdot 7,5^2 + 50$$

$$M_{P,x1}^c = \underline{-241,03 \text{ kNm}}$$

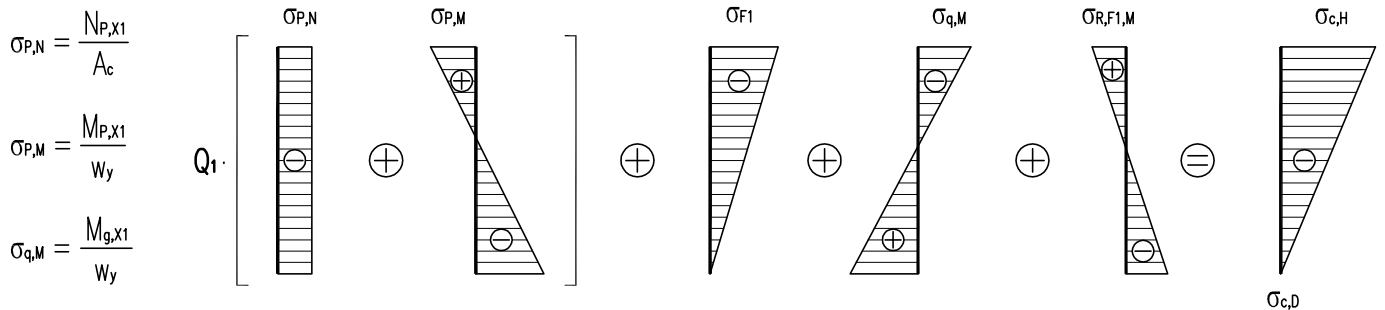
kontrola:

$$M_{P,x1}^c = M_{P,x1}^c + M_{P,x1}^l = -348,06 + 107,03 = \underline{-241,03 \text{ kNm}}$$

### b.6) určení předpínací síly $P_{F2}$ , FÁZE 2:

Z napětí v řezech  $X_1$  a  $X_2$  určíme násobek předpínací síly  $P$  tak, aby oba řezy byly plně předepnuty, tj. zrušíme tahové namáhání. Pro tento úkol je nutné správně stanovit tažená vlákna průřezů (od zatížení, které chceme eliminovat). V našem případě to jsou spodní v řezu  $X_1$  a horní v řezu  $X_2$ . Napětí je určeno z předpínací síly, vlastní tíhy, změny statického schématu a proměnného zatížení, je však nutné respektovat stav napjatosti  $\sigma_{F1}$  z FÁZE 1 (vlastní tíha a předpětí kabelu fáze 1).

#### • Řez $X_1$ :



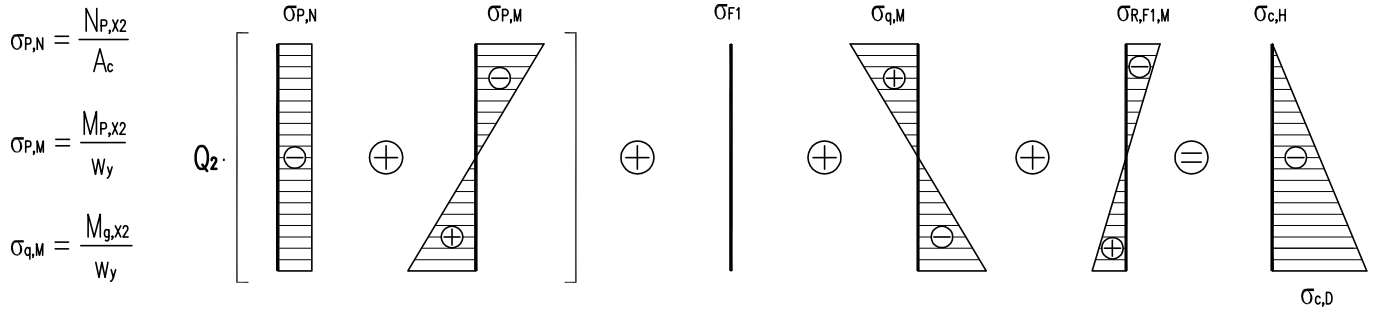
#### Dolní (tažená) vlákna:

$$\sigma_{c,D,x1} = Q_1 \cdot \left( -\frac{N_{P,x1}}{A_c} - \frac{M_{P,x1}}{W_{y,D}} \right) + (\sigma_{F1,D}) + \left( \frac{M_{q,x1}}{W_{y,D}} - \frac{M_{R,F1,x1}}{W_{y,D}} \right)$$

$$\sigma_{c,D,x1} = Q_1 \cdot \left( -\frac{1000}{0,39} - \frac{241,03}{0,059} \right) + (0,00) + \left( \frac{270,57}{0,059} - \frac{13,68}{0,059} \right) = \underline{0,00 \text{ MPa}} \quad \dots \quad Q_1 = 0,6548$$

**Poznámka:** Veličina  $Q_1$  vyjadřuje násobek předpínací síly pro dosažení stavu dekomprese (nulové tahové napětí v přilehlých vláknech betonového průřezu  $X_1$ ).

• Řez X<sub>2</sub>:



Horní (tažená) vlákna:

$$\sigma_{c,D,X1} = Q_2 \cdot \left( -\frac{N_{P,X2}}{A_c} - \frac{M_{P,X2}}{W_{y,H}} \right) + (\sigma_{F1,H}) + \left( \frac{M_{q,X2}}{W_{y,H}} - \frac{M_{R,F1,X2}}{W_{y,H}} \right)$$

$$\sigma_{c,D,X1} = Q_2 \cdot \left( -\frac{1000}{0,39} - \frac{466,49}{0,081} \right) + (0,00) + \left( \frac{524,38}{0,081} - \frac{84,0}{0,081} \right) = \underline{0,00 \text{ MPa}} \quad \dots \quad Q_2 = 0,6532$$

**Poznámka:** Veličina Q<sub>2</sub> vyjadřuje násobek předpínací síly pro dosažení stavu dekomprese (nulové tahové napětí v přilehlých vláknech betonového průřezu X<sub>2</sub>).

**Poznámka:** Výpočtem získáme dva výsledky, pro průřez X<sub>1</sub> je předpínací síla pro dosažení stavu dekomprese 654,8 kN, pro průřez X<sub>2</sub> pak 653,2. Pro dosažení stavu dekomprese v obou řezech zvolíme větší z nich, tedy P = 654,8 kN.

b.7) napětí v průřezích FÁZE 2:

• Řez X<sub>1</sub>:

Horní (tlačená) vlákna:

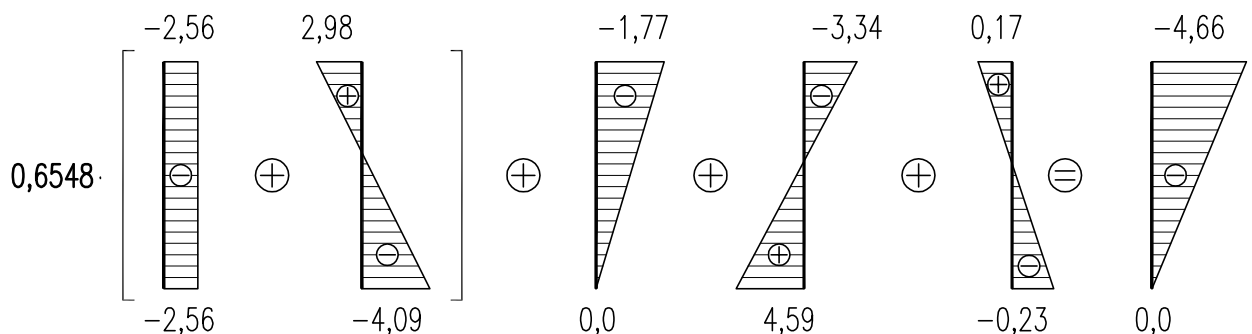
$$\sigma_{c,D,X1} = Q_1 \cdot \left( -\frac{N_{P,X1}}{A_c} + \frac{M_{P,X1}}{W_{y,H}} \right) - (\sigma_{F1,H}) + \left( -\frac{M_{q,X1}}{W_{y,H}} + \frac{M_{R,F1,X1}}{W_{y,H}} \right)$$

$$\sigma_{c,dx1} = 0,6548 \cdot \left( -\frac{1000}{0,39} + \frac{241,03}{0,081} \right) - (1,77) + \left( -\frac{270,57}{0,081} + \frac{13,68}{0,081} \right) = \underline{-4,66 \text{ MPa}}$$

Dolní (tažená) vlákna:

$$\sigma_{c,D,X1} = Q_1 \cdot \left( -\frac{N_{P,X1}}{A_c} - \frac{M_{P,X1}}{W_{y,D}} \right) + (\sigma_{F1,D}) + \left( \frac{M_{q,X1}}{W_{y,D}} - \frac{M_{R,F1,X1}}{W_{y,D}} \right)$$

$$\sigma_{c,dx1} = 0,6548 \cdot \left( -\frac{1000}{0,39} - \frac{241,03}{0,059} \right) + (0,00) + \left( \frac{270,57}{0,059} - \frac{13,68}{0,059} \right) = \underline{0,00 \text{ MPa}}$$



• Řez X<sub>2</sub>:

Horní (tažená) vlákna:

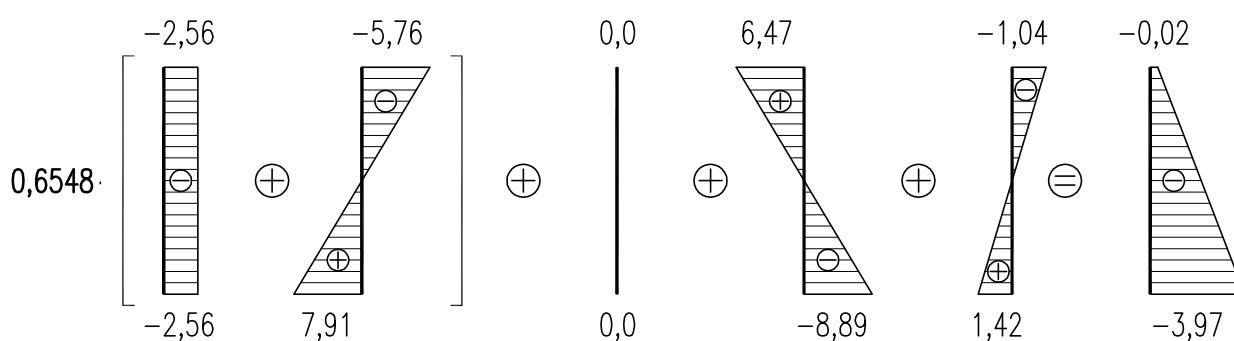
$$\sigma_{c,d,x1} = Q_2 \cdot \left( -\frac{N_{P,x2}}{A_c} + \frac{M_{P,x2}}{W_{y,H}} \right) + (\sigma_{F1,H}) + \left( -\frac{M_{q,x2}}{W_{y,H}} + \frac{M_{R,F1,x2}}{W_{y,H}} \right)$$

$$\sigma_{c,d,x1} = 0,6548 \cdot \left( -\frac{1000}{0,39} - \frac{466,49}{0,081} \right) + (0,00) + \left( \frac{524,38}{0,081} + \frac{84,0}{0,081} \right) = \underline{-0,02 \text{ MPa}}$$

Dolní (tlačená) vlákna:

$$\sigma_{c,d,x1} = Q_2 \cdot \left( -\frac{N_{P,x2}}{A_c} - \frac{M_{P,x2}}{W_{y,D}} \right) + (\sigma_{F1,D}) + \left( \frac{M_{q,x2}}{W_{y,D}} - \frac{M_{R,F1,x2}}{W_{y,D}} \right)$$

$$\sigma_{c,d,x1} = 0,6548 \cdot \left( -\frac{1000}{0,39} + \frac{466,49}{0,059} \right) + (0,00) + \left( -\frac{524,38}{0,059} - \frac{84,0}{0,059} \right) = \underline{-4,97 \text{ MPa}}$$



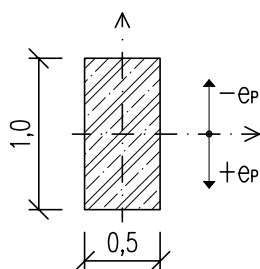
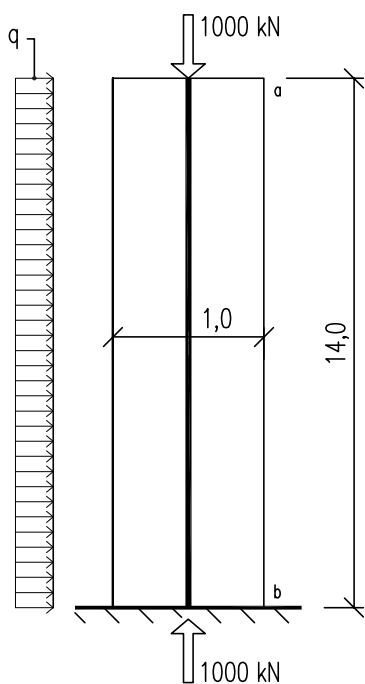
**Závěr:** Pro vyrovnání vlastní tíhy FÁZE 1 je třeba excentricita lana  $f_{x1} = 0,351 \text{ m}$ , pro plné předpětí FÁZE 2 v kritických průřezích je zapotřebí předpínací síla  $P = 654,8 \text{ kN}$ .

### 3.25 PŘÍKLAD Č.25

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro vetknutý sloup:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí na konstrukci
- maximální předpínací sílu pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu

$L_{a,b} = 14,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,5 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $e_{p,a} = e_{p,b} = 0,0 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$   
 $q = 10,0 \text{ kN/m'}$   
 $\gamma_{\text{beton}} = 25 \text{ kN/m}^3$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

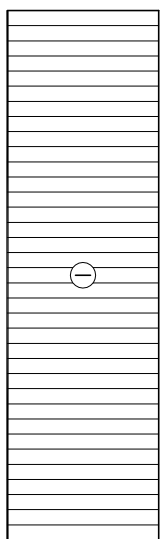
$$P_{V,a} = P_{V,b} = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$M_{P,a} = M_{P,b} = \underline{0 \text{ kNm}}$$



#### b) Celkové účinky od předpětí:

$N_P^c$



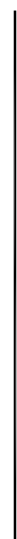
-1000 kN

$V_P^c$



0 kN

$M_P^c$



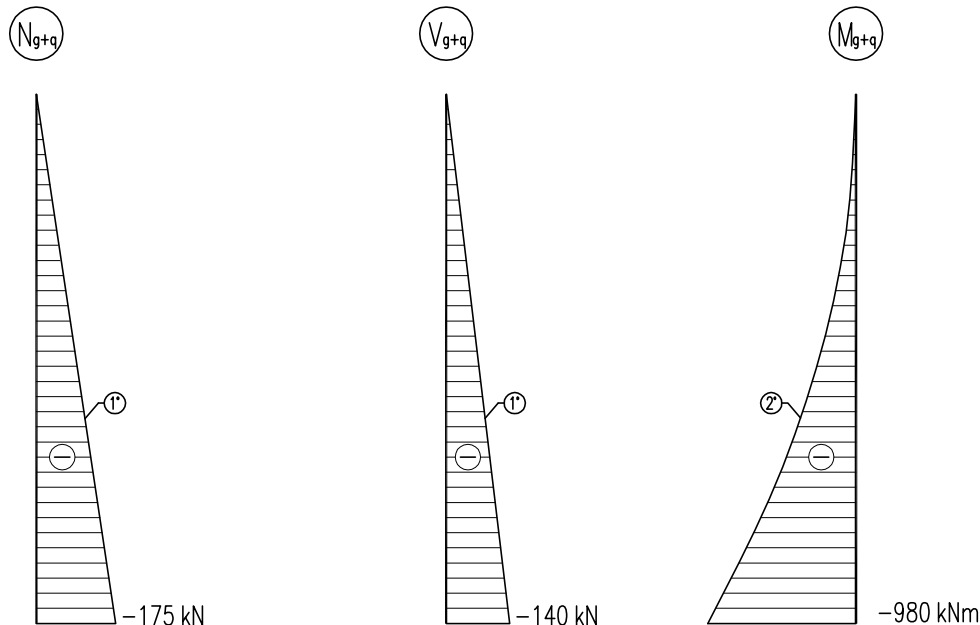
0 kNm

**c.1) Účinky vlastní tíhy a proměnné zatížení**

$$N_{g+q} = (b_c \cdot h_c) \cdot \gamma_{\text{beton}} \cdot L_{a,b} = (0,5 \cdot 1,0) \cdot 25 \cdot 14,0 = \underline{175 \text{ kN}}$$

$$V_{g+q} = q \cdot L_{a,b} = 10 \cdot 14,0 = \underline{140 \text{ kN}}$$

$$M_{g+q} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot L_{a,b}^2 = \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot 14,0^2 = \underline{-980 \text{ kNm}}$$

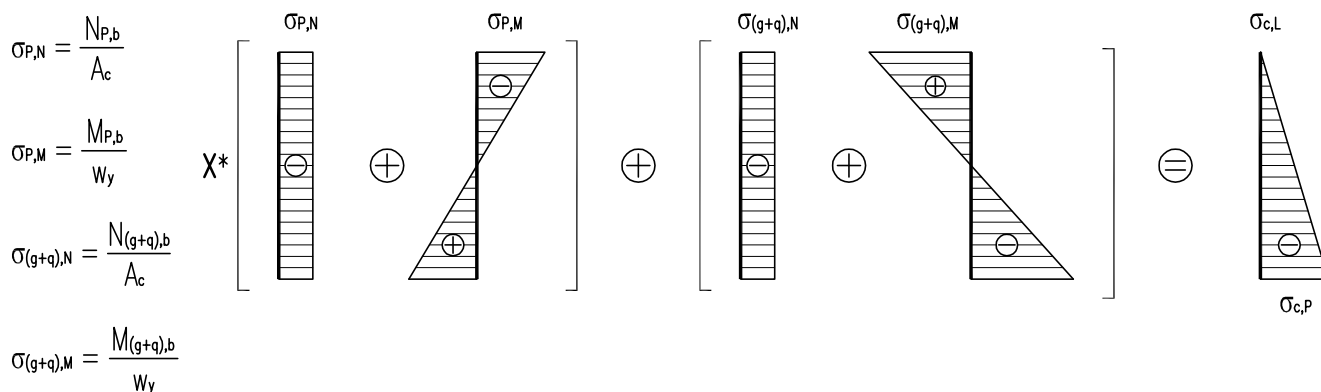


**c.2) Průřezové charakteristiky:**

$$A_c = b_c \cdot h_c = 0,5 \cdot 1,0 = \underline{0,5 \text{ m}^2}$$

$$W_y = \frac{1}{6} \cdot b_c \cdot h_c^2 = \frac{1}{6} \cdot 0,5 \cdot 1,0^2 = \underline{0,0833 \text{ m}^3}$$

**c.3) Výpočet napětí v kritickém průřezu (vetknutí – b):**



**Poznámka:** Veličina X vyjadřuje násobek předpínací síly pro dosažení stavu dekomprese (nulové tahové napětí v přilehlých vláknech betonového průřezu).



Levá (tažená) vlákna:

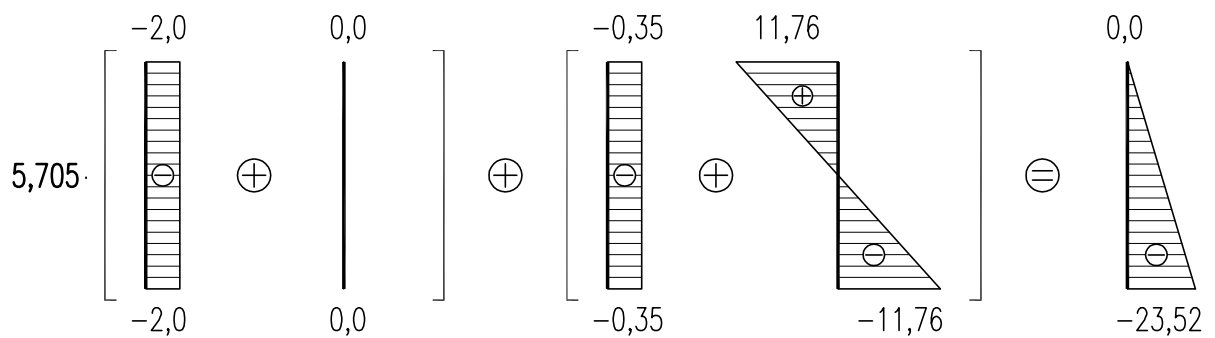
$$\sigma_{c,L} = X \cdot \left( -\frac{N_{P,b}}{A_c} - \frac{M_{P,b}}{W_y} \right) + \left( -\frac{N_{(g+q),b}}{A_c} + \frac{M_{(g+q),b}}{W_y} \right) = 0$$

$$\sigma_{c,L} = X \cdot \left( -\frac{1000}{0,5} - \frac{0}{0,0833} \right) + \left( -\frac{175}{0,5} + \frac{980}{0,0833} \right) = 0 \quad \dots \quad X = \underline{5,705}$$

Pravá (tlačená) vlákna:

$$\sigma_{c,P} = X \cdot \left( -\frac{N_{P,b}}{A_c} + \frac{M_{P,b}}{W_y} \right) + \left( -\frac{N_{(g+q),b}}{A_c} - \frac{M_{(g+q),b}}{W_y} \right) = 0$$

$$\sigma_{c,P} = 5,705 \cdot \left( -\frac{1000}{0,5} + \frac{0}{0,0833} \right) + \left( -\frac{175}{0,5} - \frac{980}{0,0833} \right) = \underline{-23,52 \text{ MPa}}$$



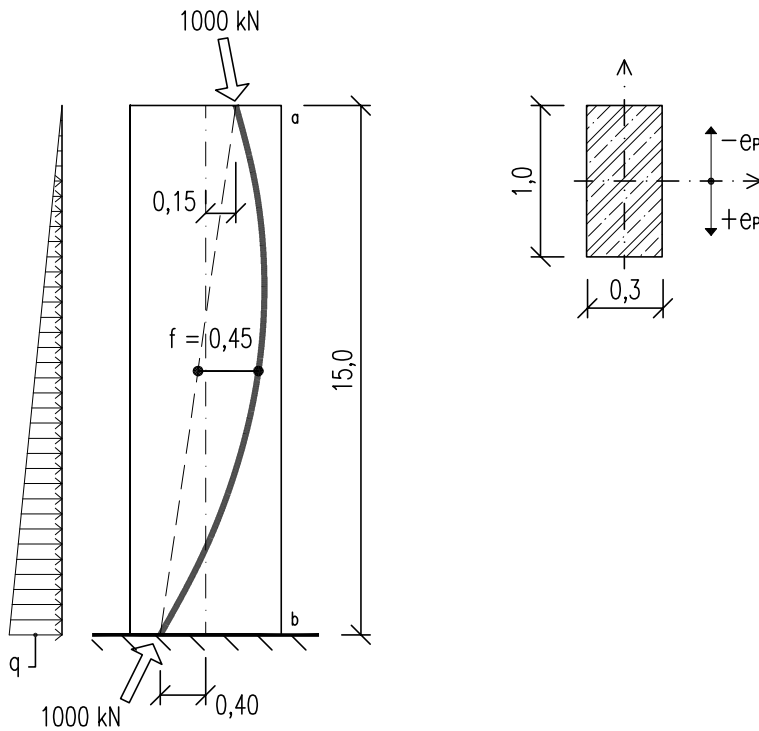
**Závěr:** Pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu je zapotřebí předpínací síly  $P = 5705 \text{ kN}$ .

### 3.26 PŘÍKLAD Č.26

Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro vetknutý sloup:

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- celkové účinky od předpětí na konstrukci
- maximální předpínací sílu pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu

$L_{a,b} = 15,0 \text{ m}$   
 $b_c = 0,3 \text{ m}$   
 $h_c = 1,0 \text{ m}$   
 $f = 0,45 \text{ m}$   
 $e_{P,a} = 0,15 \text{ m}$   
 $e_{P,b} = -0,40 \text{ m}$   
 $P = 1000 \text{ kN}$   
 $q = 15,0 \text{ kN/m}^2$   
 $\gamma_{\text{beton}} = 25 \text{ kN/m}^3$



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = -1000 \text{ kN}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,45}{15,0} = 0,030 \leq \frac{1}{15} = 0,067 \dots P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{P,a}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \dots e = e_{P,a} - e_{P,b}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod b)

$$\text{tg } \beta = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,45}{15,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,45 + 0,55}{15,0} = 0,157 \Rightarrow \alpha = 8,90^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$  (bod a)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,45}{15,0^2} \cdot 15,0 + \frac{4 \cdot 0,45 + 0,55}{15,0} = -0,073 \Rightarrow \beta = -4,76^\circ$$

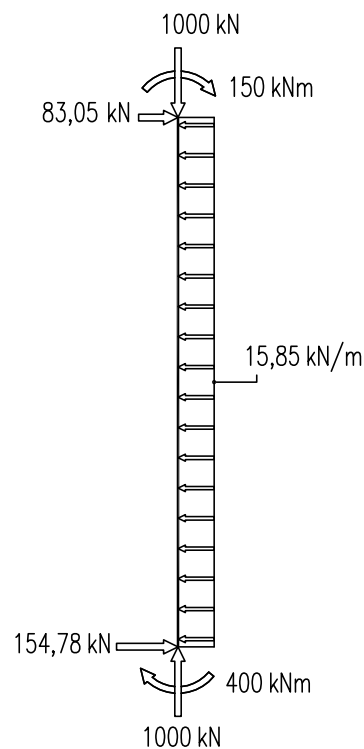
$$P_{V,a} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin(-4,76) = \underline{83,05 \text{ kN}}$$

$$P_{V,b} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin 8,90 = \underline{154,78 \text{ kN}}$$

$$p_{a,b} = \frac{-(P_{V,a} + P_{V,b})}{L_{a,b}} = \frac{-(154,78 + 83,05)}{15,0} = \underline{-15,85 \text{ kN/m'}}$$

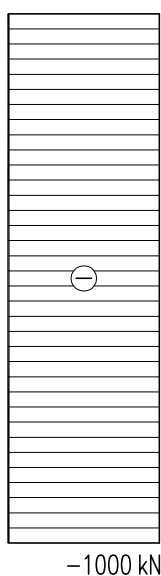
$$M_{P,a} = P \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,40) = \underline{400 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b} = P \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot 0,15 = \underline{-150 \text{ kNm}}$$



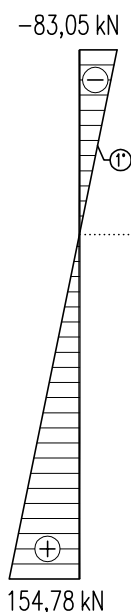
b) Celkové účinky od předpětí:

$(N_P^c)$



$$N_P^s = P_H = \underline{0 \text{ kN}}$$

$(V_P^c)$

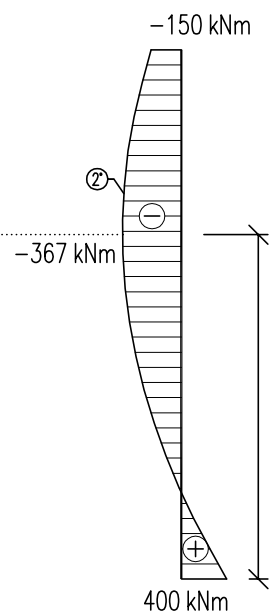


$$V_P^s = -P_{V,a} = \underline{-83,05 \text{ kN}}$$

$$V_P^s = P_{V,a} - p_{a,b} \cdot L_{a,b}$$

$$V_P^s = -83,05 - (-15,85 \cdot 15,0) = \underline{154,78 \text{ kN}}$$

$(M_P^c)$



$$M_P^s = P_H \cdot e_{P,b} = -1000 \cdot 0,15 = \underline{-150 \text{ kNm}}$$

$$M_P^s = P_H \cdot e_{P,a} = -1000 \cdot (-0,40) = \underline{-400 \text{ kNm}}$$

$$M_P^s = P_H \cdot e_{P,x} = -1000 \cdot (-0,367) = \underline{-367 \text{ kNm}}$$

$$x = \frac{V_{P,a}}{p_{a,b}} = \frac{154,78}{15,85} = \underline{9,76 \text{ m}}$$

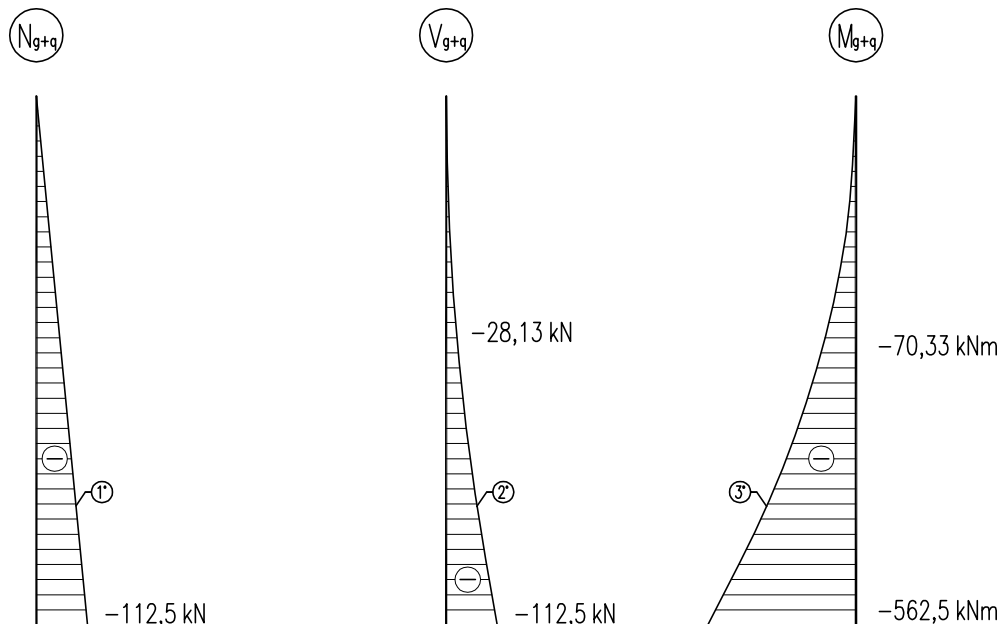
$$e_{P,x} = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x - e_{P,b} = -\frac{4 \cdot 0,45}{15,0^2} \cdot 9,76^2 + \frac{4 \cdot 0,45 + 0,55}{15,0} \cdot 9,76 - 0,40 = \underline{0,367 \text{ m}}$$

**c.1) Účinky vlastní tíhy a proměnného zatížení**

$$N_{g+q} = (b_c \cdot h_c) \cdot \gamma_{\text{beton}} \cdot L_{a,b} = (0,3 \cdot 1,0) \cdot 25 \cdot 15,0 = \underline{112,5 \text{ kN}}$$

$$V_{g+q} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot L_{a,b} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15,0 = \underline{112,5 \text{ kN}}$$

$$M_{g+q} = \left(\frac{1}{2} \cdot q \cdot L_{a,b}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot L_{a,b} = \left(\frac{1}{2} \cdot (-15) \cdot 15,0\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 15,0 = \underline{-562,5 \text{ kNm}}$$

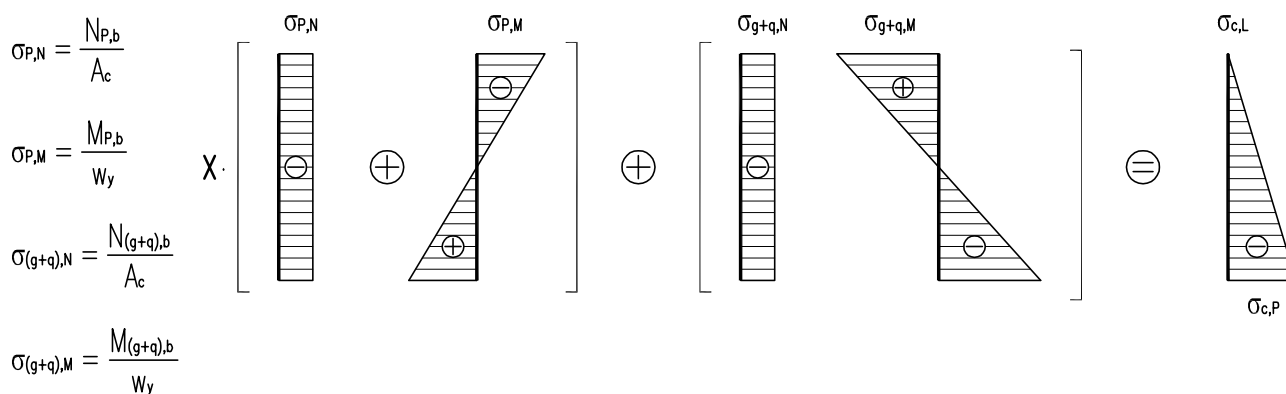


**c.2) Průřezové charakteristiky:**

$$A_c = b_c \cdot h_c = 0,3 \cdot 1,0 = \underline{0,3 \text{ m}^2}$$

$$W_y = \frac{1}{6} \cdot b_c \cdot h_c^2 = \frac{1}{6} \cdot 0,3 \cdot 1,0^2 = \underline{0,05 \text{ m}}$$

**c.3) Výpočet napětí v kritickém průřezu (vetknutí – b):**



**Poznámka:** Veličina X vyjadřuje násobek předpínací síly pro dosažení stavu dekomprese (nulové tahové napětí v přehlých vlákních betonového průřezu).

Levá (tažená) vlákna:

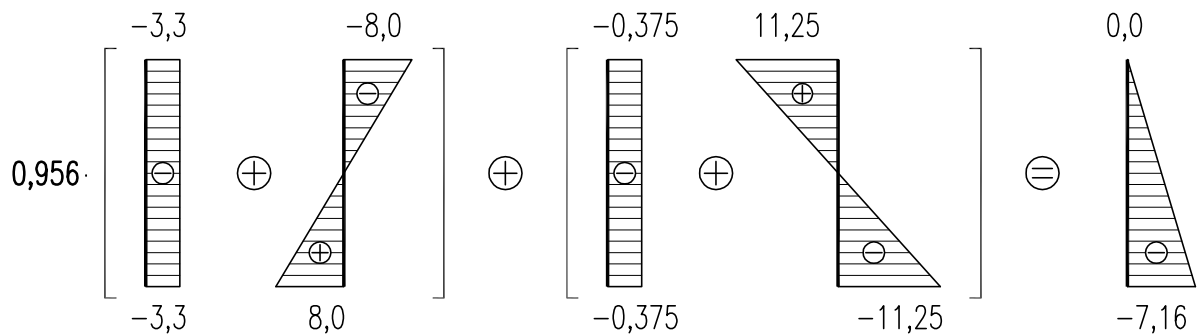
$$\sigma_{c,L} = X \cdot \left( -\frac{N_{P,b}}{A_c} - \frac{M_{P,b}}{W_y} \right) + \left( -\frac{N_{(g+q),b}}{A_c} + \frac{M_{(g+q),b}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,L} = X \cdot \left( -\frac{1000}{0,3} - \frac{400}{0,05} \right) + \left( -\frac{112,5}{0,3} + \frac{562,5}{0,05} \right) = 0 \quad \dots \quad X = \underline{0,956}$$

Pravá (tlačená) vlákna:

$$\sigma_{c,P} = X \cdot \left( -\frac{N_{P,b}}{A_c} + \frac{M_{P,b}}{W_y} \right) + \left( -\frac{N_{(g+q),b}}{A_c} - \frac{M_{(g+q),b}}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{c,P} = 3,263 \cdot \left( -\frac{1000}{0,3} + \frac{400}{0,05} \right) + \left( -\frac{112,5}{0,3} - \frac{562,5}{0,05} \right) = \underline{-7,16 \text{ MPa}}$$



**Závěr:** Pro dosažení stavu dekomprese v kritickém průřezu je zapotřebí předpínací síly  $P = 956 \text{ kN}$ .

### 3.27 PŘÍKLAD Č.27

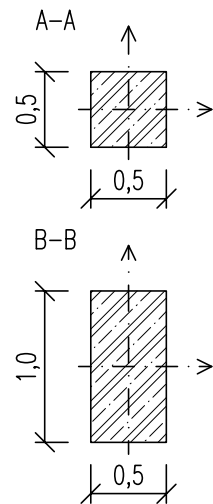
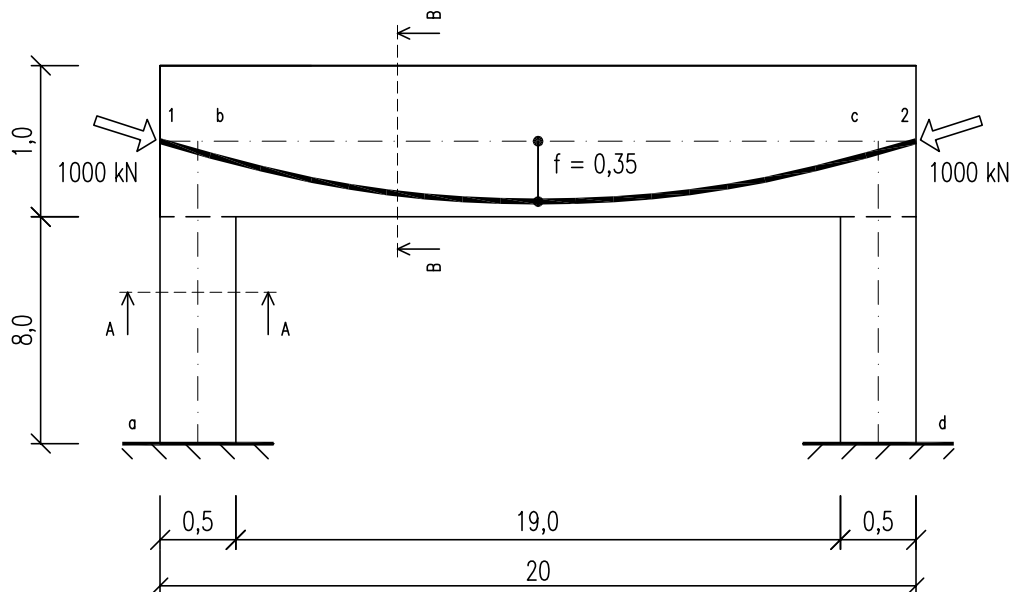
Na základě zadaných průřezových a materiálových charakteristik stanovte pro rámovou konstrukci (6x staticky neurčitou):

$$I_{A-A} = 0,005208 \text{ m}^4$$

$$I_{B-B} = 0,04167 \text{ m}^4$$

$$f = 0,35 \text{ m}$$

- ekvivalentní silové účinky od předpětí
- primární účinky od předpětí na konstrukci
- sekundární účinky od předpětí na konstrukci
- celkové účinky od předpětí na konstrukci



#### a) Ekvivalentní silové účinky od předpětí:

$$P_H = -P = \underline{-1000 \text{ kN}}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0,35}{20,0} = 0,0175 \leq \frac{1}{15} = 0,067 \dots \quad P_H = P = \text{konst.}$$

Obecná funkce paraboly:

$$y = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{p,a}$$

Směrnice funkce paraboly:

$$y' = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} \quad e = e_{p,2} - e_{p,1}$$

Sklon tečny v místě:  $x = 0$  (bod 1)

$$\text{tg } \alpha = y'_{(x=0)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,35}{20,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,35 + 0,0}{20,0} = 0,07 \Rightarrow \alpha = 4,0^\circ$$

Sklon tečny v místě:  $x = L$  (bod b)

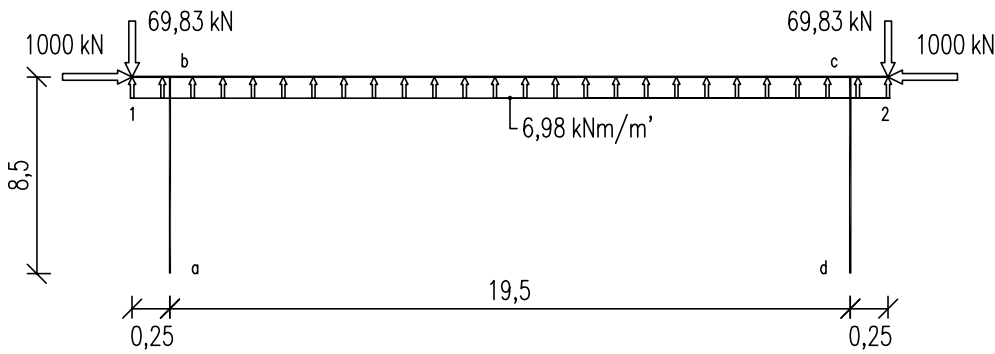
$$\text{tg } \beta = y'_{(x=L)} = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x + \frac{4 \cdot f + e}{L} = -\frac{8 \cdot 0,35}{20,0^2} \cdot 0 + \frac{4 \cdot 0,35 + 0,0}{20,0} = -0,07 \Rightarrow \alpha = -4,0^\circ$$

$$P_{V,1} = -P \cdot \sin \alpha = -1000 \cdot \sin 4,0 = \underline{-69,83 \text{ kN}}$$

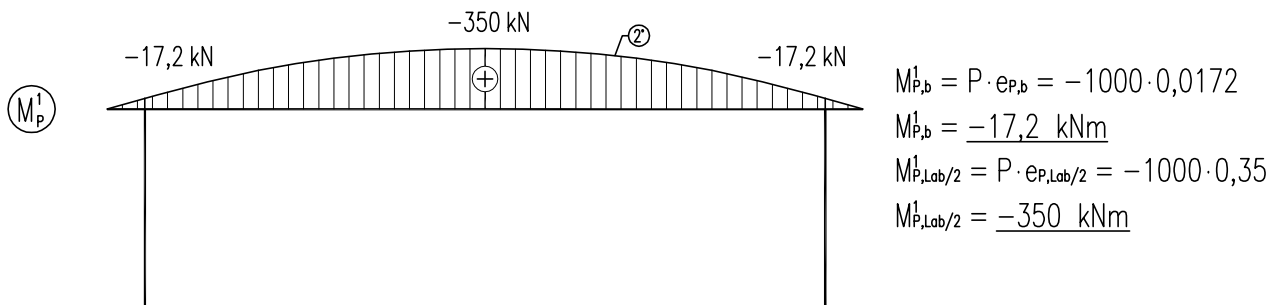
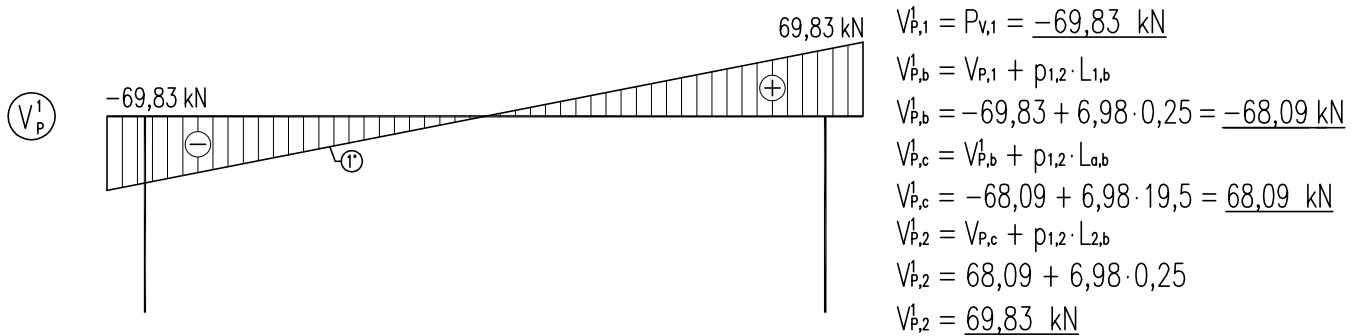
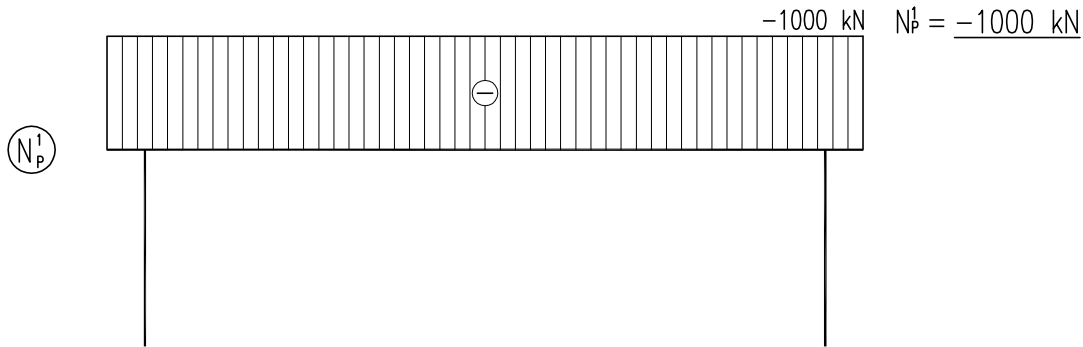
$$P_{V,2} = P \cdot \sin \beta = 1000 \cdot \sin (-4,0) = \underline{-69,83 \text{ kN}}$$

$$p_{1,2} = \frac{-(P_{V,1} + P_{V,2})}{L_{1,2}} = \frac{-(-69,83 - 69,83)}{20,0} = \underline{-6,98 \text{ kN/m'}}$$

$$M_{P,1} = M_{P,2} = P_H \cdot e_{p,1} = -1000 \cdot 0 = \underline{0 \text{ kNm}}$$



**b) Primární účinky od předpětí:**



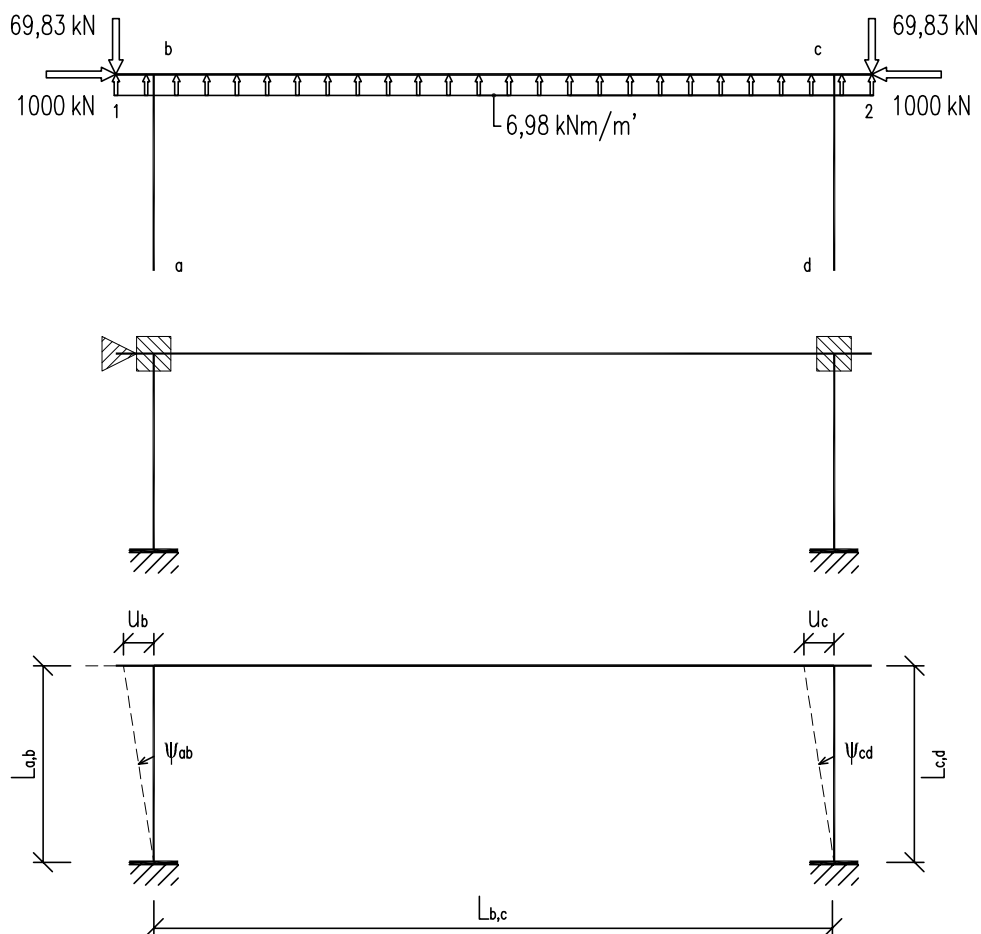
$$e_{p,b} = -\frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4 \cdot f + e}{L} \cdot x + e_{p,a} = \frac{4 \cdot 0,35 + 0,0}{20,0^2} \cdot 0,25^2 + \frac{4 \cdot 0,35 + 0,0}{20,0} \cdot 0,25 = 0,0172 \text{ m}$$

**c) Sekundární účinky od předpětí:**

Zjednodušená deformační metoda:

- Určení stupně statické přetvárnosti:  $n_p = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 - 0 = 6$

v DM by tedy bylo třeba 6 fiktivních přetvárných vazeb pootočení uzlů b a c, svislý a vodorovný posun uzlů b a c. V ZDM vše zjednodušíme tak, že svislý posun uzlů b a c zachytí vetknutí v uzlech a a d. Vodorovný posun uzlů b a c zachytí fiktivní vodorovná vazba, kterou umístíme do uzlu b. Fiktivní vazby jsou tak 3, vodorovný posun v uzlu c a pootočení v uzlech b a c. Neznámé tedy jsou  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$ ,  $\psi_{ab}$ .

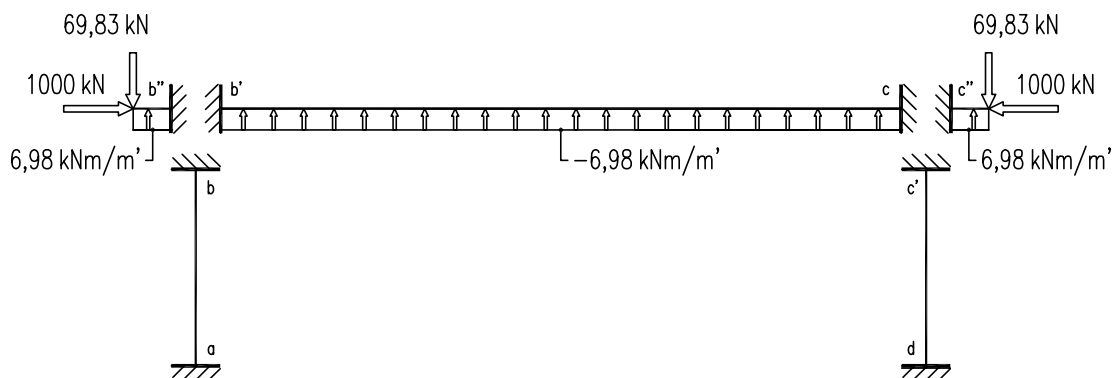


• Z geometrie můžeme napsat:

$$\operatorname{tg} \psi \approx \psi = \frac{U_b}{L} ; U_b = U_c$$

$$\psi_{ab} = \frac{U_b}{L_{a,b}} ; U_b = \psi_{ab} \cdot L_{a,b}$$

$$\psi_{cd} = \frac{U_b}{L_{c,d}} = \frac{\psi_{ab} \cdot L_{a,b}}{L_{c,d}} = \psi_{ab} \cdot \frac{L_{a,b}}{L_{c,d}} \Rightarrow L_{a,b} = L_{c,d} ; \psi_{ab} = \psi_{cd}$$



• Výpočet koncových momentů a posouvajících sil na konzole:

$$V_{b''} = -V_{c''} = p_{1,b''} \cdot L_{1,b''} - P_{v,1} = -6,98 \cdot 0,25 + 69,83 = \underline{68,09 \text{ kN}}$$

$$V_{c''} = \underline{-68,09 \text{ kN}}$$

$$M_{b''} = -M_{c''} = p_{1,b''} \cdot 0,5 \cdot L_{1,b''}^2 + P_{v,1} \cdot L_{1,b''} = 6,98 \cdot 0,5 \cdot 0,25^2 - 69,83 \cdot 0,25 = \underline{-17,24 \text{ kNm}}$$

$$M_{c''} = \underline{17,24 \text{ kNm}}$$



- Poměrná ohybová tuhost:

$$k_{ab} = k_{cd} = \frac{l_{ab}}{L_{ab}} \cdot c = \frac{0,005208}{8,5} \cdot 500 = \underline{0,3064} \quad \dots c \text{ volím } 500$$

$$k_{bc} = \frac{l_{bc}}{L_{bc}} \cdot c = \frac{0,04167}{19,5} \cdot 500 = \underline{1,0684}$$

- Primární ohybové momenty:

$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = \underline{0 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{bc} = -\bar{M}_{cb} = \frac{1}{12} \cdot p_{b,c} \cdot L_{b,c}^2 = \frac{1}{12} \cdot 6,98 \cdot 19,5^2 = \underline{221,18 \text{ kNm}}$$

$$\bar{M}_{cd} = \bar{M}_{dc} = \underline{0 \text{ kNm}}$$

- Primární posouvající síly:

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_{ba} = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$\bar{V}_{bc} = -\bar{V}_{cb} = -\frac{1}{2} \cdot p_{b,c} \cdot L_{b,c} = -\frac{1}{2} \cdot 6,98 \cdot 19,5 = \underline{-68,06 \text{ kN}}$$

$$\bar{V}_{cd} = \bar{V}_{dc} = \underline{0 \text{ kN}}$$

- Sekundární momenty:

$$\varphi_a = 0, \varphi_b = ?, \varphi_c = ?, \varphi_d = 0; \psi_{ab} = \psi_{cd} = ?, \psi_{bc} = 0$$

$$\hat{M}_{ab} = k_{ab} \cdot (2 \cdot \varphi_a + \varphi_b - 3 \cdot \psi_{ab}) = 0,3064 \cdot \varphi_b - (0,3064 \cdot 3 \cdot \psi_{ab}) = 0,3064 \cdot \varphi_b - 0,9192 \cdot \psi_{ab}$$

$$\hat{M}_{ba} = k_{ab} \cdot (2 \cdot \varphi_b + \varphi_a - 3 \cdot \psi_{ab}) = (0,3064 \cdot 2 \cdot \varphi_b) - (0,3064 \cdot 3 \cdot \psi_{ab}) = 0,6128 \cdot \varphi_b - 0,9192 \cdot \psi_{ab}$$

$$\hat{M}_{bc} = k_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_b + \varphi_c - 3 \cdot \psi_{bc}) = (1,0684 \cdot 2 \cdot \varphi_b) + 1,0684 \cdot \varphi_c = 2,1368 \cdot \varphi_b + 1,0684 \cdot \varphi_c$$

$$\hat{M}_{cb} = k_{bc} \cdot (2 \cdot \varphi_c + \varphi_b - 3 \cdot \psi_{bc}) = (1,0684 \cdot 2 \cdot \varphi_c) + 1,0684 \cdot \varphi_b = 1,0684 \cdot \varphi_b + 2,1368 \cdot \varphi_c$$

$$\hat{M}_{cd} = k_{cd} \cdot (2 \cdot \varphi_c + \varphi_d - 3 \cdot \psi_{cd}) = (0,3064 \cdot 2 \cdot \varphi_c) - (0,3064 \cdot 3 \cdot \psi_{ab}) = 0,6128 \cdot \varphi_c - 0,9192 \cdot \psi_{ab}$$

$$\hat{M}_{dc} = k_{cd} \cdot (2 \cdot \varphi_d + \varphi_c - 3 \cdot \psi_{cd}) = 0,3064 \cdot \varphi_c - (0,3064 \cdot 3 \cdot \psi_{ab}) = 0,3064 \cdot \varphi_c - 0,9192 \cdot \psi_{ab}$$

- Sekundární posouvající síly:

$$\hat{V}_{ab} = -\frac{k_{ab}}{L_{a,b}} \cdot (3 \cdot \varphi_a + 3 \cdot \varphi_b - 6 \cdot \psi_{ab}) = -\frac{0,3064}{8,5} \cdot (3 \cdot \varphi_b - 6 \cdot \psi_{ab}) = -0,1081 \cdot \varphi_b + 0,2163 \cdot \psi_{ab}$$

$$\hat{V}_{ba} = -\frac{k_{ab}}{L_{a,b}} \cdot (3 \cdot \varphi_a + 3 \cdot \varphi_b - 6 \cdot \psi_{ab}) = -\frac{0,3064}{8,5} \cdot (3 \cdot \varphi_b - 6 \cdot \psi_{ab}) = -0,1081 \cdot \varphi_b + 0,2163 \cdot \psi_{ab}$$

$$\hat{V}_{bc} = -\frac{k_{bc}}{L_{b,c}} \cdot (3 \cdot \varphi_b + 3 \cdot \varphi_c - 6 \cdot \psi_{bc}) = -\frac{1,0684}{19,5} \cdot (3 \cdot \varphi_b + 3 \cdot \varphi_c) = -0,1644 \cdot \varphi_b - 0,1644 \cdot \varphi_c$$

$$\hat{V}_{cb} = -\frac{k_{bc}}{L_{b,c}} \cdot (3 \cdot \varphi_b + 3 \cdot \varphi_c - 6 \cdot \psi_{bc}) = -\frac{1,0684}{19,5} \cdot (3 \cdot \varphi_b + 3 \cdot \varphi_c) = -0,1644 \cdot \varphi_b - 0,1644 \cdot \varphi_c$$

$$\hat{V}_{cd} = -\frac{k_{cd}}{L_{c,d}} \cdot (3 \cdot \varphi_c + 3 \cdot \varphi_d - 6 \cdot \psi_{cd}) = -\frac{0,3064}{8,5} \cdot (3 \cdot \varphi_c - 6 \cdot \psi_{ab}) = -0,1081 \cdot \varphi_c + 0,2163 \cdot \psi_{ab}$$

$$\hat{V}_{dc} = -\frac{k_{cd}}{L_{c,d}} \cdot (3 \cdot \varphi_c + 3 \cdot \varphi_d - 6 \cdot \psi_{cd}) = -\frac{0,3064}{8,5} \cdot (3 \cdot \varphi_c - 6 \cdot \psi_{ab}) = -0,1081 \cdot \varphi_c + 0,2163 \cdot \psi_{ab}$$

- Styčnicková rovnice pro b:

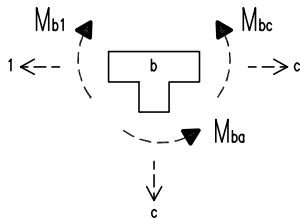
$$\Sigma M_b = M_{ba} + M_{bc} + M_{b1} = \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} + \bar{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} + M_{b1}$$

$$= (0,0 + 0,6128 \cdot \varphi_b - 0,9192 \cdot \psi_{ab}) + (221,18 + 2,1368 \cdot \varphi_b + 1,0684 \cdot \varphi_c) + 17,22$$

$$= 238,4 + 2,7496 \cdot \varphi_b + 1,0684 \cdot \varphi_c - 0,9192 \cdot \psi_{ab}$$

- Styčnicková rovnice pro c:

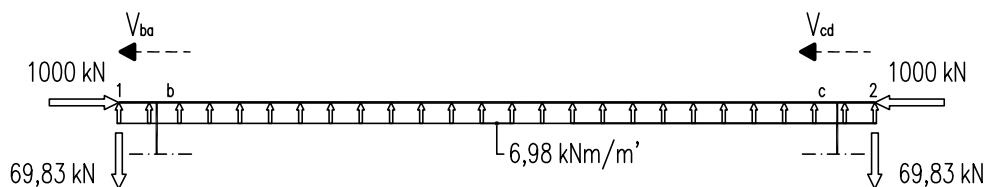
$$\begin{aligned}\Sigma M_c &= M_{cb} + M_{cd} + M_{c2} = \bar{M}_{cb} + \hat{M}_{cb} + \bar{M}_{cd} + \hat{M}_{cd} + M_{c2} \\ &= (-221,18 + 1,0684 \cdot \varphi_b + 2,1368 \cdot \varphi_c) + (0,0 + 0,6128 \cdot \varphi_c - 0,9192 \cdot \psi_{ab}) - 17,22 \\ &= -238,4 + 1,0684 \cdot \varphi_b + 2,7496 \cdot \varphi_c - 0,9192 \cdot \psi_{ab}\end{aligned}$$



**Poznámka:** Pozor na konvenci akce konzoly na styčnících (viz. obrázek – styčníc b)

- Patrová rovnice:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{ix} &= V_{ba} + V_{cd} + P_b + P_c = \bar{V}_{ba} + \hat{V}_{ba} + \bar{V}_{cd} + \hat{V}_{cd} + P_b + P_c \\ &= (0,0 + -0,1081 \cdot \varphi_b + 0,2163 \cdot \psi_{ab}) + (0,0 - 0,1081 \cdot \varphi_c + 0,2163 \cdot \psi_{ab}) + 1000 - 1000 \\ &= -0,1081 \cdot \varphi_b - 0,1081 \cdot \varphi_c + 0,4326 \cdot \psi_{ab}\end{aligned}$$



- řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}\Sigma M_b &= 0; & 2,7496 \cdot \varphi_b + 1,0684 \cdot \varphi_c - 0,9192 \cdot \psi_{ab} &= -238,4 \\ \Sigma M_c &= 0; & 1,0684 \cdot \varphi_b + 2,7496 \cdot \varphi_c - 0,9192 \cdot \psi_{ab} &= 238,4 \\ \Sigma F_{ix} &= 0; & -0,1081 \cdot \varphi_b - 0,1081 \cdot \varphi_c + 0,4326 \cdot \psi_{ab} &= 0,0\end{aligned}$$

$$|A| = \begin{pmatrix} 2,7496 & 1,0684 & -0,9192 & | & -238,4 \\ 1,0684 & 2,7496 & 0,9192 & | & 238,4 \\ -0,1081 & -0,1081 & 0,4326 & | & 0,0 \end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1,0}{2,44} \cdot \begin{pmatrix} 1,0898 & -0,3627 & 1,5452 \\ -0,3627 & 1,0898 & 1,5452 \\ 0,1818 & 0,1818 & 6,4183 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_b \\ \varphi_c \\ \psi_{ab} \end{pmatrix} = \frac{1,0}{2,44} \cdot \begin{pmatrix} 1,0898 & -0,3627 & 1,5452 \\ -0,3627 & 1,0898 & 1,5452 \\ 0,1818 & 0,1818 & 6,4183 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -234,4 \\ 234,4 \\ 0,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -141,80 \\ 141,80 \\ 0,0 \end{pmatrix}$$

**řešení:**

$$\varphi_b = 141,80 ; \varphi_c = -141,80 ; \psi_{ab} = 0,0$$

**Poznámka:** Výsledkem výpočtu jsou celkové účinky předpětí na konstrukci.

- Výpočet koncových ohybových momentů:

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + \hat{M}_{ab} = 0,0 + 0,3064 \cdot (-141,80) - 0,9192 \cdot 0,0 = \underline{-43,45 \text{ kNm}}$$

$$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = 0,0 + 0,6128 \cdot (-141,80) - 0,9192 \cdot 0,0 = \underline{-86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{bc} = \bar{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = 221,18 + 2,1368 \cdot (-141,80) + 1,0684 \cdot 141,80 = \underline{69,68 \text{ kNm}}$$

$$M_{cb} = \bar{M}_{cb} + \hat{M}_{cb} = -221,18 + 1,0684 \cdot (-141,80) + 2,1368 \cdot 141,80 = \underline{-69,68 \text{ kNm}}$$

$$M_{cd} = \bar{M}_{cd} + \hat{M}_{cd} = 0,0 + 0,6128 \cdot 141,80 - 0,9192 \cdot 0,0 = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{dc} = \bar{M}_{dc} + \hat{M}_{dc} = 0,0 + 0,3064 \cdot 141,80 - 0,9192 \cdot 0,0 = \underline{43,45 \text{ kNm}}$$

- Ohybový moment v polovině rozpětí  $L_{b,c}$ :

$$M_{bc,1/2} = M_{0,1/2} + \Delta M_{1/2} = M_{0,1/2} + \frac{M_{bc} \cdot L_{b,1/2} - M_{cb} \cdot L_{1/2,c}}{L_{b,c}} = p_{1,b} \cdot 0,5 \cdot L_{b,1/2}^2 + \frac{M_{bc} \cdot L_{b,1/2} - M_{cb} \cdot L_{1/2,c}}{L_{b,c}}$$

$$= -6,98 \cdot 0,5 \cdot 9,75^2 + \frac{69,68 \cdot 9,75 - (-69,68 \cdot 9,75)}{19,5} = -332,78 + 69,68 = \underline{-263,10 \text{ kNm}}$$

- Výpočet koncových posouvajících sil:

$$V_{ab} = \bar{V}_{ab} + \hat{V}_{ab} = 0,0 - 0,1081 \cdot (-141,80) + 0,2163 \cdot 0,0 = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{ba} = \bar{V}_{ab} + \hat{V}_{ab} = 0,0 - 0,1081 \cdot (-141,80) + 0,2163 \cdot 0,0 = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{bc} = \bar{V}_{bc} + \hat{V}_{bc} = 0,0 - 0,1644 \cdot (-141,80) - 0,1644 \cdot 141,80 = \underline{-68,06 \text{ kN}}$$

$$V_{cb} = \bar{V}_{cb} + \hat{V}_{cb} = 0,0 - 0,1644 \cdot (-141,80) - 0,1644 \cdot 141,80 = \underline{68,06 \text{ kN}}$$

$$V_{cd} = \bar{V}_{cd} + \hat{V}_{cd} = 0,0 - 0,1081 \cdot 141,80 + 0,2163 \cdot 0,0 = \underline{-15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{dc} = \bar{V}_{dc} + \hat{V}_{dc} = 0,0 - 0,1081 \cdot 141,80 + 0,2163 \cdot 0,0 = \underline{-15,33 \text{ kN}}$$

### Sekundární ohybové momenty od předpětí:

$$M_{P,a}^c = M_{ab} = \underline{-43,45 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,a}^2 = M_{P,a}^c - M_{P,a}^1 = -43,45 - 0,0 = \underline{-43,45 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^c = -M_{ba} = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b}^2 = M_{P,b}^c - M_{P,b}^1 = 86,90 - 0,0 = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b'}^c = M_{ba} = \underline{69,68 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b'}^2 = M_{P,b'}^c - M_{P,b'}^1 = 69,68 - (-17,22) = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b''}^c = M_{ba} = \underline{-17,22 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,b''}^2 = M_{P,b''}^c - M_{P,b}^1 = 0,0 - (-17,2) \approx \underline{0,0 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,bc,1/2}^c = M_{bc,1/2} = \underline{-263,10 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,bc,1/2}^2 = M_{P,bc,1/2}^c - M_{P,bc,1/2}^1 = -263,1 - (-350) = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,c}^c = -M_{cb} = \underline{69,68 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,c}^2 = M_{P,c}^c - M_{P,c}^1 = 69,68 - (-17,22) = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,c'}^c = M_{cd} = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,c'}^2 = M_{P,c'}^c - M_{P,c'}^1 = 86,90 - 0,0 = \underline{86,90 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,c''}^c = M_{cd} = \underline{-17,22 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,c''}^2 = M_{P,c''}^c - M_{P,c}^1 = -17,22 - (-17,2) \approx \underline{0,0 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,d}^c = -M_{dc} = \underline{-43,45 \text{ kNm}}$$

$$M_{P,d}^2 = M_{P,d}^c - M_{P,d}^1 = -43,45 - 0,0 = \underline{-43,45 \text{ kNm}}$$

**Sekundární posouvající síly od předpětí:**

$$V_{P,a}^c = V_{ob} = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{P,a}^2 = V_{P,a}^c - V_{P,a}^1 = 15,33 - 0,0 = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^c = V_{bo} = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b}^2 = V_{P,b}^c - V_{P,b}^1 = 15,33 - 0,0 = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b'}^c = V_{bc} = \underline{-68,68 \text{ kN}}$$

$$V_{P,b'}^2 = V_{P,b'}^c - V_{P,b'}^1 = -68,06 - (-68,09) = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

$$V_{P,c}^c = V_{cb} = \underline{68,06 \text{ kN}}$$

$$V_{P,c}^2 = V_{P,c}^c - V_{P,c}^1 = 68,06 - 68,09 = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

$$V_{P,c'}^c = V_{cd} = \underline{-15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{P,c'}^2 = V_{P,c'}^c - V_{P,c'}^1 = -15,33 - 0,0 = \underline{-15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{P,d}^c = V_{dc} = \underline{-15,33 \text{ kN}}$$

$$V_{P,d}^2 = V_{P,d}^c - V_{P,d}^1 = -15,33 - 0,0 = \underline{-15,33 \text{ kN}}$$

**Sekundární normálové síly (vyřešeny z podmínky rovnováhy):**

- styčnick b:

$$\Sigma F_{b,x} = V_{bo} + P_b = N_{P,b}^c = 15,33 + 1000 = \underline{1015,33 \text{ kN}}$$

$$N_{P,d}^2 = N_{P,d}^c - N_{P,d}^1 = 1015,33 - 1000,0 = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

- styčnick c:

$$\Sigma F_{cx} = V_{cd} + P_b = N_{P,b}^c = -15,33 - 1000 = \underline{-1015,33 \text{ kN}}$$

$$N_{P,d}^2 = N_{P,d}^c - N_{P,d}^1 = -1015,33 - (-1000,0) = \underline{-15,33 \text{ kN}}$$

**Vyčíslení podporových reakcí:**



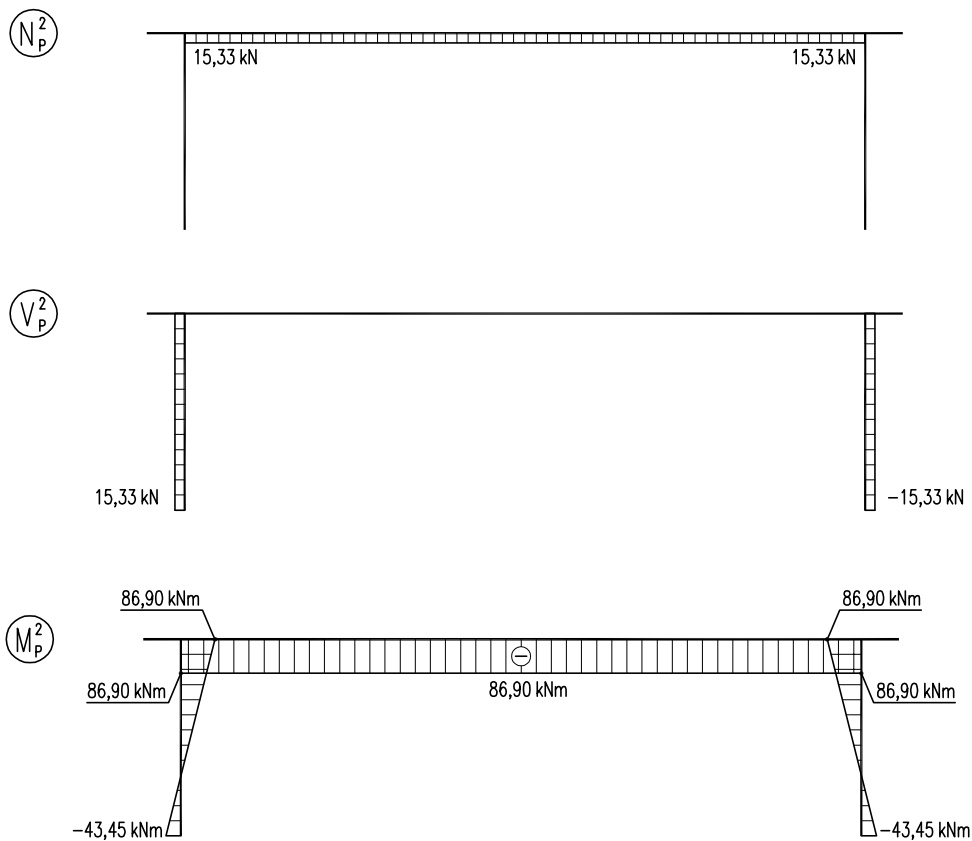
- Reakce odpovídají koncovým silám na styčnicku:

$$R_{a,z} = -V_{ob} = \underline{-15,33 \text{ kN}} ; R_{d,z} = -V_{dc} = \underline{15,33 \text{ kN}}$$

$$R_{a,x} = N_a = \underline{0,0 \text{ kN}} ; R_{d,x} = N_d = \underline{0,0 \text{ kN}}$$

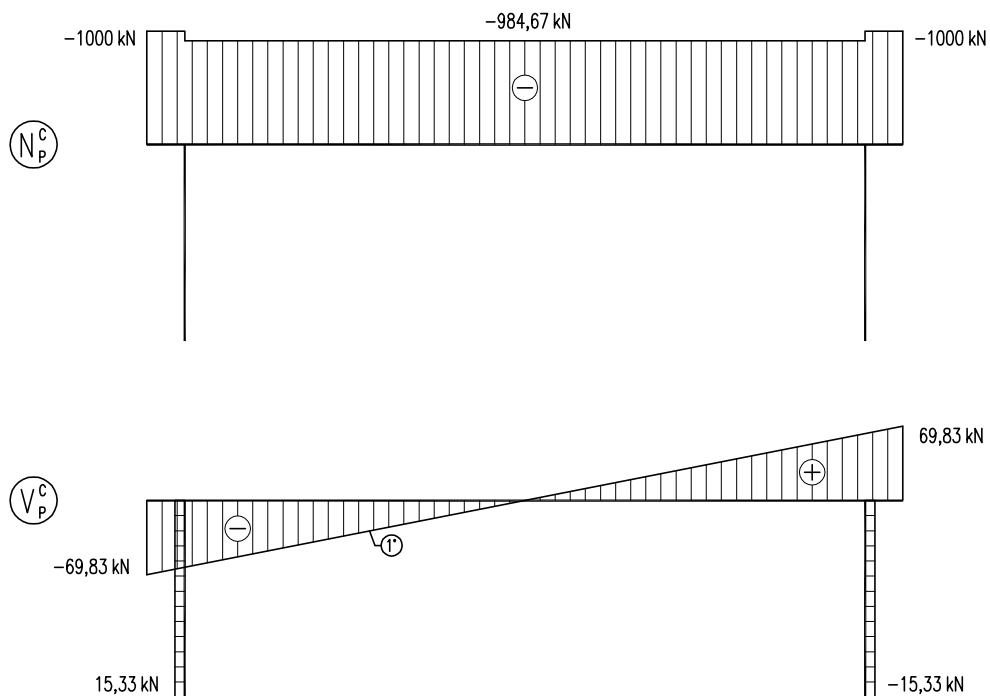
$$R_{a,M} = M_{ob} = \underline{-43,45 \text{ kNm}} ; R_{d,M} = M_{dc} = \underline{43,45 \text{ kNm}}$$

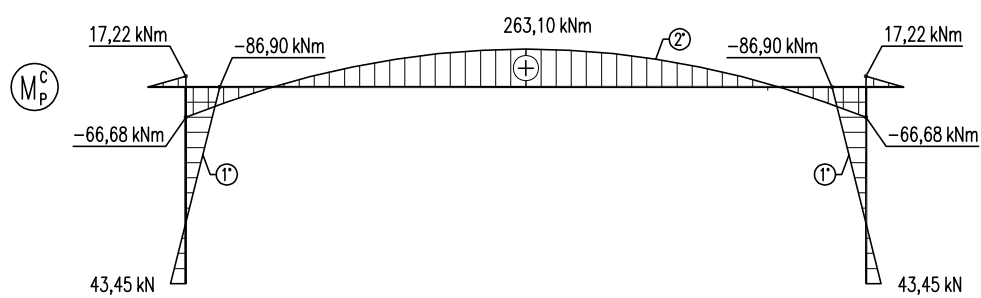
Sekundární účinky od předpětí:



d) Celkové účinky od předpětí:

veškeré hodnoty celkových účinků byly vyčísleny na konci odstavce c)





**Závěr:** Jak je vidět na tomto příkladu, lze ZDM řešit i náročnější rámové konstrukce. Je však nutné dodržovat všechna pravidla a konvence vyplývající z této metody.

## 4. PŘÍLOHOVÁ ČÁST

### 4.1 DEFORMACE PROSTÉHO NOSNÍKU KONSTANTNÍHO PRŮŘEZU

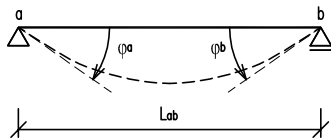


Schéma	Natočení $\varphi$	Schéma	Natočení $\varphi$
	$\varphi_a = \frac{F \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L} \cdot (L+b)$ $\varphi_b = \frac{F \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I_y \cdot L} \cdot (L+a)$		$\varphi_a = \frac{7}{360} \cdot \frac{g \cdot L^3}{E \cdot I_y}$ $\varphi_b = \frac{8}{360} \cdot \frac{g \cdot L^3}{E \cdot I_y}$
	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I_y}$		$\varphi_a = \frac{g \cdot a^2 \cdot L}{360 \cdot E \cdot I_y} \cdot (20 - 15 \cdot \frac{a}{L} + 3 \cdot \frac{a^2}{L^2})$ $\varphi_b = \frac{g \cdot a^2 \cdot L}{360 \cdot E \cdot I_y} \cdot (10 - 3 \cdot \frac{a^2}{L^2})$
	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{F \cdot L^2}{9 \cdot E \cdot I_y}$		$\varphi_a = \frac{g \cdot a^2 \cdot L}{360 \cdot E \cdot I_y} \cdot (40 - 45 \cdot \frac{a}{L} + 12 \cdot \frac{a^2}{L^2})$ $\varphi_b = \frac{g \cdot a^2 \cdot L}{90 \cdot E \cdot I_y} \cdot (5 - 3 \cdot \frac{a^2}{L^2})$
	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{5}{32} \cdot \frac{F \cdot L^2}{E \cdot I_y}$		$\varphi_a = \varphi_b = \frac{5}{192} \cdot \frac{g \cdot L^3}{E \cdot I_y}$
	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{F \cdot a}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L-a)$		$\varphi_a = \frac{L^3}{360 \cdot E \cdot I_y} \cdot (8 \cdot g_1 + 7 \cdot g_2)$ $\varphi_b = \frac{L^3}{360 \cdot E \cdot I_y} \cdot (7 \cdot g_1 + 8 \cdot g_2)$
	$\varphi_a = \frac{g \cdot a^2}{24 \cdot E \cdot I_y \cdot L} \cdot (2 \cdot L - a)^2$ $\varphi_b = \frac{g \cdot a^2}{24 \cdot E \cdot I_y \cdot L} \cdot (2 \cdot L^2 - a^2)$		$\varphi_a = \varphi_b = \frac{g \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot (1 - 2 \cdot \frac{a^2}{L^2} + \frac{a^3}{L^3})$
	$\varphi_a = \frac{g}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot \frac{b \cdot c}{L} \cdot [4 \cdot a \cdot (L+b) - c^2]$ $\varphi_b = \frac{g}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot \frac{a \cdot c}{L} \cdot [4 \cdot b \cdot (L+a) - c^2]$		$\varphi_a = \frac{-M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I_y} \cdot (1 - 3 \cdot \frac{b^2}{L^2})$ $\varphi_b = \frac{M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I_y} \cdot (1 - 3 \cdot \frac{a^2}{L^2})$
	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{g \cdot a^2}{12 \cdot E \cdot I_y} \cdot (3 \cdot L - 2 \cdot a)$		$\varphi_a = \frac{M \cdot L}{3 \cdot E \cdot I_y}$ $\varphi_b = \frac{M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I_y}$
	$\varphi_a = \varphi_b = \frac{1}{24} \cdot \frac{g \cdot L^3}{E \cdot I_y}$		

## 4.2 DEFORMACE JEDNOSTRANNĚ VETKNUTÉHO NOSNÍKU KONSTANTNÍHO PRŮŘEZU

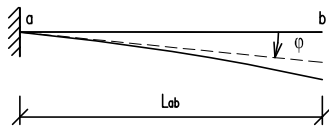
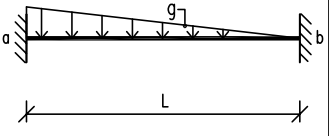
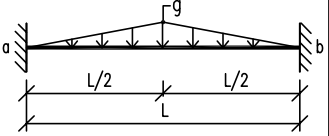
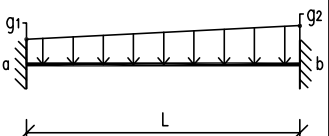
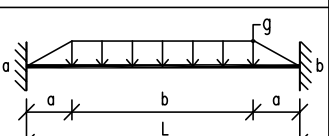
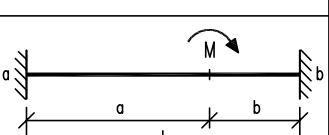


Schéma	Natočení $\varphi$	Schéma	Natočení $\varphi$
	$\varphi = \frac{F \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot I_y}$		$\varphi = \frac{g \cdot b}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot (6 \cdot L^2 - 8 \cdot L \cdot b + 3 \cdot b^2)$
	$\varphi = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_y}$		$\varphi = \frac{g \cdot b}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot (6 \cdot L^2 - 4 \cdot L \cdot b + b^2)$
	$\varphi = \frac{g}{6 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L^3 - a^3)$		$\varphi = \frac{7}{96} \cdot \frac{g L^3}{E \cdot I_y}$
	$\varphi = \frac{g \cdot a^3}{6 \cdot E \cdot I_y}$		$\varphi = \frac{L^3}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot (3 \cdot g_1 + g_2)$
	$\varphi = \frac{g \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I_y}$		$\varphi = \frac{M \cdot a}{E \cdot I_y}$
	$\varphi = \frac{g \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I_y}$		$\varphi = \frac{M \cdot L}{E \cdot I_y}$
	$\varphi = \frac{g \cdot L^3}{8 \cdot E \cdot I_y}$		



### 4.3 PRIMÁRNÍ MOMENTY A REAKCE OBOUSTRANNĚ VETKNUTÉHO NOSNÍKU

Schéma	Primární moment $\bar{M}$	Reakce $\bar{V}_{ab}=\bar{R}_a; \bar{V}_{ba}=\bar{R}_b$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{F \cdot a \cdot b^2}{L^2}$ $\bar{M}_{ba} = \frac{F \cdot a^2 \cdot b}{L^2}$	$\bar{V}_{ab} = \frac{F \cdot b^2}{L^3} \cdot (L+2 \cdot a)$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{F \cdot a^2}{L^3} \cdot (L+2 \cdot b)$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{1}{8} \cdot F \cdot L$ $\bar{M}_{ba} = \frac{1}{8} \cdot F \cdot L$	$\bar{V}_{ab} = \frac{F}{2}$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{F}{2}$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{2}{9} \cdot F \cdot L$ $\bar{M}_{ba} = \frac{2}{9} \cdot F \cdot L$	$\bar{V}_{ab} = F$ $\bar{V}_{ba} = -F$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{5}{16} \cdot F \cdot L$ $\bar{M}_{ba} = \frac{5}{16} \cdot F \cdot L$	$\bar{V}_{ab} = \frac{3 \cdot F}{2}$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{3 \cdot F}{2}$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{F \cdot a}{L} \cdot (L-a)$ $\bar{M}_{ba} = \frac{F \cdot a}{L} \cdot (L-a)$	$\bar{V}_{ab} = F$ $\bar{V}_{ba} = -F$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{g \cdot a^2}{12 \cdot L^2} \cdot (6 \cdot b^2 + 3 \cdot a \cdot b + a \cdot L)$ $\bar{M}_{ba} = \frac{g \cdot a^3}{12 \cdot L^2} \cdot (3 \cdot b + L)$	$\bar{V}_{ab} = \frac{g \cdot a}{2 \cdot L^3} \cdot [2 \cdot L \cdot (L^2 - a^2) + a^3]$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{g \cdot a^3}{2 \cdot L^3} \cdot (b + L)$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{g \cdot c}{12 \cdot L^2} \cdot (12 \cdot a \cdot b^2 + a \cdot c^2 - 2 \cdot b \cdot c^2)$ $\bar{M}_{ba} = -\frac{g \cdot c}{12 \cdot L^2} \cdot (12 \cdot a^2 \cdot b + b \cdot c^2 - 2 \cdot a \cdot c^2)$	$\bar{V}_{ab} = \frac{g \cdot c}{4 \cdot L^3} \cdot [4 \cdot b^2 \cdot (3 \cdot a + b) + c^2 \cdot (a - b)]$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{g \cdot c}{4 \cdot L^3} \cdot [4 \cdot a^2 \cdot (a + 3 \cdot b) + c^2 \cdot (b - a)]$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{g \cdot a^2}{6 \cdot L} \cdot (2 \cdot L + b)$ $\bar{M}_{ba} = \frac{g \cdot a^2}{6 \cdot L} \cdot (2 \cdot L + b)$	$\bar{V}_{ab} = g \cdot a$ $\bar{V}_{ba} = -g \cdot a$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{1}{12} \cdot g \cdot L^2$ $\bar{M}_{ba} = \frac{1}{12} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot L$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{1}{30} \cdot g \cdot L^2$ $\bar{M}_{ba} = \frac{1}{20} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{3}{20} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{7}{20} \cdot g \cdot L$

Schéma	Primární moment $\bar{M}$	Reakce $\bar{V}_{ab}=\bar{R}_a; \bar{V}_{ba}=\bar{R}_b$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{1}{20} \cdot g \cdot L^2$ $\bar{M}_{ba} = \frac{1}{30} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{7}{20} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{3}{20} \cdot g \cdot L$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{5}{96} \cdot g \cdot L^2$ $\bar{M}_{ba} = \frac{5}{96} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{1}{4} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{1}{4} \cdot g \cdot L$
	$\bar{M}_{ab} = -\left(\frac{g_1}{12} + \frac{g_2 - g_1}{30}\right) \cdot L^2$ $\bar{M}_{ba} = \left(\frac{g_1}{12} + \frac{g_2 - g_1}{20}\right) \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \left(\frac{g_1}{2} + \frac{3 \cdot (g_2 - g_1)}{20}\right) \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\left(\frac{g_1}{2} + \frac{7 \cdot (g_2 - g_1)}{20}\right) \cdot L$
	$\bar{M}_{ab} = -\frac{g \cdot (L-a)}{12 \cdot L} \cdot (a^2 + a \cdot b + L^2)$ $\bar{M}_{ba} = -\frac{g \cdot (L-a)}{12 \cdot L} \cdot (a^2 + a \cdot b + L^2)$	$\bar{V}_{ab} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (a+b)$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot (a+b)$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{M \cdot b}{L^2} \cdot (2 \cdot L - 3 \cdot b)$ $\bar{M}_{ba} = \frac{M \cdot a}{L^2} \cdot (2 \cdot L - 3 \cdot a)$	$\bar{V}_{ab} = -\frac{6 \cdot M \cdot a \cdot b}{L^3}$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{6 \cdot M \cdot a \cdot b}{L^3}$

#### 4.4 PRIMÁRNÍ MOMENTY A REAKCE JEDNOSTRANNĚ VETKNUTÉHO NOSNÍKU

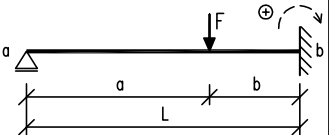
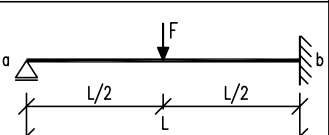
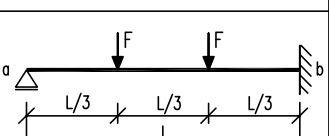
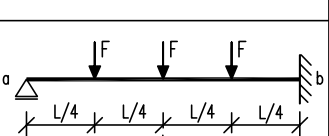
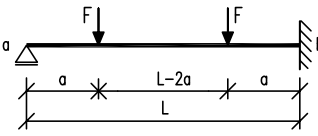
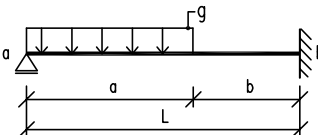
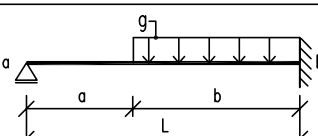
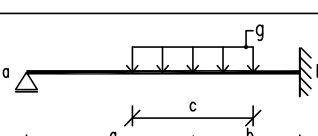
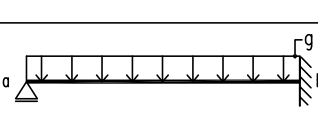
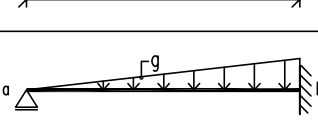
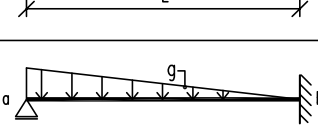
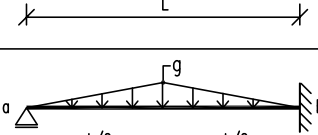
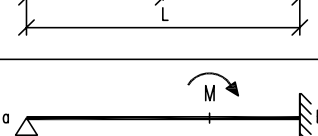
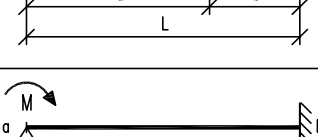


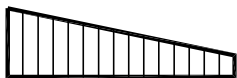
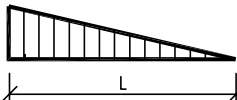
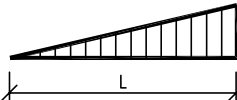
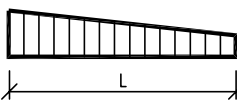
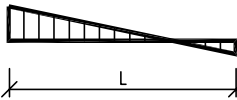
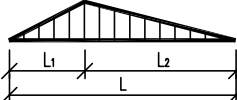
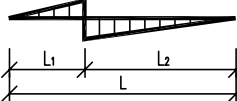
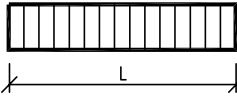
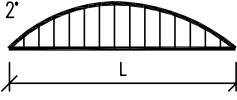
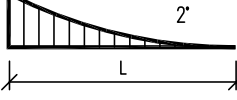
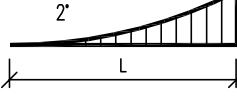
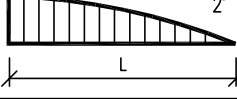
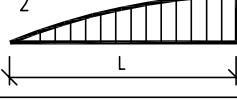
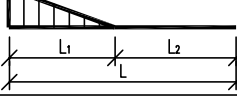
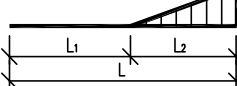
Schéma	Primární moment $\bar{M}$	Reakce $\bar{V}_{ab}=\bar{R}_a; \bar{V}_{ba}=\bar{R}_b$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{F \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L+a)$	$\bar{V}_{ab} = \frac{F \cdot b^2}{2 \cdot L^3} \cdot (2 \cdot L + a)$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{F \cdot a}{2 \cdot L^3} \cdot (3 \cdot L^2 - a^2)$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{3}{16} \cdot F \cdot L$	$\bar{V}_{ab} = \frac{5 \cdot F}{16}$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{11 \cdot F}{16}$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{1}{3} \cdot F \cdot L$	$\bar{V}_{ab} = \frac{2 \cdot F}{3}$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{4 \cdot F}{3}$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{15}{32} \cdot F \cdot L$	$\bar{V}_{ab} = \frac{33 \cdot F}{32}$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{63 \cdot F}{32}$

Schéma	Primární moment $\bar{M}$	Reakce $\bar{V}_{ab}=\bar{R}_a; \bar{V}_{ba}=\bar{R}_b$
	$\bar{M}_{ba} = -\frac{3}{2} \cdot F \cdot a \cdot \frac{L-a}{L}$	$\bar{V}_{ab} = \frac{F}{2 \cdot L^2} \cdot (2 \cdot L^2 - 3 \cdot a \cdot L + 3 \cdot a^2)$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{F}{2 \cdot L^2} \cdot (2 \cdot L^2 + 3 \cdot a \cdot L - 3 \cdot a^2)$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{g \cdot a^2}{8 \cdot L^2} \cdot (2 \cdot L^2 - a^2)$	$\bar{V}_{ab} = \frac{g \cdot a}{8 \cdot L^3} \cdot [2 \cdot L^2 \cdot (a+4 \cdot b) + a^3]$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{g \cdot a^2}{8 \cdot L^3} \cdot (6 \cdot L^2 - a^2)$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{g \cdot b^2}{8 \cdot L^2} \cdot (L+a)^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{g \cdot b^3}{8 \cdot L^3} \cdot (3 \cdot L+a)$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{g \cdot b}{8 \cdot L^3} \cdot [4 \cdot L \cdot (2 \cdot L^2 - b^2) + b^3]$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{g \cdot a \cdot c}{8 \cdot L^2} \cdot [4 \cdot (L^2 - a^2) - c^2]$	$\bar{V}_{ab} = \frac{g \cdot c}{8 \cdot L^3} \cdot [4 \cdot b^2 \cdot (2 \cdot L+a) + a \cdot c^2]$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{g \cdot a \cdot c}{8 \cdot L^3} \cdot [8 \cdot L^2 + 4 \cdot b \cdot (L+a) - c^2]$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{1}{8} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{3}{8} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{5}{8} \cdot g \cdot L$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{1}{15} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{1}{10} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{2}{5} \cdot g \cdot L$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{7}{120} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{11}{40} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{9}{40} \cdot g \cdot L$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{5}{64} \cdot g \cdot L^2$	$\bar{V}_{ab} = \frac{11}{64} \cdot g \cdot L$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{21}{64} \cdot g \cdot L$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{M}{2 \cdot L^2} \cdot (L^2 - 3 \cdot a^2)$	$\bar{V}_{ab} = \frac{-3 \cdot M}{2 \cdot L^3} \cdot (L^2 - a^2)$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{3 \cdot M}{2 \cdot L^3} \cdot (L^2 - a^2)$
	$\bar{M}_{ba} = \frac{M}{2}$	$\bar{V}_{ab} = \frac{-3 \cdot M}{2 \cdot L}$ $\bar{V}_{ba} = -\frac{3 \cdot M}{2 \cdot L}$

Tabulky 4.1–4.4 byly převzaty z [10], upraveny a zkráceny pro účely této publikace.

4.1 HODNOTY INTEGRÁLŮ  $\bar{\delta} = \int M \cdot \bar{M} \cdot dl$  U PRUTŮ KONSTANTNÍHO PRŮŘEZU

M	$\bar{M}$	$\bar{M}_a$  $\bar{M}_a$	$\bar{M}_a$  $\bar{M}_a$	$\bar{M}_a$  $\bar{M}_b$
	$\frac{1}{2} \cdot M_c \cdot \bar{M}_a \cdot L$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot M_a \cdot (2 \cdot \bar{M}_a + \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot M_b \cdot (\bar{M}_a + 2 \cdot \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{1}{2} \cdot (M_a + M_b) \cdot \bar{M}_a \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot (2 \cdot M_a + M_b) \cdot \bar{M}_a \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot [\bar{M}_a \cdot (2 \cdot M_a + M_b) + \bar{M}_b \cdot (M_a + 2 \cdot M_b)] \cdot L$	
	$\frac{1}{2} \cdot (M_a - M_b) \cdot \bar{M}_a \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot (2 \cdot M_a - M_b) \cdot \bar{M}_a \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot [\bar{M}_a \cdot (2 \cdot M_a - M_b) + \bar{M}_b \cdot (M_a - 2 \cdot M_b)] \cdot L$	
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M}_a \cdot M_c \cdot L$	$\frac{1}{6} \cdot \bar{M}_a \cdot M_c \cdot (L + L_2)$	$\frac{1}{6} \cdot [\bar{M}_a \cdot (3 \cdot L + L_2) + \bar{M}_b \cdot (L + L_1)] \cdot M_c$	
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M}_a \cdot M_c \cdot (L - L_2^2)$	$\frac{1}{6L} \cdot \bar{M}_a \cdot M_c \cdot (L^2 - 3 \cdot L_2^2)$	$\frac{M_c}{6L} \cdot [\bar{M}_b \cdot (3 \cdot L_1^2 - L^2) - \bar{M}_a \cdot (3 \cdot L_2^2 - L^2)]$	
	$\bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{2} \cdot M_a \cdot (\bar{M}_a + \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{2}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_c \cdot L$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_c \cdot L$	$\frac{1}{3} \cdot M_c \cdot (\bar{M}_a + \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{4} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot M_a \cdot (3 \cdot \bar{M}_a + \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot M_b \cdot (\bar{M}_a + 3 \cdot \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{2}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$	$\frac{5}{12} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot M_a \cdot (5 \cdot \bar{M}_a + 3 \cdot \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{2}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{4} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot M_b \cdot (3 \cdot \bar{M}_a + 5 \cdot \bar{M}_b) \cdot L$	
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L_1$	$\frac{1}{6} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot \frac{L_1}{L} \cdot (3 \cdot L - L_1)$	$\frac{M_a}{6} \cdot \frac{L_1}{L} \cdot [\bar{M}_a \cdot (3 \cdot L - L_1) - \bar{M}_b \cdot L_1]$	
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L_2$	$\frac{1}{6} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot \frac{L_1^2}{L}$	$\frac{M_b}{6} \cdot \frac{L_2}{L} \cdot [\bar{M}_b \cdot (3 \cdot L - L_2) - \bar{M}_a \cdot L_2]$	

### 4.1 HODNOTY INTEGRÁLŮ $\bar{\delta} = \int M \cdot \bar{M} \cdot dl$ U PRUTŮ KONSTANTNÍHO PRŮŘEZU

Pro zjednodušenou metodu Vereščaginova pravidla

	$\frac{1}{6} \cdot M_a \cdot \bar{M}_c \cdot (L + X_2)$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M}_c \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{4} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$
	$\frac{1}{6} \cdot M_b \cdot \bar{M}_c \cdot (L + X_1)$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M}_c \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c}{6} \cdot [M_a \cdot (L + X_2) + M_b \cdot (L + X_1)]$	$\frac{1}{3} \cdot (M_a + M_b) \cdot \bar{M}_c \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot (3 \cdot M_a + M_b) \cdot \bar{M}_a \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c}{6} \cdot [M_a \cdot (L + X_2) - M_b \cdot (L + X_1)]$	$\frac{1}{3} \cdot (M_a - M_b) \cdot \bar{M}_c \cdot L$	$\frac{1}{12} \cdot (3 \cdot M_a - M_b) \cdot \bar{M}_a \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_c \cdot L}{6 \cdot L_2 \cdot X_1} \cdot [2 \cdot L_2 \cdot X_1 - (L_2 - X_2)^2]$ pro $L_1 < X_1$ $\frac{\bar{M}_c \cdot M_c \cdot L}{6 \cdot L_1 \cdot X_2} \cdot [2 \cdot L_1 \cdot X_2 - (X_2 - L_2)^2]$ pro $L_1 > X_1$	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_c}{3 \cdot L} \cdot (L^2 + L_1 \cdot L_2)$	$\frac{\bar{M}_a \cdot M_c}{12 \cdot L} \cdot (3 \cdot L \cdot L_2 + L_1^2)$
	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_c}{6} \cdot (L + X_1 - \frac{3 \cdot L_2^2}{X_2})$ pro $L_1 > X_1$ $-\frac{\bar{M}_c \cdot M_c}{6} \cdot (L + X_2 - \frac{3 \cdot L_2^2}{X_1})$ pro $L_1 < X_1$	$-\frac{\bar{M}_c \cdot M_c}{3 \cdot L} \cdot (L^3 - 6 \cdot L \cdot L_1^2 + 4 \cdot L_1^3)$	$\frac{\bar{M}_a \cdot M_c}{12 \cdot L^2} \cdot (L^3 - 4 \cdot L_2^3)$
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M}_c \cdot M_a \cdot L$	$\frac{2}{3} \cdot \bar{M}_c \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_c}{3 \cdot L} \cdot (L^2 + X_1 \cdot X_2)$	$\frac{8}{15} \cdot \bar{M}_c \cdot M_c \cdot L$	$\frac{1}{5} \cdot \bar{M}_a \cdot M_c \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_a}{12 \cdot L} \cdot (3 \cdot L \cdot X_2 + X_1^2)$	$\frac{1}{5} \cdot \bar{M}_c \cdot M_a \cdot L$	$\frac{1}{5} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_b}{12 \cdot L} \cdot (3 \cdot L \cdot X_1 + X_2^2)$	$\frac{1}{5} \cdot \bar{M}_c \cdot M_b \cdot L$	$\frac{1}{30} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_a}{12 \cdot L} \cdot (5 \cdot L^2 - X_1 \cdot L - X_1^2)$	$\frac{7}{15} \cdot \bar{M}_c \cdot M_a \cdot L$	$\frac{3}{10} \cdot \bar{M}_a \cdot M_a \cdot L$
	$\frac{\bar{M}_c \cdot M_b}{12 \cdot L} \cdot (5 \cdot L^2 - X_2 \cdot L - X_2^2)$	$\frac{7}{15} \cdot \bar{M}_c \cdot M_b \cdot L$	$\frac{2}{15} \cdot \bar{M}_a \cdot M_b \cdot L$

Tabulky 4.1–4.4 byly převzaty z [10], upraveny a zkráceny pro účely této publikace.

## 4.6 PEVNOSTNÍ TŘÍDY BETONŮ A JEJICH CHARAKTERISTIKY

Uvedené charakteristiky převzaty z normy ČSN EN 1992-1-1

Charakteristika betonu	Třída betonu												Vztah		
	C 12/15	C 16/20	C 20/20	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60	C 55/67	C 60/75	C 70/85		C 80/95	C 90/105
$f_{ck}$ [MPa]	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	$f_{ck} = f_{ck,exp}$
$f_{ck,cube}$ [MPa]	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	
$f_{cm}$ [MPa]	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	$f_{cm} = f_{cm} + 8$
$f_{ctm}$ [MPa]	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{(2/3)} \leq C 50/60$ $f_{ctm} = 2,12 \ln [1 + (f_{cm}/10)] > C 50/60$
$f_{ctk,0,05}$ [MPa]	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	$f_{ctk,0,95} = 0,7 f_{ctm}$
$f_{ctk,0,95}$ [MPa]	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	$f_{ctk,0,95} = 1,3 f_{ctm}$
$E_{cm}$ [GPa]	27	29	30	31	32	34	35	36	37	38	39	41	42	44	$E_{cm} = 22 (f_{cm}/10)^{0,3}$
$\varepsilon_{c1}$ [%]	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,25	2,30	2,40	2,45	2,50	2,60	2,70	2,80	2,80	$\varepsilon_{c1} = 0,70 f_{cm,0,31} < 2,80$
$\varepsilon_{cu1}$ [%]					3,50					3,20	3,00	2,80	2,80	2,80	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu1} = 2,80 + 27[(98 - f_{cm})/100]^4$
$\varepsilon_{c2}$ [%]					2,00					2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{c2} = 2,00 + 0,085[(f_{ck} - 50)/40]^{0,55}$
$\varepsilon_{cu2}$ [%]					3,50					3,10	2,90	2,70	2,60	2,60	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu2} = 2,60 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$
$n$					2,00					1,75	1,60	1,45	1,40	1,40	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $n = 1,40 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4$
$\varepsilon_{c3}$ [%]					1,75					1,80	1,90	2,00	2,20	2,30	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{c3} = 1,75 + 0,55[(f_{ck} - 50)/40]$
$\varepsilon_{cu3}$ [%]					3,50					3,10	2,90	2,70	2,60	2,60	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu3} = 2,60 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$

## 4.7 CHARAKTERISTIKY PŘEDPÍNACÍ VÝZTUŽE DRAHTWERK KOLN

Uvedené průřezové a materiálové charakteristiky převzaty od Drahtwerk Koln GmbH ([www.dwk-koeln.de](http://www.dwk-koeln.de))

### Předpínací výztuž, 7–drátové lano

#### Mechanické vlastnosti

Relaxace:  $\leq 2,5\%$  po 1000 hodinách při zatížení  $0,70 \times R_m$  a  $20^\circ\text{C}$

Modul pružnosti:  $\approx 195 \text{ GPa}$

#### Pevnost v tahu 1860 MPa (St 1660/1860)

Nominální průměr		Nominální plocha		Nominální hmotnost		Mez pevnosti $F_m \geq$		Mez kluzu $F_{p0,1} \geq$	
inch	mm	mm <sup>2</sup>	inch <sup>2</sup>	kg/1000m	m/1000kg	kN	1000 lbs	kN	1000 lbs
1/4	6,9	29,0	0,045	226,5	4415	53,9	12,12	47,4	10,66
5/16	8,0	38,0	0,059	296,8	3369	70,7	15,90	62,2	13,99
3/8	9,3	52,0	0,081	406,1	2462	96,7	21,75	85,1	19,14
7/16	11,0	70,0	0,108	546,7	1829	130,0	29,24	114,0	25,64
1/2	12,5	93,0	0,144	726,3	1377	173,0	38,91	152,0	34,19
1/2S	12,9	100,0	0,155	781,0	1280	186,0	41,84	164,0	36,89
0,6	15,3	140,0	0,217	1093,0	915	260,0	58,48	229,0	51,51
0,6S	15,7	150,0	0,232	1172,0	853	279,0	62,76	246,0	55,34

#### Pevnost v tahu 1770 MPa (St 1570/1770)

Nominální průměr		Nominální plocha		Nominální hmotnost		Mez pevnosti $F_m \geq$		Mez kluzu $F_{p0,1} \geq$	
inch	mm	mm <sup>2</sup>	inch <sup>2</sup>	kg/1000m	m/1000kg	kN	1000 lbs	kN	1000 lbs
1/4	6,9	29,0	0,045	226,5	4415	51,3	11,54	45,1	10,14
3/8	9,3	52,0	0,081	406,1	2462	92,0	20,69	81,0	18,22
7/16	11,0	70,0	0,108	546,7	1829	124,0	27,89	109,0	24,52
1/2	12,5	93,0	0,144	726,3	1377	165,0	37,12	145,0	32,62
1/2S	12,9	100,0	0,155	781,0	1280	177,0	39,81	156,0	35,09
0,6	15,3	140,0	0,217	1093,0	915	248,0	55,79	218,0	49,04
0,6S	15,7	150,0	0,232	1172,0	853	266,0	59,83	234,0	52,64
0,7	18,0	200,0	0,309	1562,0	640	354,0	79,63	312,0	70,18

## 4.8 UKÁZKA SORTIMENTU SPOLEČNOSTI VSL

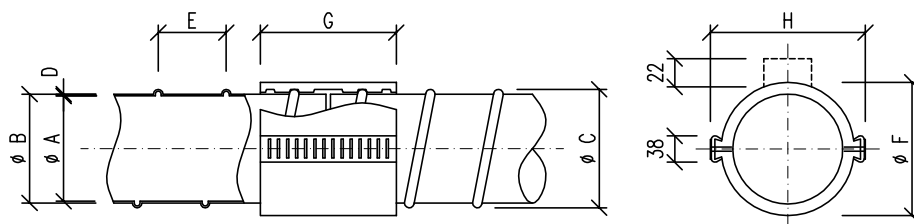
Kompletní sortiment společnosti VSL je možné získat na: [www.vsl.cz](http://www.vsl.cz)

### 4.8.1 Charakteristické vlastnosti předpínacích výztuže dodávané firmou VSL

Pramenec typ	13mm (0,5")		15mm (0,6")	
	N	S	N	S
Nominální průměr [mm]	12,5	12,9	15,2	15,7
Nominální průřez [mm <sup>2</sup> ]	93	100	140	150
Nominální hmotost [kg/m]	0,730	0,785	1,100	1,180
Mez kluzu [MPa]	1670	1670	1670	1670
Zaručená pevnost [MPa]	1860	1860	1860	1860
Charakteristická pevnost [kN]	173,0	186,0	260,4	279,0
Modul pružnosti [GPa]	cca 195			
Relaxace po 1000h při 20°C a 0,7xPn [%]	max 2,5			

Kabely jsou dodávané v počtech 5–1 až 5–55 lan a 6–1 až 6–37 lan

### 4.8.2 Kabelové kanálky



Kabelové kanálky PT+ předpínacích kabelů se soudržností dobávané VSL

Typ kabelového kanálku	Velikost kabelu		Rozměry							
	0,5"	0,6"	A	B	C	D	E	F	G	H
59	5–12	6–7	58	63	73	2,5	42,0	82	108	106
76	5–19	6–12	76	81	91	2,5	52,5	100	116	124
100	5–31	6–19/22	100	106	116	3,0	60,0	123	126	147
130	5–37	6–31	130	136	146	3,0	50,8	156	139	177

Rozměry jsou v mm

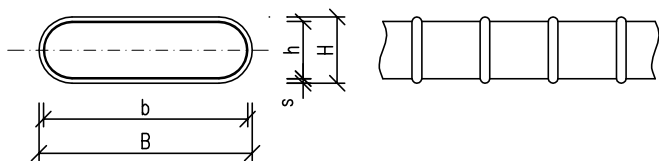
Doporučené rozměry ochranných obalů vnějších kabelů

Typ kabelu	5–3	5–4	5–7	5–12	5–19	5–22	5–31	5–37	5–43	5–55
Rozměry chráničky	40/2,3	50/2,9	63/3,6	75/4,3	90/5,1	90/5,1	110/6,3	125/7,1	140/8,0	160/9,1
ø/tl. stěny	50/2,9	63/3,6	75/4,3	90/5,1	110/6,3	110/6,3	125/7,1	140/8,0	160/9,1	
Typ kabelu	6–3	6–4	6–7	6–12	6–19	6–22	6–31	6–37		
Rozměry chráničky	50/2,9	63/3,6	63/3,6	90/5,1	110/6,3	125/7,1	140/8,0	160/9,1		
ø/tl. stěny	63/3,6	90/5,1	90/5,1	110/6,3	125/7,1	140/8,0	160/9,1			

Rozměry jsou v mm



Ploché kabelové kanálky dobávané VSL

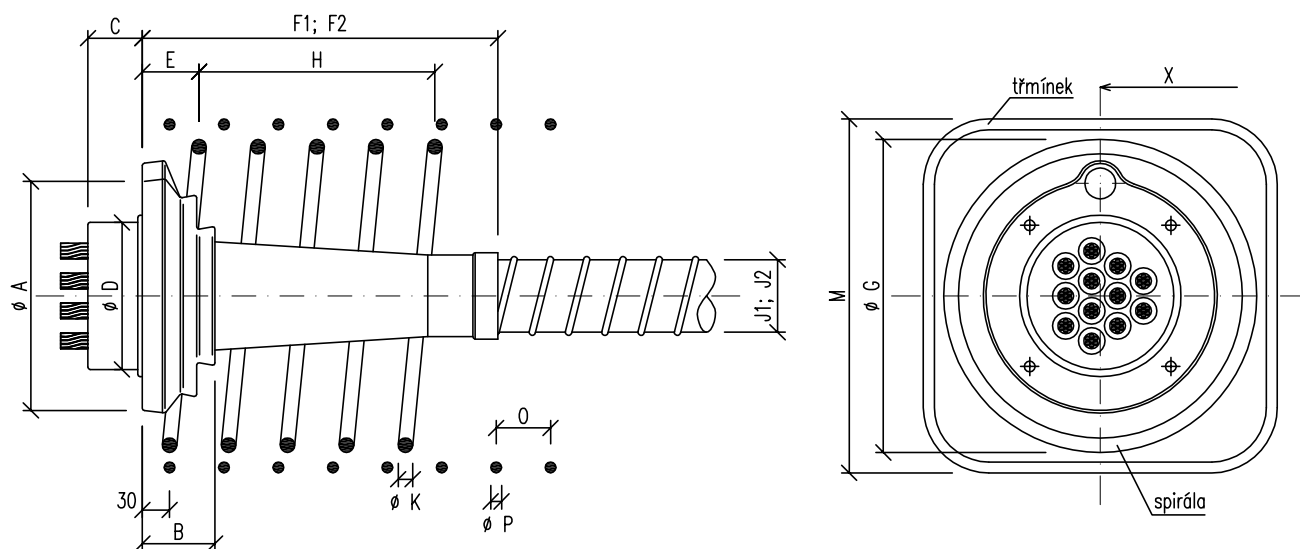


Typ kabelového kanálku	Kabelová jednotka	H	h	B	b	s
Ocelový kanálek	5-4	21	18	75	72	0,3
	6-4					
PT+ plastový kanálek	5-4	35	21	86	72	2,0
	6-4					

Rozměry jsou v mm

### 4.8.3 Aktivní kotvení

- Vícelanová kotva VSL typ CS

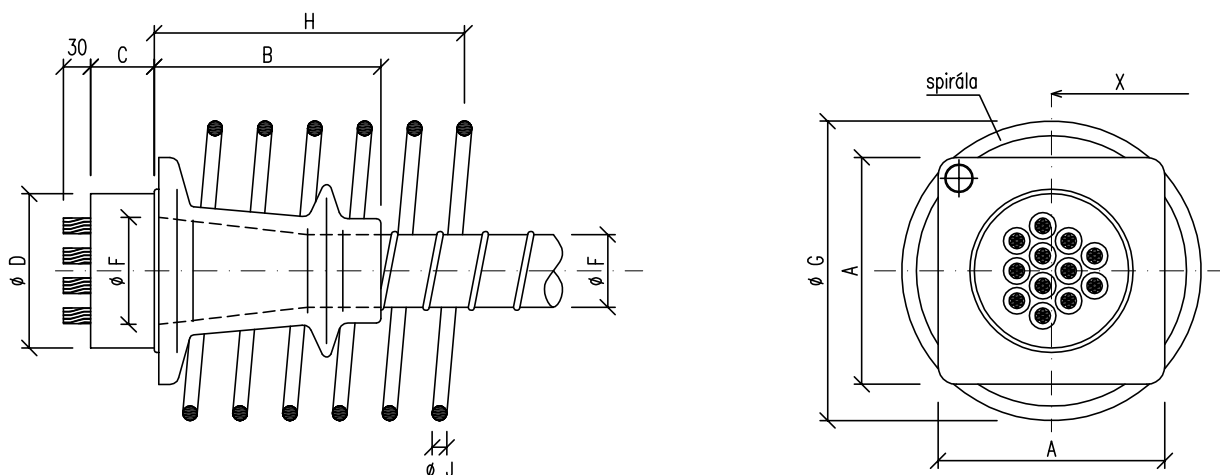


Předpínací jednotka	Rozměry																	
	A	B	C	D	E	F1	F2	G	H	J1	J2	K	n	M	O	P	t	X
6-7	222	60	50	143	50	400	535	250	220	60/67	59/73	12	5	295	55	12	5	300
6-12	258	80	60	178	50	500	638	325	330	80/87	73/91	16	7	370	55	12	7	390
6-19	300	90	70	210	30	540	660	420	400	100/107	100/116	16	9	470	50	16	9	490
6-27	360	110	70	256	30	660	810	520	440	120/127	115/131	18	9	575	55	18	9	590
6-31	390	122	70	274	30	620	740	550	480	130/137	130/146	20	9	610	60	18	9	630
6-37	420	130	82	300	30	805	925	610	540	140/150	130/146	22	10	665	60	18	10	685

**Legenda:**

- J1 vnitřní/vnější průměr ocelového kabelového kanálku
- J2 vnitřní/vnější průměr kabelového kanálku PT+
- n počet závitů spirály
- X osová vzdálenost kotev
- t počet třmíneků
- rozměry jsou v mm

• Vícelanová kotva VSL typ EC

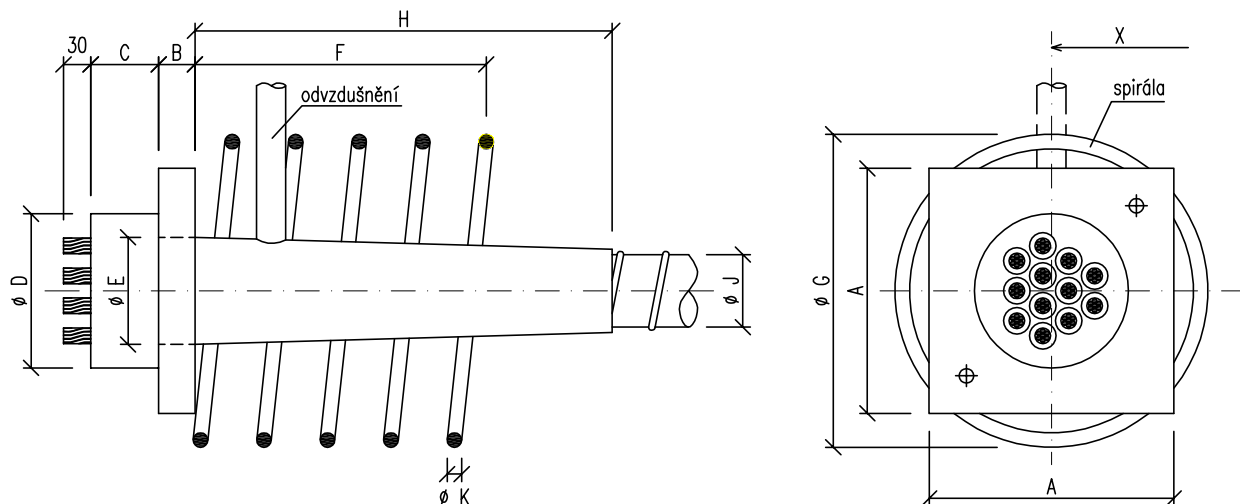


Předpínací jednotka		Rozměry										
		A	B	C	D	E	F	G	H	J	n	X
pramence 0,5" ( $\phi 12,5$ ; 12,9mm)	5-3	120	130	50	90	50	35/40	145	145	10	3	145
	5-4	135	125	50	95	55	40/45	160	145	10	3	160
	5-7	165	155	55	110	74	50/57	200	210	12	4	200
	5-12	215	215	60	150	104	65/72	270	285	14	5	270
	5-19	270	285	75	180	135	80/87	350	345	16	6	350
	5-22	290	335	85	190	150	85/92	370	380	18	6	370
	5-31	340	365	95	230	172	100/107	440	440	20	7	440
	5-37	370	360	105	240	188	120/127	480	475	22	7	480
	5-42	395	380	110	260	201	130/137	510	540	22	8	510
	5-55	430	430	130	290	230	140/150	550	605	22	9	550
pramence 0,6" ( $\phi 15,2$ ; 15,7mm)	6-3	135	125	50	95	55	40/45	160	145	10	3	160
	6-4	150	155	55	110	65	45/50	200	210	12	4	200
	6-7	190	170	60	135	84	60/67	250	260	14	5	250
	6-12	250	245	75	170	118	80/87	330	345	16	6	330
	6-19	310	305	95	200	150	95/102	400	440	18	7	400
	6-22	340	365	100	220	178	110/117	430	480	18	8	430
	6-31	390	350	120	260	192	130/137	510	540	22	8	430
	6-37	430	450	135	280	215	140/150	550	605	22	9	550

Legenda:

- X osová vzdálenost kotev
- n počet závitů spirály
- rozměry jsou v mm

• Vícelanová kotva VSL typ E

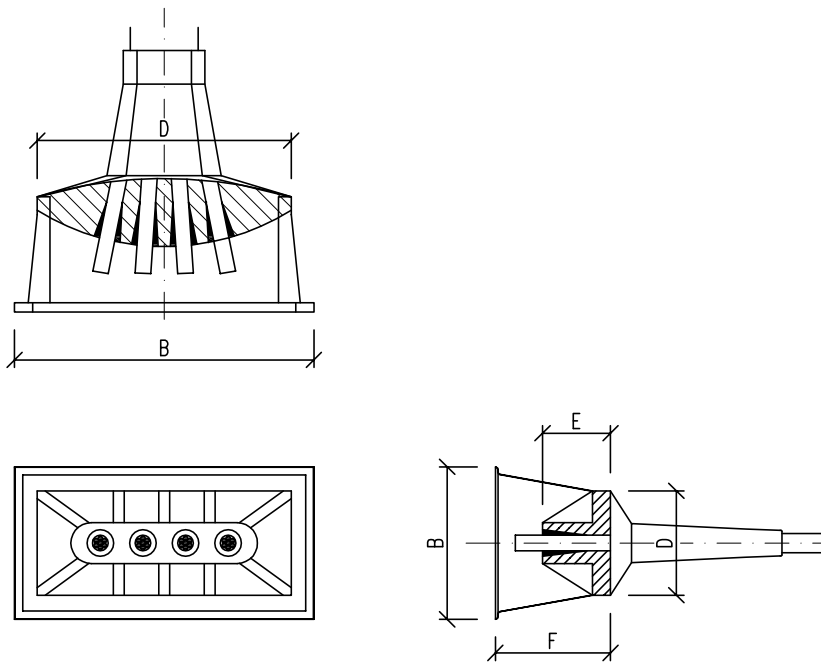


Předpínací jednotka		Rozměry											
		A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	n	X
pramence 0,5" ( $\phi$ 12,5; 12,9mm)	5-1	70	10	45	42	15	60	80	90	25/30	8	2,5	80
	5-3	120	15	50	90	50	175	145	135	40/45	10	3,5	145
	5-4	140	20	50	95	55	170	170	150	45/50	10	3,5	170
	5-7	180	25	55	110	74	165	230	200	55/60	12	4,5	230
	5-12	250	35	60	150	104	205	310	275	65/72	14	5,5	310
	5-19	300	45	75	180	135	355	395	330	80/87	16	6,5	395
	5-22	330	50	85	190	150	430	430	360	85/92	18	6,5	500
	5-31	400	60	95	230	172	490	500	420	100/107	18	7,5	500
	5-37	420	65	105	240	188	505	550	455	120/127	20	7,5	550
	5-42	450	60	110	260	201	530	590	490	130/137	22	7,5	590
5-55	520	75	130	290	230	605	680	560	140/150	22	8,5	680	
pramence 0,6" ( $\phi$ 15,2; 15,7mm)	6-1	80	10	50	53	18	60	100	100	30/35	8	2,5	100
	6-2	120	15	50	90	50	175	145	150	40/45	10	3,5	145
	6-3	150	25	50	95	56	165	185	150	45/50	10	3,5	185
	6-4	170	25	55	110	65	165	215	200	50/55	12	4,5	215
	6-7	220	35	60	135	84	155	290	250	60/67	14	5,5	290
	6-12	300	45	75	170	118	325	380	330	80/87	16	6,5	380
	6-19	370	55	95	200	150	475	480	420	95/102	18	7,5	480
	6-22	400	60	100	220	172	590	520	420	110/117	18	7,5	520
	6-31	470	75	120	260	192	615	620	520	130/137	20	8,5	660
	6-37	520	80	135	280	215	750	680	585	140/150	22	9,5	680

Legenda:

- X osová vzdálenost kotev
- n počet závitů spirály
- rozměry jsou v mm

• Plochá vícetanová kotva VSL typ S0

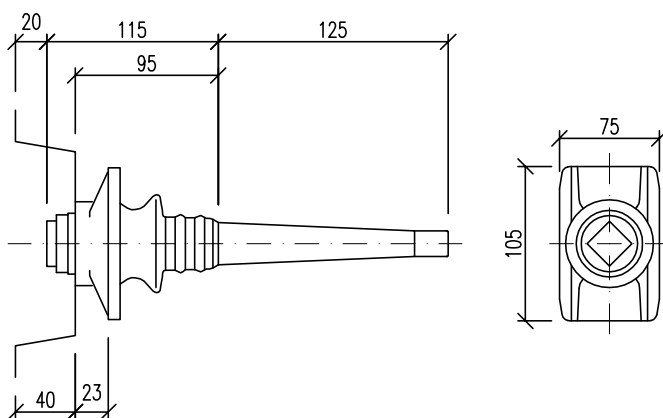


Předpínací jednotka	Rozměry						
	A	B	C	D	E	F	X
SO 5-4	306	144	250	96	65	103	370
SO 6-4	330	168	280	115	75	127	400

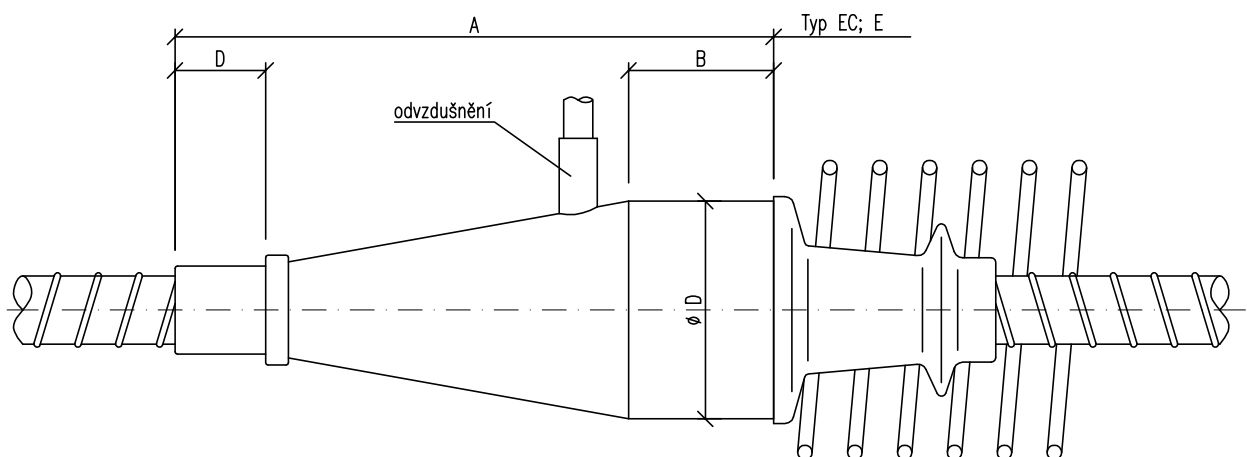
**Legenda:**

- X osová vzdálenost kotev
- rozměry jsou v mm

• Jednolanová kotva VSL typ S-6



• Spojka VSL typ K



Předpínací jednotka		Rozměry			
		A	B	C	D
pramence 0,5" (ø12,5; 12,9mm)	5-3	430	15	40	130
	5-7	550	25	60	170
	5-12	650	35	60	200
	5-19	740	45	80	240
	5-22	830	50	90	260
	5-31	1140	60	90	350
	5-37	1320	65	120	390
	5-42	1290	60	130	395
	5-55	1370	75	150	420

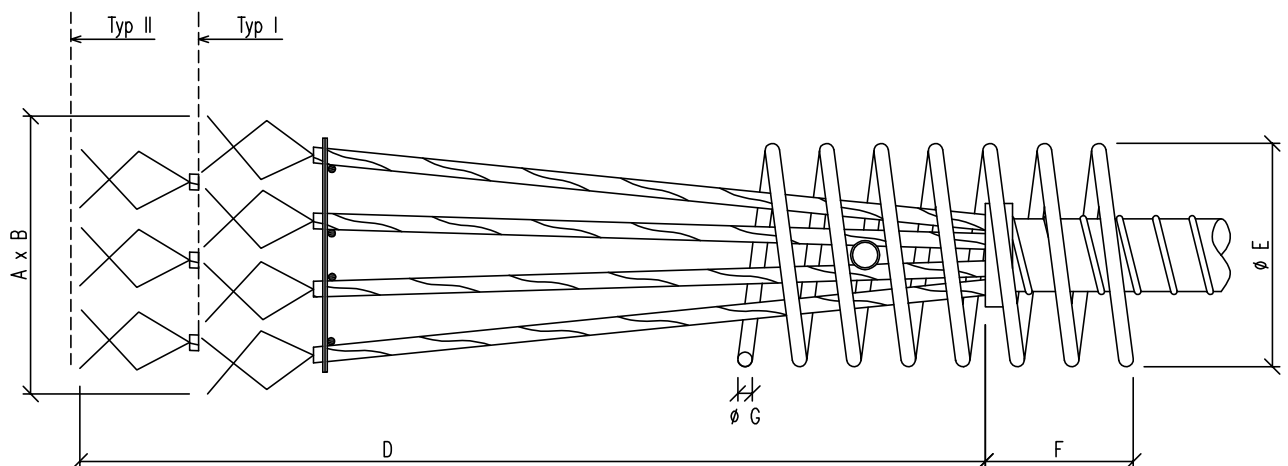
Předpínací jednotka		Rozměry			
		A	B	C	D
pramence 0,6" (ø15,2; 15,7mm)	6-2	380	15	30	140
	6-3	490	25	60	150
	6-4	520	25	60	160
	6-7	630	35	70	190
	6-12	730	45	80	240
	6-19	860	55	90	280
	6-22	930	60	90	310
	6-31	1090	75	130	360
	6-37	1390	80	130	430

Legenda:

- rozměry jsou v mm

#### 4.8.4 Pasivní kotvení

- kotva VSL typ H



Předpínací jednotka		Rozměry								
		Alternativa	Typ	A	B	D	E	F	G	n
pramence 0,5" (Ø12,5; 12,9mm)	5-3	1	I	230	70	930				
	5-4	1	I	310	70	930				
		2	I	150	170	930				
	5-7	1	II	370	70	1280	180	155	12	7
		2	II	170	190	1280	180	155	12	7
	5-12	1	II	350	190	1280	200	155	14	7
		2	I	310	270	1280	200	155	14	7
	5-19	1	II	470	190	1280	230	155	14	7
		2	II	310	390	1280	230	155	14	7
	5-22	1	II	570	190	1280	300	155	16	7
		2	II	390	390	1280	300	155	16	7
	5-31	1	II	670	310	1480	350	155	16	7
		2	II	470	430	1480	350	155	16	7
	5-37	1	II	770	310	1680	350	165	18	7
		2	II	470	550	1680	350	165	18	7
	5-42	1	II	870	350	1680	400	165	18	7
		2	II	670	430	1680	400	165	18	7
		3	II	570	550	1680	400	165	18	7
	5-55	1	II	1170	350	1980	400	185	20	7
		2	II	870	430	1980	400	185	20	7
3		II	570	670	1980	400	185	20	7	

**Legenda:**

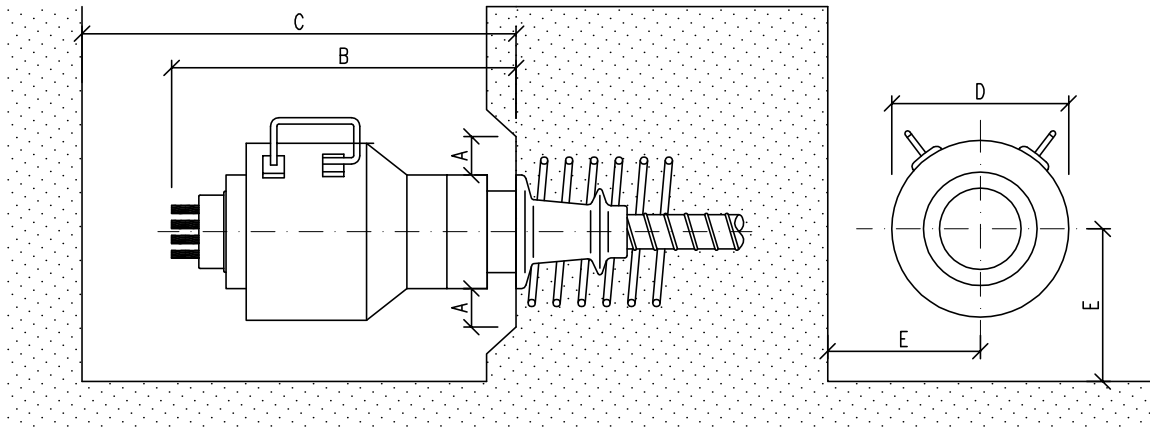
- n počet závitů spirály
- rozměry jsou v mm

Předpínací jednotka		Rozměry								
		Alternativa	Typ	A	B	D	E	F	G	n
pramence 0,6" ( $\phi$ 15,2; 15,7mm)	6-3	1	I	290	90	950				
	6-4	1	I	390	90	950				
		2	I	190	210	950				
	6-7	1	II	450	90	1300	200	155	14	7
		2	II	210	230	1300	200	155	14	7
	6-12	1	II	430	230	1300	230	155	14	7
		2	I	390	330	1300	230	155	14	7
	6-19	1	II	570	230	1300	300	155	16	7
		2	II	390	470	1300	300	155	16	7
	6-22	1	II	690	230	1300	350	155	16	7
		2	II	470	490	1300	350	155	16	7
	6-31	1	II	810	260	1700	400	165	18	7
		2	II	570	510	1700	400	165	18	7
	6-37	1	II	1050	370	2000	400	185	20	7
		2	II	690	510	2000	400	185	20	7

**Legenda:**

- n počet závitů spirály
- rozměry jsou v mm

## 4.8.5 Napínací lisy VSL



Minimální rozměry pro provádění napínání

Typ lisu	Rozměry				
	A	B	C	D	E
ZPE 23FJ	–	300	1200	116	90
ZPE-30	30	600	1100	140	100
ZPE-3	30	550	1000	200	150
ZPE-60	30	650	1100	180	140
ZPE-7A	30	800	1200	300	200
ZPE-12St2	50	700	1300	310	200
ZPE-200	50	1100	2100	330	210

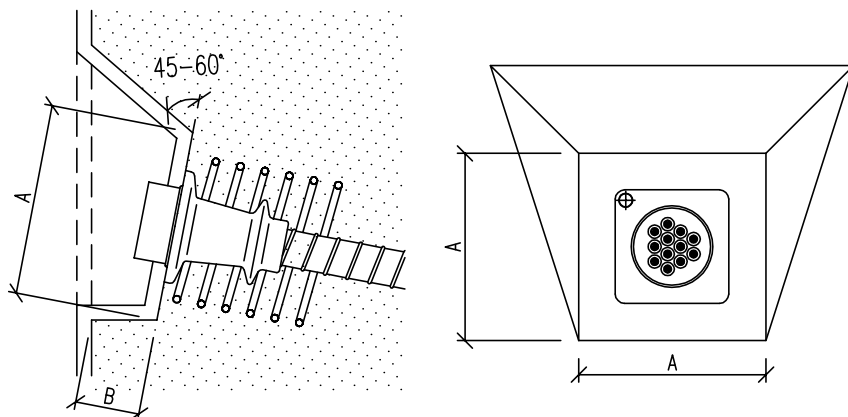
Typ lisu	Rozměry				
	A	B	C	D	E
ZPE-19	50	850	1500	390	250
ZPE-460/31	60	60	1500	485	300
ZPE-500	80	1150	2000	585	330
ZPE-750	80	1350	2300	570	365
ZPE-1000	80	1300	2200	790	450
ZPE-1250	90	1350	2250	660	375

**Legenda:**

– rozměry jsou v mm



## 4.8.6 Výklenky pro aktivní kotvení



kotvy typ E, EC

<b>Typ kabelu</b>	<b>5-1</b>	<b>5-3</b>	<b>5-4</b>	<b>5-7</b>	<b>5-12</b>	<b>5-19</b>	<b>5-22</b>	<b>5-31</b>	<b>-</b>
A	200	240	240	320	400	500	500	500	-
B	110	120	120	120	120	140	150	170	-
<b>Typ kabelu</b>	<b>6-1</b>	<b>6-2</b>	<b>6-3</b>	<b>6-4</b>	<b>6-7</b>	<b>6-12</b>	<b>6-19</b>	<b>6-22</b>	<b>6-31</b>
A	200	240	320	320	400	500	500	500	650
B	110	120	120	120	130	140	170	170	200

kotvy typ CS

<b>Typ kabelu</b>	<b>6-7</b>	<b>6-12</b>	<b>6-19</b>	<b>6-27</b>	<b>6-31</b>	<b>6-37</b>
A	325	360	420	520	550	580
B	Dle použitého krytu kotvy					

**Legenda:**

- rozměry jsou v mm

Veškeré informace jsou zde prezentovány se souhlasem firmy VSL. Tento přehled není kompletní, jsou zde stručně popsány základní systémy pro rychlou orientaci ve cvičení z předmětů týkajících se předpjatého betonu. Veškerý sortiment firmy je volně dostupný na [www stránkách výrobce](http://www.stránkách.výrobce).

## 4.9 UKÁZKA SORTIMENTU SPOLEČNOSTI FREYSSINET

Kompletní sortiment společnosti Freyssinet je možné získat na: [www.freyssinet.cz](http://www.freyssinet.cz)

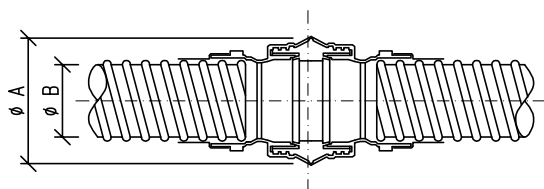
### 4.9.1 Charakteristické vlastnosti předpínací výztuže dodávané firmou Freyssinet

Pramenec typ		Pevnostní třída							
		1770				1860			
Jmenovitý průměr	[mm]	12,5	12,9	15,3	15,9	12,5	12,9	15,3	15,9
Jmenovitá průřezová plocha	[mm <sup>2</sup> ]	93	100	140	150	93	100	140	150
Jmenovitá hmotost	[kg/m]	0,73	0,78	1,09	1,18	0,73	0,78	1,09	1,18
Mez kluzu	[MPa]	165	177	248	265	173	186	260	279
Zaručená mez pevnosti	[MPa]	145	156	218	234	152	164	229	246

Kabely jsou dodávané v počtech 1–55 lan

### 4.9.2 Kabelové kanálky

Kabelové spojka LIASEAL od firmy Freyssinet



Vnější průměr LIASEAL (A)	Vnitřní průměr kanálku (B)
125	65
140	80
155	95

Rozměry jsou v mm

Doporučené rozměry korugované ocelové hadice

Typ kotvy	3C15	4C15	7C15	9C15	12C15	13C15	19C15
Rozměry chráničky ø/tl. stěny	40/2,5	45/2,5	60/2,5	65/2,5	80/2,5	80/2,5	85/2,5
Typ kotvy	22C15	25C15	27CC15	27C15	31C15	37C15	55C15
Rozměry chráničky ø/tl. stěny	105/2,5	110/2,5	110/2,5	115/2,5	120/2,5	130/2,5	160/2,5

Rozměry jsou v mm

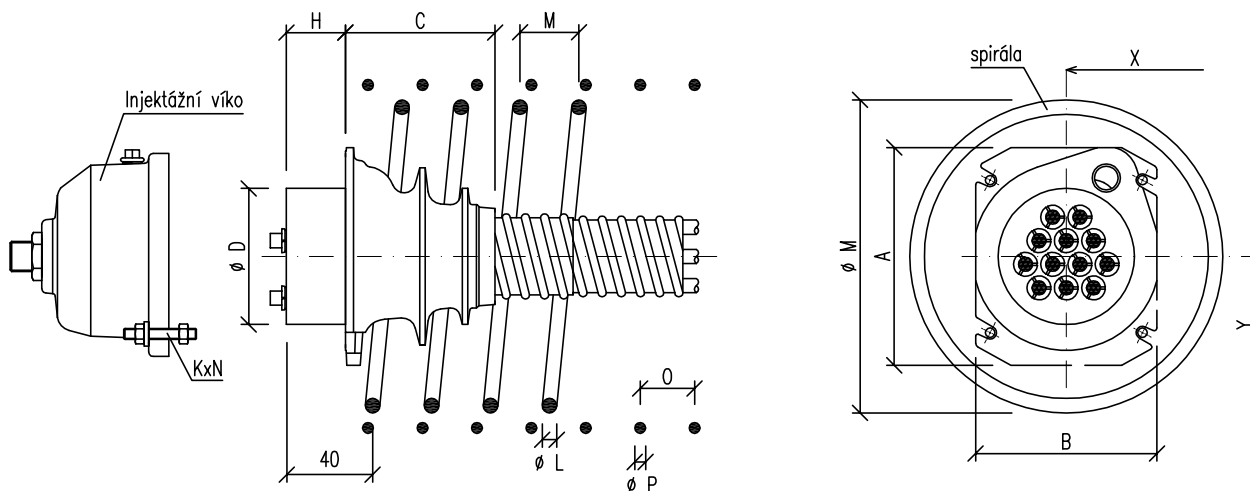
Doporučené rozměry trubky HDPE

Typ kotvy	3C15	4C15	7C15	9C15	12C15	13C15	19C15
Rozměry chráničky ø/tl. stěny	50/3,7 63/4,7	63/4,7 75/5,5	63/4,7 90/6,6	70/5,5 90/6,6	90/6,6 110/5,3	90/6,6 110/5,3	110/5,3 125/6,0
Typ kotvy	22C15	25C15	27CC15	27C15	31C15	37C15	55C15
Rozměry chráničky ø/tl. stěny	110/5,3 125/6,0	125/6,0 140/6,7	125/6,0 140/6,7	125/6,0 140/6,7	140/6,7 160/7,7	140/6,7 160/7,7	200/9,6

Rozměry jsou v mm

### 4.9.3 Aktivní kotvení

- Vícelanová kotva Freyssinet typ C

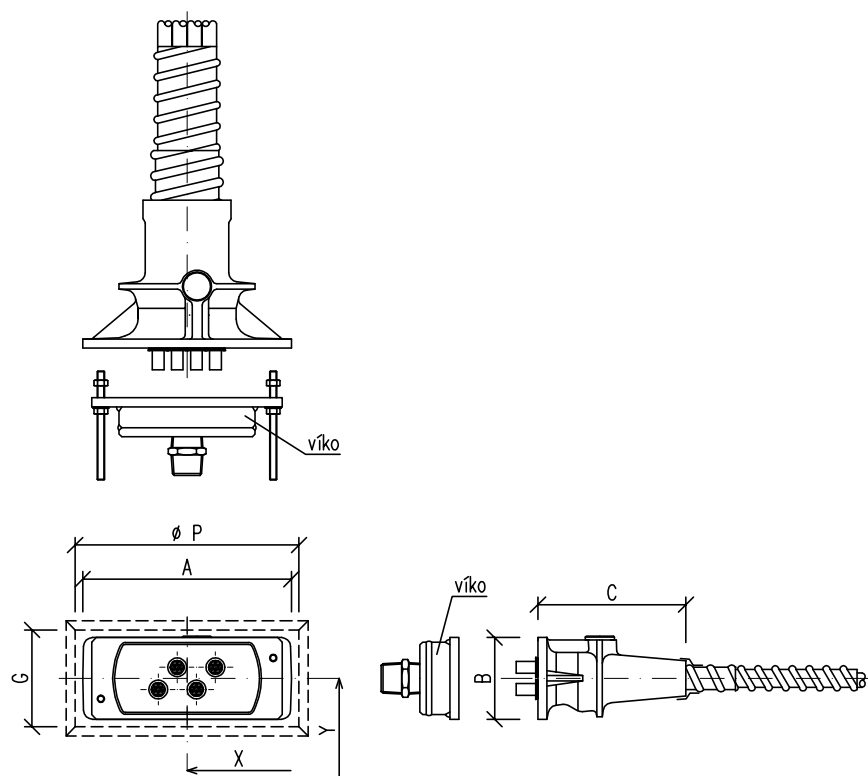


Typ	Rozměry													
	A	B	C	D	H	KxN	L	n	M	O	P	t	X	Y
3C15	150	110	120	85	50	M10x2	8	5	50	110	8	3	180	140
4C15	150	120	125	95	50	M10x2	10	5	60	115	10	3	180	150
7C15	180	150	186	110	55	M12x2	14	6	60	120	10	4	210	180
9C15	225	185	260	150	55	M12x4	14	6	70	125	12	4	255	215
12C15	240	200	165	150	65	M12x4	14	7	70	140	16	4	270	230
13C15	250	210	246	160	70	M12x4	14	7	70	130	16	4	280	240
19C15	300	250	256	185	80	M12x4	16	8	60	180	20	4	330	280
22C15	330	275	430	220	90	M12x4	16	8	70	130	20	5	360	305
25C15	360	300	400	230	95	M16x4	20	7	80	150	20	5	390	330
25CC15	350	290	360	220	95	M16x4	20	7	80	150	20	5	380	320
27C15	350	290	360	220	100	M16x4	20	7	80	160	20	5	280	320
31C15	385	320	346	230	105	M16x4	20	7	80	140	20	6	415	350
37C15	420	350	466	255	110	M16x4	20	7	90	130	25	5	350	380
55C15	510	420	516	300	145	M20x4	25	9	100	200	20	6	540	450

#### Legenda:

- \*C15\* označuje počet lan v kotvě
- KxN typ a počet šroubů k upevnění víka
- n počet závitů spirály
- t počet třmínků
- X,Y osová vzdálenost kotev
- pro  $f_{cm,0} = 24\text{MPa}$  počet třmínků
- rozměry jsou v mm

• Vícelanová plochá kotva Freyssinet typ F

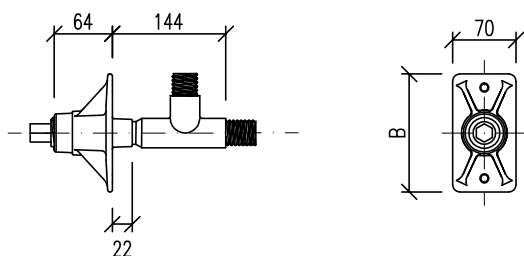


Typ	Rozměry						
	A	B	C	G	H	X	Y
A 3F 13/15	190	85	163	95	200	230	115
A 4F 13/15	230	90	163	100	240	260	120
A 5F 13/15	270	90	163	100	280	300	120

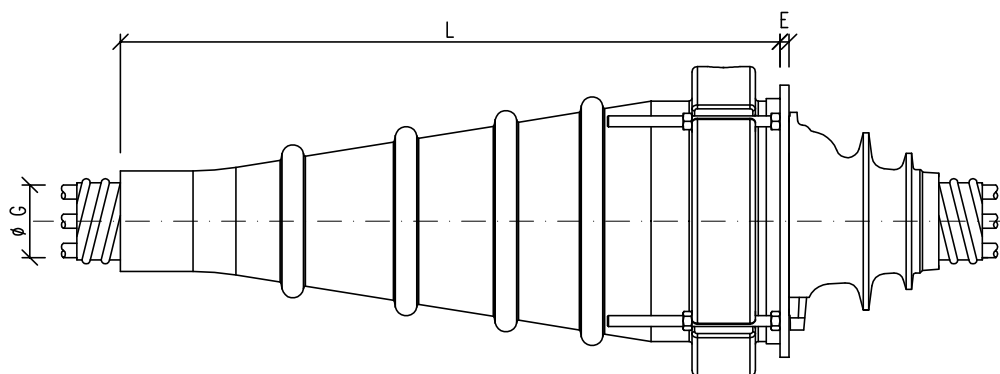
**Legenda:**

- X,Y osová vzdálenost kotev
- rozměry jsou v mm

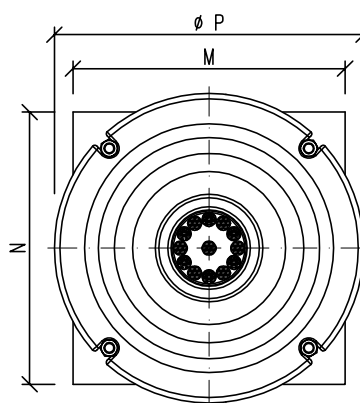
• Jednolanová kotva Freyssinet typ F



• Spojka Freyssinet typ CC



Typ	Rozměry					
	E	L	M	N	P	G
CC 3C15	10	570	220	220	210	40
CC 4C15	10	600	240	240	220	45
CC 7C15	10	670	260	260	230	60
CC 9C15	10	750	290	290	270	65
CC 12C15	10	725	300	300	280	80
CC 13C15	10	770	290	290	275	80
CC 19C15	12	825	320	320	305	95
CC 22C15	10	885	390	390	365	110
CC 25C15	5	900	360	360	340	110
CC 27C15	10	995	390	390	365	110
CC 31C15	5	1110	420	420	400	120

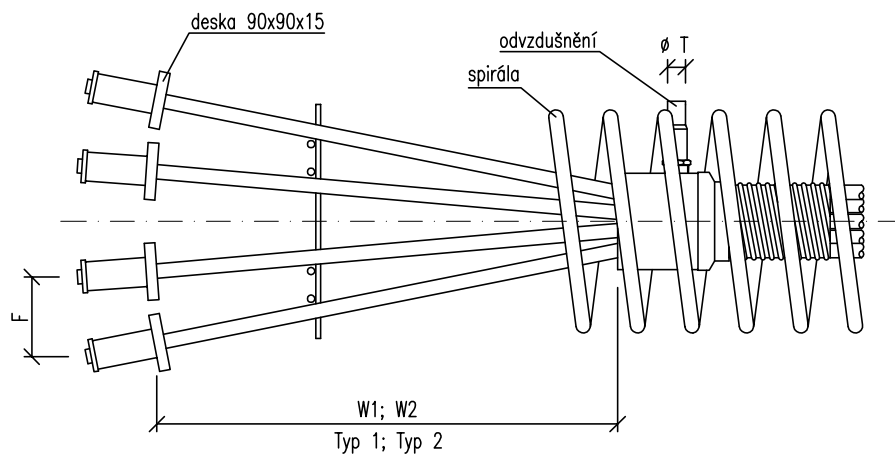


**Legenda:**

– rozměry jsou v mm

#### 4.9.4 Pasivní kotvení

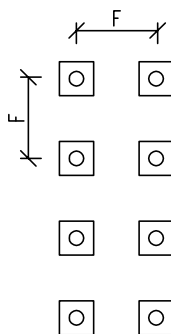
- Kotva Freyssinet typ N



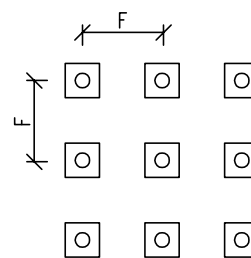
Typ	Rozměry			
	F	T	W1	W2
3C15	150	G 1/2"	300	300
4C15	150	G 1/2"	350	350
7C15	150	G 1/2"	500	400
9C15	150	G 1/2"	600	400
12C15	150	G 1/2"	900	500
13C15	150	G 1/2"	1200	500
19C15	150	G 1"	1500	650
22C15	150	G 1"	1800	750
25C15	150	G 1"	2000	850
27C15	150	G 1"	2000	1000
31C15	150	G 1"	2200	1100
37C15	150	G 1 1/2"	2500	1280
55C15	150	G 1 1/2"	2800	1400

Rozměry jsou v mm

Typ 1

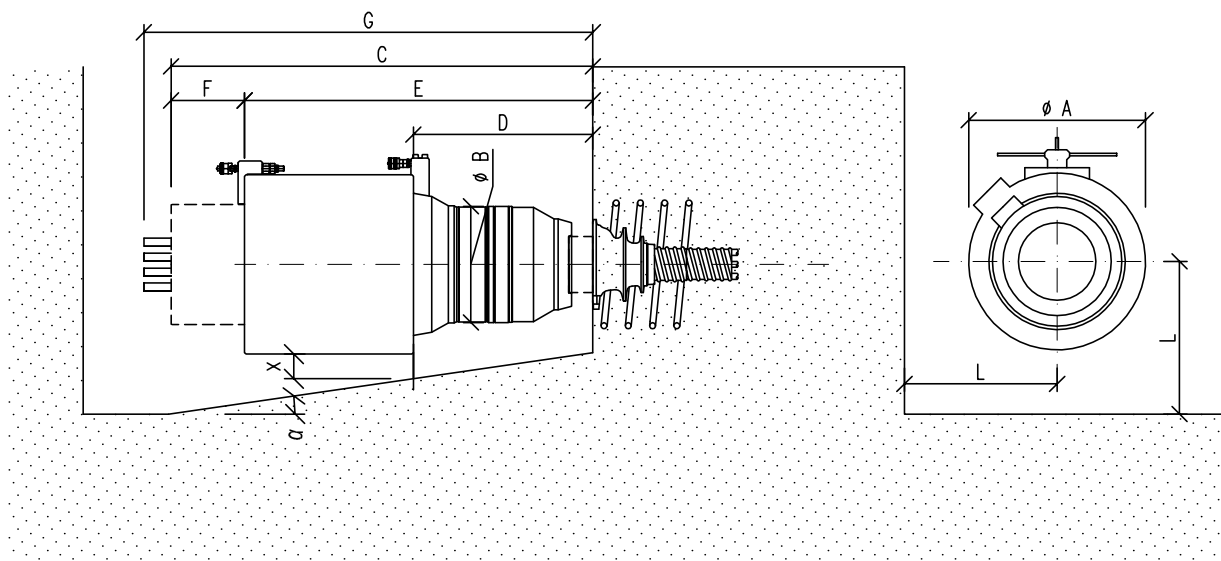


Typ 2



## 4.9.5 Napínací lisy

- Vícelanové napínací lisy Freyssinet



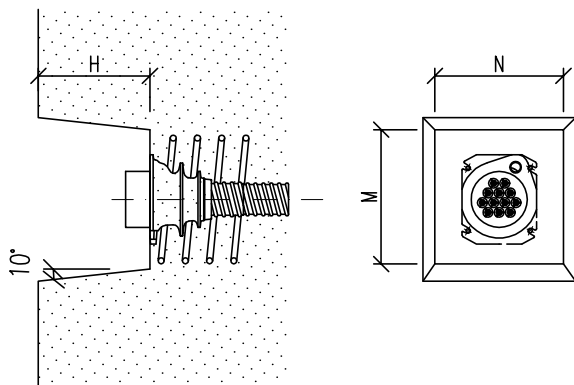
Minimální rozměry pro provádění napínání

Typ lisy	Počet lan	Rozměry								
		A	B	C	D	E	F	G	L	$\alpha \approx 50; \alpha$
CC 350	7–13	350	–	1324–1355	–	1074–1105	250	660–700	120–150	–
CC 500	7–19	438	–	1321–1350	–	1071–1100	250	674–703	120–170	–
CC 1000	19–37	593	–	1396–1430	–	1146–1180	250	709–743	170–240	–
CC 1500	37–55	722	–	1800–2236	–	1550–1986	250	700–770	240–280	–
C350F	7–13	355	263	1374–1415	675–741	1124–1175	250	1180–1130	120–150	7°–8°
C500F	7–19	432	320	1482–1538	668–724	1182–1238	300	1050–1100	120–170	8°–13°
C1000F	19–37	582	417	1552–1603	718–774	1252–1303	300	1080–1130	170–240	8°–13°
C1500F	31–55	707	512	2375–2423	1144–1076	1875–1938	500	1200–1270	140–280	7°–10°
K100C	3, 4	290	220	913–1154	256	713	200	820	100	19°
K200C	7	350	263	1154	435	954	200	1060	120	13°
K350C	9–13	440	263	1153–1168	324–339	903–918	250	1005–1020	150	16°–17°
K500C	19–22	508	320	1333–1343	341–361	1083–1093	250	1136–1146	170	21°–23°
K700C	25–31	609	419	1465–1475	420–474	1215–1225	250	1320–1330	210	16°–18°
K100C	37	720	492	1497–1548	434–523	1247–1298	250	1350–1400	240	20°–21°
K100F	13,19	565	364	1433–1462	551–580	1183–1210	250	810–840	150–170	13°–14°
VP260C	7,13	375	270	1126–1151	264–299	700–735	250	945–980	120–150	19°–21°
V650C	19,31	560	395	1441–1602	310–320	973–1050	300	1400–1410	170–210	21°–28°

Legenda:

- G přesah lana
- rozměry jsou v mm

## 4.9.6 Trvalá ochrana kotev



trvalá ochrana kotev

Typ	Rozměry		
	M	N	H <sub>min</sub>
3F15	200	95	50
3C15	200	170	120
4F15	240	100	50
4C15	200	180	125
5F15	280	100	50
7C15	230	210	125
9C15	275	245	125
12C15	290	260	150
13C15	300	270	150

Typ	Rozměry		
	M	N	H <sub>min</sub>
19C15	350	310	160
22C15	380	335	170
25C15	410	360	170
25CC15	410	360	170
27C15	400	350	180
31C15	435	380	180
37C15	470	410	198
55C15	560	480	230

**Legenda:**

– rozměry jsou v mm

Veškeré informace jsou zde prezentovány se souhlasem firmy Freyssinet. Tento přehled není kompletní, jsou zde stručně popsány základní systémy pro rychlou orientaci ve cvičení z předmětů týkajících se předpjatého betonu. Veškerý sortiment firmy je volně dostupný na [www stránkách výrobce](http://www.strankach.vyrobce).



## 5. STUDIJNÍ PRAMENY

### 5.1 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK

Písmena latinské abecedy:

a, b, c	označení podporového bodu
$A_c$	průřezová plocha betonového prvku
$A_{M,i}$	i-tá plocha obrazce ohybových momentů
$A_{MF,i}$	i-tá plocha obrazce ohybových momentů od zatížení silou F
$A_{N,i}$	i-tá plocha obrazce normálových sil
$b_c$	šířka průřezu betonového prvku
$C_{g,i}$	těžisté i-tého obrazce (obrazec ohybových momentů, normálových sil)
E	modul pružnosti materiálu
$e_P$	excentricita předpínacího kabelu
$e_{P,a}$ $e_{P,b}$	koncová excentricita předpínacího kabelu
$e_{P,i}$	excentricita předpínacího kabelu v i-tém uzlu
$e_{P,x}$	excentricita předpínacího kabelu v místě x od počátku
f	vzepětí paraboly
F	osaměná bodová síla
g	stálé zatížení, včetně vlastní tíhy
$H_i$	výsledná složka horizontální síly v i-tém uzlu
$H_P$	horizontální složka předpínací síly
$h_c$	výška průřezu betonového prvku
$I_y$	moment setrvačnosti průřezu stanovený k osy y
k	počet kloubových styčnic
$k_{r,ab}$ $k_{r,ba}$	ohybová tuhost prutu konstantního průřezu
L	teoretické rozpětí nosníku, délka paraboly
$L_{a,b}$ $L_{b,c}$	teoretické rozpětí nosníku a-b a b-c
M	ohybový moment
$M_F$	ohybový moment od osamělé bodové síly F
$M_g$	ohybový moment od stálého zatížení, včetně vlastní tíhy
$M_{(g+q),i}$	ohybový moment od stálého a proměnného zatížení v i-tém uzlu
$\bar{M}$	ohybové momenty na virtuálním nosníku
$\bar{M}_F$	ohybové momenty na virtuálním nosníku od osamělé bodové síly F
$\bar{M}_{cg,i}$	hodnota ohybového momentu na virtuálním nosníku v místě těžisté i-tého obrazce
$M_{cg,i}$	hodnota ohybového momentu na skutečném nosníku v místě těžisté i-tého obrazce
$M_{ab}$ $M_{ba}$	koncové ohybové momenty
$\bar{M}_{ab}$ $\bar{M}_{ba}$	primární ohybové momenty
$\tilde{M}_{ab}$ $\tilde{M}_{ba}$	sekundární ohybové momenty
$M_a$ $M_b$ $M_c$	podporové ohybové momenty v bodě a, b, c
$M_P$	ohybový moment vyvozený předpínacím kabelem
$\bar{M}_P$	ohybový moment vyvozený předpínacím kabelem na virtuálním nosníku
$M_{P,a}$ $M_{P,b}$ $M_{P,c}$	koncové ohybové momenty vyvozený předpínacím kabelem v uzlech a, b, c
$M_{P,i}$	ohybový moment vyvozený předpínacím kabelem v i-tém uzlu
$M_{P,i,1,}$	ohybový moment – primární účinky od předpětí v i-tém uzlu
$M_{P,i,2,}$	ohybový moment – celkové účinky od předpětí v i-tém uzlu
$M_{P,i,c,}$	ohybový moment – celkové účinky od předpětí v i-tém uzlu
$M_{P,x}$	ohybový moment vyvozený předpínacím kabelem v místě x od počátku
$M_{q,x}$	ohybový moment od proměnného zatížení v místě x od počátku
N	normálová síla
$N_g$	normálová síla od stálého zatížení, včetně vlastní tíhy

$N_{(g+q),i}$	normálová síla od stálého a proměnného zatížení, včetně vlastní tíhy
$\bar{N}$	normálové síly na virtuálním nosníku
$\bar{N}_{cg,i}$	hodnota normálové síly na virtuálním nosníku v místě těžiště $i$ -tého obrazce
$N_{P,i,1,}$	ohybový moment – primární účinky od předpětí v $i$ -tém uzlu
$N_{P,i,2,}$	ohybový moment – celkové účinky od předpětí v $i$ -tém uzlu
$N_{P,i,c,}$	ohybový moment – celkové účinky od předpětí v $i$ -tém uzlu
$n_p$	stupeň přetvárné neurčitosti
$P_i$	předpínací síla v $i$ -tém uzlu
$P_{i-1}$	předpínací síla v $(i-1)$ ním uzlu
$P_H$	horizontální složka předpínací síly
$P_P$	předpínací síla v místě kotvení
$P_{v,a}$	vertikální složka předpínací síly v uzlu a
$P_{v,b}$	vertikální složka předpínací síly v uzlu b
$p$	počet jednoduchých posuvných podepření – posuvný kloub
$p_i$	spojité rovnoměrné zatížení od zakřiveného kabelu v $i$ -tém uzlu
$p_{a,b}$	spojité rovnoměrné zatížení od zakřiveného kabelu mezi uzly a–b
$p_v$	počet vnějších vazeb umístěných u styčnicku
$q$	proměnné zatížení
$Q_i$	výslednice spojitěho rovnoměrného zatížení
$R$	podporová reakce
$R_a, R_b, R_c$	podporová reakce v uzlech a, b, c
$R_{a,x}$	vodorovná složka podporové reakce v uzlu a
$R_{a,z}$	svislá složka podporové reakce v uzlu a
$R_{H,i}$	vodorovná výslednice sil v místě zalomení předpínacího kabelu
$R_{P,a2}$	podporová reakce od sekundárních účinku předpětí v uzlu a
$R_{P,b2}$	podporová reakce od sekundárních účinku předpětí v uzlu b
$R_{P,c2}$	podporová reakce od sekundárních účinku předpětí v uzlu c
$R_{v,i}$	svislá výslednice sil v místě zalomení předpínacího kabelu
$t$	počet monolitických (tuhých) styčnicků
$t_i$	délka zakřiveného úseku předpínacího kabelu
$u$	svislý posun styčnicku
$u_a$	svislý posun styčnicku s označením a
$V_g$	posouvající síla od stálých složek zatížení, včetně vlastní tíhy
$V_P$	vertikální složka předpínací síly
$V_{P,i,1,}$	posouvající síla – primární účinky od předpětí v $i$ -tém uzlu
$V_{P,i,2,}$	posouvající síla – sekundární účinky od předpětí v $i$ -tém uzlu
$V_{P,i,c,}$	posouvající síla – celkové účinky od předpětí v $i$ -tém uzlu
$V_P(x)$	posun tlakové čáry vlivem sekundárních účinků předpětí
$X_{cg,i}$	vzdálenost těžiště plochy obrazce od počátku
$w$	vodorovný posun styčnicku
$w_a$	vodorovný posun styčnicku s označením a
$w_y$	průřezový modul stanovený k osy y

Písmena řecké abecedy:

$\alpha, \alpha_P$	odklon tečny předpínacího kabelu od střednícenosníku v bodě a
$\alpha_{ab}, \alpha_{ba}$	pootočení podporového průřezu vlivem podporových momentů
$\beta, \beta_P$	odklon tečny předpínacího kabelu od střednícenosníku v bodě b
$\beta_{ab}, \beta_{ba}$	pootočení podporového průřezu vlivem podporových momentů
$\delta$	deformace nosníku vlivem vnějšího zatížení
$\delta, \delta$	zjednodušený výpočet deformace nosníku
$\delta_F$	deformace nosníku od osamělé bodové síly F

$\delta_P$	deformace nosníku od předpětí
$\delta_1$	deformace nosníku od jednotkového zatížení
$\gamma_{\text{beton}}$	objemová hmotnost betonu
$\varphi$	pootočení nosníku
$\varphi_{ab}$ $\varphi_{ba}$	pootočení podporového průřezu od vnějšího zatížení
$\Phi_{ab}$ $\Phi_{bc}$	pootočení podporového průřezu b
$\Psi_{ab}$ $\Psi_{bc}$	prutové pootočení
$\sigma_{c,D}$	napětí v dolních vláknech betonového průřezu
$\sigma_{c,H}$	napětí v horních vláknech betonového průřezu
$\sigma_{c,L}$	napětí v levých vláknech betonového průřezu
$\sigma_{c,P}$	napětí v pravých vláknech betonového průřezu
$\sigma_{g,M}$	napětí v přilehlých vláknech průřezu od ohybových momentů – stálé zatížení
$\sigma_{q,M}$	napětí v přilehlých vláknech průřezu od ohybových momentů – proměnné zatížení
$\sigma_{(g+q),M}$	napětí v přilehlých vláknech průřezu od ohybových momentů – součet stálého a proměnného zatížení
$\sigma_{(g+q),N}$	napětí v přilehlých vláknech průřezu od normálových sil – součet stálého a proměnného zatížení
$\sigma_{P,N}$	napětí v přilehlých vláknech průřezu od normálových sil – předpětí
$\sigma_{P,M}$	napětí v přilehlých vláknech průřezu od ohybových momentů – předpětí
$\sigma_{F1}$	napětí v přilehlých vláknech průřezu od ohybových momentů – 1. fáze předpětí

## 5.2 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] J. Návrátil, *Předpjaté betonové konstrukce*, Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., Brno, 2008
- [2] L. Klusáček, J. Panáček, P. Štěpánek, *Předpjatý beton podle ČSN 731201*, (skriptum), Brno, VUT, 1990
- [3] J. Kytýr, P. Frantík, *Statika I*, (skriptum), Brno, VUT, 2006
- [4] J. Kytýr, P. Frantík, *Statika II*, (skriptum), Brno, VUT, 2006
- [5] A. Dixon, E. Sheils, E. O'Brien, *Reinforced and Prestressed Concrete Design to EC2*, CRC Press, 2012
- [6] M. J. Ryall, G. A. R. Parke, J. E. Harding, *The Manual of Bridge Engineering*, Thomas Telford Publishing, 2012
- [7] W. Rossner, C. A. Graubner, *Spannbetonbauwerke Teil 4: Bemessungsbeispiele nach Eurocode*, Ernst & Sohn, 2012
- [8] Navrhování betonových konstrukcí, ČSN EN 1992-1-1, Český normalizační institut, 2002
- [9] J. Kadlčák, J. Kytýr, *Statika I. stavebních konstrukcí*, nakladatelství VUTIUM, Brno, 2004
- [10] J. Kadlčák, J. Kytýr, *Statika II. stavebních konstrukcí*, nakladatelství VUTIUM, Brno, 2004

## 5.3 SEZNAM POUŽITÝCH WEBOVÝCH ODKAZŮ

- [11] VSL [online], dostupné z <<http://www.vsl.cz>>
- [12] Dywidag–Systém International [online], dostupné z <<http://www.dywidag-systems.com>>
- [13] Drahtwerke Köln GmbH [online], dostupné z <<http://www.en.dwk-koeln.de>>
- [14] Freyssinet–sustainable technology [online], dostupné z <<http://www.freyssinet.cz>>